**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1990**

УДК 539.3

В. В. ВАСИЛЬЕВ, С. А. ЛУРЬЕ

К ПРОБЛЕМЕ УТОЧНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В статье рассматривается задача сведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории пологих оболочек путем разложения перемещений в ряды по системе заданных функций, зависящих от нормальной координаты. Вводится понятие согласованной теории и формулируются условия согласованности разложений для перемещений. В качестве примера рассматривается цилиндрическая оболочка, для которой решение, основанное на уравнениях согласованной теории, сравнивается с точным.

1. Вывод двумерных уравнений. Рассмотрим однородную ортотропную оболочку, отнесенную к ортогональной криволинейной системе координат x_1, x_2, x_3. Координатные оси x_1 и x_2 совпадают с главными направлениями срединной поверхности оболочки, а ось x_3 направлена по наружной нормали к этой поверхности. Ограничимся анализом пологих оболочек [1], для которых трехмерные уравнения могут быть записаны в форме

$$\begin{gathered}(A_2\sigma_1)_{,1}-\sigma_2A_{2,1}+(A_1\tau_{12})_{,2}+\tau_{12}A_{1,2}+A_1A_2\tau_{13,3}=0 \quad (1,2)\\ (A_2\tau_{13})_{,1}+(A_1\tau_{23})_{,2}+A_1A_2(\sigma_{3,3}-k_1\sigma_1-k_2\sigma_2)=0\end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}\sigma_1=B_{11}e_1+B_{12}e_2+B_{13}e_3 \quad (1,2), \quad \tau_{12}=B_{44}e_{12}\\ \sigma_3=B_{33}e_3+B_{31}e_1+B_{32}e_2, \quad \tau_{13}=B_{55}e_{13}, \quad \tau_{23}=B_{66}e_{23}\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}e_1=\frac{1}{A_1}U_{1,1}+\frac{A_{1,2}}{A_1A_2}U_2+k_1U_3, \qquad e_{13}=\frac{1}{A_1}U_{3,1}+U_{1,3}(1,2)\\ e_3=U_{3,3}, \qquad e_{12}=\frac{1}{A_2}U_{1,2}+\frac{1}{A_1}U_{2,1}-\frac{1}{A_1A_2}(U_1A_{1,2}+U_2A_{2,1})\end{gathered} \tag{1.3}$$

Индекс после запятой обозначает операцию дифференцирования по соответствующей координате, символ $(1,2)$ — операцию круговой перестановки индексов. Через B_{mn} обозначены коэффициенты жесткости, а через A_1, A_2 и k_1, k_2 — коэффициенты первой квадратичной формы и главные кривизны срединной поверхности. На поверхностях оболочки $x_3=\pm h/2$ (h — толщина оболочки) заданы следующие граничные условия

$$\tau_{13}(\pm h/2)=0, \quad \tau_{23}(\pm h/2)=0, \quad \sigma_3(h/2)=-q, \quad \sigma_3(-h/2)=-p \tag{1.4}$$

Для построения теории оболочек систему трехмерных уравнений (1.1)—(1.3) необходимо свести к системе двумерных уравнений, включающих в качестве независимых переменных координаты x_1 и x_2. При этом согласно предложенной в [2] и общепризнанной в настоящее время классификации теорий оболочек могут быть использованы формальные математические и, в частности, итерационные методы, а также системы физических гипотез. Реализуя последний подход, рассмотрим кинематику нормали к срединной поверхности оболочки и представим перемещения произвольной точки нормали в виде

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = u_0(x_1, x_2) + x_3 u_1(x_1, x_2) + \Sigma_{i=2}^{I} u_i(x_1, x_2)\varphi_i(x_3)$$

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = v_0(x_1, x_2) + x_3 v_1(x_1, x_2) + \Sigma_{j=2}^{J} v_j(x_1, x_2)\psi_j(x_3) \tag{1.5}$$

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = w_1(x_1, x_2) + \Sigma_{k=2} w_k(x_1, x_2)\chi_k(x_3)$$

Здесь функции u_0, v_0, w_1 и u_1, v_1 соответствуют перемещениям нормали как твердого тела, т. е. поступательным перемещениям в направлении осей x_1, x_2, x_3 и поворотам в плоскостях x_1x_3 и x_2x_3. Напряженно-деформированное состояние оболочки, соответствующее обсуждаемым членам разложений (1.5), будем называть основным. Остальные члены разложений (1.5) определяют деформация нормали, причем функции φ_i, ψ_j и χ_k задаются, а для функций u_i, v_j и w_k следует составить систему двумерных уравнений. Отметим, что разложение перемещений в ряды по толщине является распространенным способом построения теории оболочек [3—8]; при этом обычно используются разложения по полиномам Лежандра. Существенной стороной обсуждаемого вопроса является то, что для построения корректной двумерной теории функции φ_i, ψ_j и χ_k должны быть согласованы между собой. Получению соответствующих условий согласованности и построению теории, удовлетворяющей этим условиям, посвящена настоящая работа.

Как следует из равенств (1.5), элемент оболочки с бесконечно малыми размерами в направлении осей x_1 и x_2 и конечным размером, равным толщине оболочки h в направлении координаты x_3, имеет $(I+1)+(J+1)+K$ степеней свободы. Для получения соответствующих уравнений равновесия можно воспользоваться принципом возможных перемещений. Умножая уравнения (1.1) на соответствующие аппроксимирующие функции, интегрируя по толщине и учитывая условия (1.4), получим.

Для основного состояния

$$(A_2N_1)_{,1} - N_2A_{2,1} + (A_1N_{12})_{,2} + N_{12}A_{1,2} = 0 \quad (1, 2) \tag{1.6}$$

$$(A_2Q_1)_{,1} + (A_1Q_2)_{,2} - A_1A_2(k_1N_1 + k_2N_2 - p_1) = 0$$

$$(A_2M_1)_{,1} - M_2A_{2,1} + (A_1M_{12})_{,2} + M_{12}A_{1,2} - A_1A_2Q_1 = 0 \quad (1, 2)$$

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1\, dx_3, \qquad M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 x_3\, dx_3, \qquad Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{13}\, dx_3 \quad (1, 2)$$

$$N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12}\, dx_3, \qquad M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12}x_3\, dx_3, \qquad p_1 = p - q \tag{1.7}$$

Для состояний высшего порядка $(i, j, k \geqslant 2)$:

$$(A_2M_1^{(i)})_{,1} - M_2^{(i)}A_{2,1} + (A_1M_{12}^{(i)})_{,2} + M_{12}^{(i)}A_{1,2} - A_1A_2R_1^{(i)} = 0 \tag{1.8}$$

$$(A_1M_2^{(j)})_{,2} - M_1^{(j)}A_{1,2} + (A_2M_{12}^{(j)})_{,1} + M_{12}^{(j)}A_{2,1} - A_1A_2R_2^{(j)} = 0$$

$$(A_2Q_1^{(k)})_{,1} + (A_1Q_2^{(k)})_{,2} - A_1A_2(k_1N_1^{(k)} + k_2N_2^{(k)} + T_3^{(k)} - p_k) = 0$$

$$M_1^{(i)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1\varphi_i\, dx_3, \qquad M_1^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1\psi_j\, dx_3 \quad (1, 2) \tag{1.9}$$

$$M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12}\varphi_i\, dx_3, \qquad M_{12}^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12}\psi_j\, dx_3 \tag{1.10}$$

$$Q_1^{(k)} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \tau_{13}\chi_k\, dx_3, \qquad Q_2^{(k)} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \tau_{23}\chi_k\, dx_3 \tag{1.11}$$

$$R_1^{(i)} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \tau_{13}\varphi_i'\, dx_3, \qquad R_2^{(j)} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \tau_{23}\psi_j'\, dx_3 \tag{1.12}$$

$$N_1^{(k)} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_1\chi_k\, dx_3, \qquad N_2^{(k)} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_2\chi_k\, dx_3 \tag{1.13}$$

$$T_3^{(k)} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_3\chi_k'\, dx_3, \qquad p_k = p\chi_k(-h/2) - q\chi_k(h/2)$$

Штрихом обозначена производная по x_3.

Сформулируем вариационную постановку задачи. В связи с тем, что она решается в перемещениях, запишем условие стационарности трехмерного функционала Лагранжа

$$\iiint (\sigma_1\delta e_1+\sigma_2\delta e_2+\sigma_3\delta e_3+\tau_{12}\delta e_{12}+\tau_{13}\delta e_{13}+\tau_{23}\delta e_{23}) A_1A_2\, dx_1\, dx_2\, dx_3 -$$
$$- \iint [pU_3(-h/2) - qU_3(h/2)] A_1A_2\, dx_1\, dx_2 = 0$$

Подставляя сюда деформации (1.3), разложения для перемещений (1.5) и учитывая обозначения (1.7), (1.9)–(1.13), получим

$$\iint (N_1\delta\varepsilon_1+N_2\delta\varepsilon_2+N_{12}\delta\varepsilon_{12}+M_1\delta\varkappa_1+M_2\delta\varkappa_2+M_{12}\delta\varkappa_{12}+Q_1\delta\zeta_1+Q_2\delta\zeta_2-$$
$$-p_1\delta w_1) A_1A_2\, dx_1\, dx_2 + \iint \Bigg\{ \sum_{i=2}^{I} \Bigg[\frac{1}{A_1} M_1^{(i)}\, \delta u_{i,1} + \frac{1}{A_2} M_{12}^{(i)}\, \delta u_{i,2} +$$
$$+\left(\frac{A_{2,1}}{A_1A_2} M_2^{(i)} - \frac{A_{1,2}}{A_1A_2} M_{12}^{(i)} + R_1^{(i)} \right)\delta u_i \Bigg] + \sum_{j=2}^{J} \Bigg[\frac{1}{A_2} M_2^{(j)}\, \delta v_{j,2} + \frac{1}{A_1} M_{12}^{(j)}\, \delta v_{j,1} +$$
$$+\left(\frac{A_{1,2}}{A_1A_2} M_1^{(j)} - \frac{A_{2,1}}{A_1A_2} M_{12}^{(j)} + R_2^{(j)} \right)\delta v_j \Bigg] +$$
$$+ \sum_{k=2}^{K} \Bigg[\frac{1}{A_1} Q_1^{(k)}\delta w_{k,1} + \frac{1}{A_2} Q_2^{(k)}\, \delta w_{k,2} + (k_1N_1^{(k)} + k_2N_2^{(k)} + T_3^{(k)} -$$
$$-p_k)\,\delta w_k \Bigg] \Bigg\} A_1A_2\, dx_1\, dx_2 = 0 \tag{1.14}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} u_{0,1} + \frac{v_0}{A_1A_2} A_{1,2} + k_1 w_1, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} v_{0,2} + \frac{u_0}{A_1A_2} A_{2,1} + k_2 w_1 \tag{1.15}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{A_2} u_{0,2} + \frac{1}{A_1} v_{0,1} - \frac{1}{A_1A_2} (u_0A_{1,2} + v_0A_{2,1})$$

$$\varkappa_1 = \frac{1}{A_1} u_{1,1} + \frac{v_1}{A_1A_2} A_{1,2}, \qquad \varkappa_2 = \frac{1}{A_2} v_{1,2} + \frac{u_1}{A_1A_2} A_{2,1}$$

$$\varkappa_{12} = \frac{1}{A_2} u_{1,2} + \frac{1}{A_1} v_{1,1} - \frac{1}{A_1A_2} (u_1A_{1,2} + v_1A_{2,1})$$

$$\zeta_1 = u_1 + \frac{1}{A_1} w_{1,1}, \qquad \zeta_2 = v_1 + \frac{1}{A_2} w_{1,2}$$

2. Условия согласованности. Будем считать двумерную теорию энергетически согласованной, если она удовлетворяет следующим двум условиям.

1. Вариационные уравнения, вытекающие из условия минимума функционала Лагранжа (1.14), совпадают с уравнениями равновесия (1.6), (1.8).

2. Естественные граничные условия, следующие из вариационного уравнения (1.14), обеспечивают в силу разложений (1.5) тождественное обращение в ноль перемещений на закрепленном краю оболочки и напряжений, действующих на свободном краю. Для выполнения первого требования необходимо, чтобы все обобщенные перемещения u, v, w в рядах (1.5) обращались в ноль, а для выполнения второго требования необходимо, чтобы обращались в ноль обобщенные усилия и моменты (1.7) и (1.9)–(1.13), действующие на рассматриваемом краю.

3. Теория основного состояния. Рассмотрим основное состояние оболочки, для которого разложения (1.5) имеют вид

$$U_1=u_0+x_3u_1,\quad U_2=v_0+x_3v_1,\quad U_3=w_1 \tag{3.1}$$

Уравнения равновесия имеют форму (1.6), геометрические соотношения определяются равенствами (1.15), а соотношения упругости, следующие из равенств (1.2), (1.3), (1.7) и (3.1), могут быть записаны следующим образом

$$\begin{gathered}N_1=h(B_{11}\varepsilon_1+B_{12}\varepsilon_2)\quad (1,2),\quad N_{12}=hB_{44}\varepsilon_{12}\\ M_1=\frac{h^3}{12}(B_{11}\varkappa_1+B_{12}\varkappa_2)\quad (1,2),\quad M_{12}=\frac{h^3}{12}B_{44}\varkappa_{12}\\ Q_1=hB_{55}\zeta_1,\quad Q_2=hB_{66}\zeta_2\end{gathered} \tag{3.2}$$

Система уравнений (1.6), (1.15) и (3.2), описывающая основное состояние оболочки, имеет в совокупности 10-й порядок по переменным x_1 и x_2. Рассмотрим применительно к теории основного состояния условия согласованности, сформулированные в п. 2. Удерживая в левой части вариационного уравнения (1.12) только первый интеграл и осуществляя вариацию по кинематическим переменным u_0, v_0, w_1, u_1, v_1, входящим в разложения (3.1), получим пять уравнений, совпадающих с уравнениями (1.6). Заметим, что эти уравнения обеспечивают равновесие элемента оболочки как твердого тела и могут быть получены непосредственно из условий его равновесия. Из вариационного уравнения могут быть получены также следующие естественные граничные условия для краев $x_1=\mathrm{const}$ и $x_2=\mathrm{const}$:

$$\begin{gathered}N_1\delta u_0=0,\quad N_{12}\delta v_0=0,\quad Q_1\delta w_1=0,\quad M_1\delta u_1=0,\quad M_{12}\delta v_1=0\\ N_2\delta v_0=0,\quad N_{12}\delta u_0=0,\quad Q_2\delta w_1=0,\quad M_2\delta v_1=0,\quad M_{12}\delta u_1=0\end{gathered} \tag{3.3}$$

Число граничных условий находится в соответствии с порядком системы уравнений, описывающих основное состояние. Из условий (3.3) следует, что на закрепленном краю оболочки $u_0=v_0=w_1=u_1=v_1=0$, т. е. в соответствии с равенствами (3.1) перемещения отсутствуют. На свободном краю обращаются в ноль действующие на нем усилия и моменты. Таким образом, теория основного состояния удовлетворяет условиям согласованности, сформулированным в п. 2. Отметим, что теория основного состояния, иногда трактуемая как вариант уточненной теории оболочек, основанной на сдвиговой модели, предложенной С. П. Тимошенко для балок, изложена в [9, 10].

Рассмотрим классическую теорию оболочек, в которой перемещения определяются соотношениями (3.1) при дополнительных условиях $u_1=-w_{1,1}/A_1$, $v_1=-w_{1,2}/A_2$. В результате в соответствующем функционале Лагранжа остаются только три варьируемые функции u_0, v_0 и w_1 и соответственно вместо пяти уравнений (1.6) из условия стационарности функционала следуют только три уравнения – первые два уравнения (1.6) и комбинация из трех остальных, получающаяся как исключение из них поперечных усилий. Таким образом, первое условие согласованности не выполняется. Не выполняется и второе условие, так как порядок уравнений классической теории, как известно, не соответствует числу усилий и моментов, к которым сводятся напряжения. В связи с этим в общем случае на свободном краю оболочки не удается обратить в ноль поперечное усилие и крутящий момент (это оказывается возможным сделать только для их комбинации — так называемого обобщенного поперечного усилия Кирхгоффа) и, следовательно, устранить касательные напряжения. Итак, классическая теория оболочек не удовлетворяет условиям согласованности, сформулированным в п. 2.

4. Уточненные теории. Рассмотрим теории высшего порядка, при построении которых в разложениях (1.5) удерживаются члены с номерами $i, j, k \geqslant 2$. Осуществляя минимизацию функционала Лагранжа и варьируя в уравнении (1.14) функции u_i, v_j, w_k, получим уравнения (1.8) и следующие естественные граничные условия для краев $x_1=\mathrm{const}$ и $x_2=\mathrm{const}$:

$$\begin{gathered}M_1^{(i)}\,\delta u_i=0, \qquad M_{12}^{(j)}\,\delta v_j=0, \qquad Q_1^{(k)}\,\delta w_k=0 \\ M_2^{(j)}\,\delta v_j=0, \qquad M_{12}^{(i)}\,\delta u_i=0, \qquad Q_2^{(k)}\,\delta w_k=0\end{gathered} \tag{4.1}$$

На закрепленном краю оболочки эти условия в совокупности с условиями (3.3) для основного состояния обеспечивают в силу разложений (1.5) отсутствие перемещений. Однако для свободного края условия согласованности не выполняются, поскольку кроме обобщенных усилий M и Q, которые обращаются в ноль согласно условиям (4.1), на краях оболочки действуют также усилия R и N, определяемые равенствами (1.12) и (1.13). Проблема согласованности поперечных сдвиговых усилий Q (1.11) и R (1.12) обсуждалась в [11], где было получено следующее условие наилучшей аппроксимации распределения поперечных касательных напряжений τ_{13} и τ_{23} по толщине отрезком ряда по полной системе функций

$$i=j=k, \quad \varphi_i'=\psi_i'=\chi_i \tag{4.2}$$

При выполнении условий (4.2) обобщенные сдвиговые усилия Q и R совпадают. Обеспечим совпадение обобщенных усилий M (1.9) и N (1.13). Для этого достаточно чтобы функции φ_i были степенными, т. е.

$$\varphi_i=x_3{}^i \tag{4.3}$$

Таким образом, условия (3.3) и (4.1) обеспечивают обращение в ноль всех действующих на краю оболочки обобщенных усилий, если этот край свободен от нагрузки, и условия согласованности, сформулированные в п. 2, выполняются.

5. Уравнения согласованной уточненной теории. С учетом условий (4.2) и (4.3) разложения для перемещений (1.5) принимают следующую форму

$$U_1=\sum_{n=0} u_n(x_1,x_2)\,x_3{}^n, \qquad U_2=\sum_{n=0} v_n(x_1,x_2)\,x_3{}^n, \qquad U_3=\sum_{n=1} n w_n(x_1,x_2)\,x_3{}^{n-1} \tag{5.1}$$

Соответственно, уравнения равновесия (1.6) и (1.8) можно представить в виде

$$\begin{gathered}(A_2N_1^{(n)})_{,1}-A_{2,1}N_2^{(n)}+(A_1N_{12}^{(n)})_{,2}+A_{1,2}N_{12}^{(n)}-A_1A_2Q_1^{(n)}=0, \quad (1,2) \quad n=0,1,2\ldots \\ (A_2Q_1^{(n)})_{,1}+(A_1Q_2^{(n)})_{,2}-A_1A_2[n(k_1N_1^{(n)}+k_2N_2^{(n)})+T_3^{(n)}-p_n]=0, \quad n=1,2,3\ldots\end{gathered} \tag{5.2}$$

где обобщенные усилия

$$N_1^{(n)}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_1 x_3{}^n\,dx_3 \quad (1,2), \qquad N_{12}^{(n)}=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{12}x_3{}^n\,dx_3 \tag{5.3}$$

$$Q_1^{(n)}=n\int\limits_{-h/2}^{h/2}\tau_{13}x_3^{n-1}dx_3\ (1,2),\qquad T_3^{(n)}=n(n-1)\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_3x_3^{n-2}dx_3$$

$$p_n=n[p(-h/2)^{n-1}-q(h/2)^{n-1}]$$

Запишем условие стационарности функционала Лагранжа (1.14)

$$\int\int\sum_{n=0}(N_1^{(n)}\delta\varepsilon_1^{(n)}+N_2^{(n)}\delta\varepsilon_2^{(n)}+N_{12}^{(n)}\delta\varepsilon_{12}^{(n)}+Q_1^{(n)}\delta\zeta_1^{(n)}+Q_2^{(n)}\delta\zeta_2^{(n)}+$$
$$+T_3^{(n)}\delta w_n-p_n\delta w_n)A_1A_2\,dx_1\,dx_2=0 \qquad (5.4)$$

где обобщенные деформации

$$\varepsilon_1^{(n)}=\frac{1}{A_1}u_{n,1}+\frac{A_{1,2}}{A_1A_2}v_n+(n+1)k_1w_{n+1},$$
$$\varepsilon_2^{(n)}=\frac{1}{A_2}v_{n,2}+\frac{A_{2,1}}{A_1A_2}u_n+(n+1)k_2w_{n+1}$$
$$\varepsilon_{12}^{(n)}=\frac{1}{A_2}u_{n,2}+\frac{1}{A_1}v_{n,1}-\frac{1}{A_1A_2}(A_{1,2}u_n+A_{2,1}v_n) \qquad (5.5)$$
$$\zeta_1^{(n)}=\frac{1}{A_1}w_{n,1}+u_n,\qquad \zeta_2^{(n)}=\frac{1}{A_2}w_{n,2}+v_n$$

Осуществляя в уравнении (5.4) варьирование по кинематическим переменным u_n, v_n, w_n, можно получить уравнения (5.2) и следующие естественные граничные условия для краев x_1=const и x_2=const:

$$N_1^{(n)}\delta u_n=0,\qquad N_{12}^{(n)}\delta v_n=0,\qquad Q_1^{(n)}\delta w_n=0$$
$$N_2^{(n)}\delta v_n=0,\qquad N_{12}^{(n)}\delta u_n=0,\qquad Q_2^{(n)}\delta w_n=0 \qquad (5.6)$$

Если в рядах (5.1) удерживается n первых членов, то порядок получаемой системы уравнений оказывается равным $4+6n$.

Для закрепленных краев условия (5.6) дают $u_n=v_n=w_n=0$, что в силу разложений (5.1) обеспечивает тождественное обращение в ноль перемещений U_1, U_2, U_3.

Для свободных краев получаем $N_1^{(n)}=N_{12}^{(n)}=Q_1^{(n)}=0$ и $N_2^{(n)}=N_{12}^{(n)}=Q_2^{(n)}=0$ Покажем, что эти условия обеспечивают тождественное обращение в ноль действующих на краях напряжений. Основные напряжения σ_1, σ_2, τ_{12} определяются из закона Гука (1.2). С учетом равенств (1.3), (5.1) и (5.5) получим

$$\sigma_1=\sum_{n=0}\sigma_1^{(n)}x_3{}^n,\qquad \sigma_2=\sum_{n=0}\sigma_2^{(n)}x_3{}^n,\qquad \tau_{12}=\sum_{n=0}\tau_{12}^{(n)}x_3{}^n \qquad (5.7)$$

$$\sigma_1^{(n)}=B_{11}\varepsilon_1^{(n)}+B_{12}\varepsilon_2^{(n)}+B_{13}\varepsilon_3{}^n\ (1,2),\qquad \tau_{12}^{(n)}=B_{44}\varepsilon_{12}^{(n)},\qquad \varepsilon_3^{(n)}=n(n-1)w_n \qquad (5.8)$$

Подставляя напряжения (5.7) в формулы (5.3), можно записать следующие выражения для обобщенных усилий

$$N_1^{(n)}=\sum_{i=0}a_{in}\sigma_1^{(i)},\qquad N_2^{(n)}=\sum_{i=0}a_{in}\sigma_2^{(i)},\qquad N_{12}^{(n)}=\sum_{i=0}a_{in}\tau_{12}^{(i)}$$
$$a_{in}=\frac{1}{i+n+1}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{i+n+1}-\left(-\frac{h}{2}\right)^{i+n+1}\right] \qquad (5.9)$$

Для определения поперечных напряжений τ_{13}, τ_{23}, σ_3 следует воспользоваться трехмерными уравнениями равновесия (1.1). Интегрируя эти уравнения по x_3 с учетом условий (1.4) и равенств (5.7), получим

$$\tau_{13}=-\frac{1}{A_1A_2}\sum_{n=0}\frac{\tau_{13}^{(n)}}{n+1}\left[x_3^{n+1}-\left(-\frac{h}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\sigma_3=\frac{1}{A_1A_2}\sum_{n=0}\frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{\tau_{13}^{(n)}}{A_1}\right)_{,1}+\left(\frac{\tau_{23}^{(n)}}{A_2}\right)_{,2}\right]\left\{\frac{1}{n+2}\left[x_3^{n+2}-\left(\frac{h}{2}\right)^{n+2}\right]-\right.$$

$$\left.-\left(x_3+\frac{h}{2}\right)\left(-\frac{h}{2}\right)^{n+1}\right\}+\sum_{n=0}\left(k_1\sigma_1^{(n)}+k_2\sigma_2^{(n)}\right)\frac{1}{n+1}\left[x_3^{n+1}-\left(-\frac{h}{2}\right)^{n+1}\right]-p \qquad (5.10)$$

$$\tau_{13}^{(n)}=\left(A_2\sigma_1^{(n)}\right)_{,1}-\sigma_2^{(n)}A_{2,1}+\left(A_1\tau_{12}^{(n)}\right)_{,2}+\tau_{12}^{(n)}A_{1,2} \quad (1,2)$$

Коэффициенты $\tau_{13}^{(n)}$ могут быть связаны с обобщенными сдвиговыми усилиями $Q_1^{(n)}$. Для этого воспользуемся первым уравнением равновесия (5.2). Подставляя в него обобщенные усилия N согласно формулам (5.3) и используя равенства (5.7), окончательно получим

$$\sum_{i=0}a_{in}\tau_{13}^{(i)}=A_1A_2Q_1^{(n)} \quad (1,2) \qquad (5.11)$$

Заметим, что формулы (5.10) не совпадают с соответствующими выражениями для напряжений, следующими из закона Гука (1.2), что связано с приближенностью процедуры сведения исходной трехмерной задачи теории упругости к двумерной задаче теории оболочек. Важной особенностью рассматриваемой теории является то, что закон Гука (1.2) для поперечных напряжений τ_{13}, τ_{23}, σ_3 в ней используется только для получения обобщенных усилий, входящих в уравнения (5.2) и (5.4). Соответствующие выражения следуют из равенств (1.2), (5.1) и (5.3) и имеют вид

$$Q_1^{(n)}=B_{55}n\sum_{i=1}ib_{in}\zeta_1^{(i)}, \quad Q_2^{(n)}=B_{66}n\sum_{i=1}ib_{in}\zeta_2^{(i)} \qquad (5.12)$$

$$T_3^{(n)}=n(n-1)\sum_{i=0}\left[b_{in}\left(B_{31}\varepsilon_1^{(i)}+B_{32}\varepsilon_2^{(i)}\right)+c_{in}B_{33}\varepsilon_3^{(i)}\right]$$

$$b_{in}=\frac{1}{i+n-1}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{i+n-i}-\left(-\frac{h}{2}\right)^{i+n-1}\right],$$

$$c_{in}=\frac{1}{i+n-3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{i+n-3}-\left(-\frac{h}{2}\right)^{i+n-3}\right]$$

а обобщенные деформации ζ, ε определяются равенствами (5.5) и (5.8). Равенства (5.11) и (5.12) позволяют связать коэффициенты разложений для касательных напряжений $\tau_{13}^{(i)}$, $\tau_{23}^{(i)}$ с соответствующими обобщенными деформациями сдвига $\zeta_1^{(i)}$, $\zeta_2^{(i)}$.

Вернемся к граничным условиям для свободного края оболочки. Рассмотрим, например, край $x_1=\mathrm{const}$, для которого согласно условиям (5.6) $N_1^{(n)}=0$, $N_{12}^{(n)}=0$, $Q_1^{(n)}=0$. В результате из равенств (5.9) и (5.11) получаем линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно $\sigma_1^{(i)}$, $\tau_{12}^{(i)}$, $\tau_{13}^{(i)}$. Поскольку эта система имеет только нулевое решение, $\sigma_1^{(i)}=\tau_{12}^{(i)}=\tau_{13}^{(i)}=0$ и согласно разложениям (5.7) и (5.10), действующие на краю $x_1=\mathrm{const}$ напряжения σ_1, τ_{12}, τ_{13} тождественно обращаются в ноль.

Таким образом, построенная теория удовлетворяет условиям согласованности, сформулированным в п. 2.

6. Пример. В качестве примера рассмотрим осесимметричную задачу для изотропной свободно опертой по торцам $x_1=0$ и $x_1=l$ цилиндрической оболочки с радиусом R и толщиной h, нагруженной внутренним давлением, изменяющимся по закону $p=p_0 \sin(\pi m x_1/l)$. Точное решение этой задачи для оболочки с параметрами $h/R=0{,}2$; $l/R=1$ приведено в работе [12]. Представим амплитудные значения относительного прогиба $W=10^{-2}U_3E/p_0l$ на внутренней ($x_3=-h/2$), срединной ($x_3=0$) и наружной ($x_3=h/2$) поверхностям оболочки, соответствующие $n=1$, 2, 3 (W_n) и точному решению W для $m=5$. При $x_3=-h/2$ получим $W_1=0{,}231$, $W_2=0{,}298$, $W_3=0{,}307$, $W=0{,}317$; при $x_3=0$ $W_1=0{,}231$, $W_2=0{,}273$, $W_3=0{,}279$, $W=0{,}288$; при $x_3=h/2$ $W_1=0{,}231$, $W_2=0{,}248$, $W_3=0{,}248$, $W=0{,}249$.

Заметим, что в отличие от общей теории, при построении которой с целью упрощения преобразований коэффициенты Ламе пологой оболочки отождествлялись с коэффициентами первой квадратичной формы срединной поверхности, в примере учитывалось изменение радиуса по толщине цилиндра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И. И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 373 с.
2. *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. М., 1964. Вып. 3. Механика твердого тела. М.: Наука, 1966. С. 116–136.
3. *Власов В. З.* Избранные труды. Т. 1. Общая теория оболочек. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
4. *Кильчевский Н. А.* Основы аналитической механики оболочек. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. 354 с.
5. *Волков А. Н.* Статика толстых оболочек. М.: Изд-во ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы, 1974. 146 с.
6. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 214 с.
7. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286 с.
8. *Родионова В. А.* Теория тонких анизотропных оболочек с учетом поперечных сдвигов и обжатия. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 116 с.
9. *Королев В. И.* Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение, 1965. 272 с.
10. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.
11. *Васильев В. В., Лурье С. А.* К проблеме построения неклассических теорий пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 158–167.
12. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев: Вища шк., 1985. 190 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.IX.1990