МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1990

УДК 539.3

А. Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР, Ю. Д. КАПЛУНОВ, Е. В. НОЛЬДЕ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И УТОЧНЕНИЕ ТЕОРИЙ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО — РЕЙССНЕРА

Обсуждаются линейные ТР теории (по имени С. П. Тимошенко и Е. Рейсснера) пластин и оболочек, т. е. теории, учитывающие деформацию поперечного сдвига и инерцию вращения. Ставится вопрос об их построении асимптотическим методом и о вытекающих из этого оценках погрешностей для задач статики и динамики. Предлагается метод расширения области применимости ТР теорий для динамических задач.

1. Асимптотический метод построения дифференциальных уравнений общей теории оболочек разными путями развивался в СССР усилиями И. И. Воровича и его сотрудников, а также усилиями А. Л. Гольденвейзера и его сотрудников. Результаты изложены соответственно в [1—3] и в монографии [4]. В обоих циклах работ отчетливо выявляется физически очевидное свойство напряженно-деформированного состояния (НДС) тонких упругих тел (оболочек и пластин), заключающееся в разделении общего НДС на внутреннее и краевое. В асимптотическом методе этому соответствует возможность построить два итерационных процесса интегрирования дифференциальных уравнений для случая, когда область интегрирования является достаточно узкой. Первый из этих процессов позволяет строить с заданной асимптотической точностью внутренние интегралы (т. е. относительно медленно меняющиеся решения, распространяющиеся, вообще говоря, на всю область, занимаемую оболочкой). Второй процесс определяет быстро меняющиеся краевые интегралы, локализованные вблизи краев или других линий искажения общего НДС оболочки и составляющие так называемый погранслой (в динамических задачах некоторые решения погранслоя могут переродиться из быстро затухающих в сильно осциллирующие).

Внутренние интегралы можно подчинить лицевым условиям (требованиям, выражающим факт загружения наружной и внутренней лицевых поверхностей заданной внешней нагрузкой). При этом будут оставаться произволы для выполнения некоторых торцевых условий (требований, выражающих характер закрепления или загружения торцов).

Двумерные теории оболочек можно трактовать как приближенный метод построения внутреннего интеграла. Соответствующее ему НДС будет приближенно определять НДС оболочки в достаточном удалении от краев (линий искажения). При этом построению внутреннего интеграла с той или иной степенью приближения будет сооответствовать теория оболочек той или иной точности. Условимся в связи с этим говорить об асимптотической теории оболочек $[O(\eta^\rho)=0]$, подразумевая под этим теорию (систему двумерных уравнений), основанную на использовании внутренних интегралов уравнений теории упругости, при построении которых в выкладках отбрасываются величины вида $O(\eta^\gamma)$ по сравнению с единицей, если $\gamma\geqslant\rho$. Здесь $\eta=h/R$ — малый геометрический параметр ($2h$ — толщина тонкого упругого тела, R — его характерный линейный размер).

В [4] показано, что асимптотическая теория оболочек $[O(\eta^{2-2q})=0]$, где q — показатель изменяемости искомого НДС, соответствует незначительно модифицированной теории Кирхгофа — Лява (она в дальнейшем будет называться КЛ теорией). Под асимптотической ТР теорией здесь будет подразумеваться асимптотическая теория $[O(\eta^{4-4q})=0]$. В ней, как станет ясно ниже, учитываются деформация поперечного сдвига, инерция вращения и некоторые другие факторы того же асимптотического порядка. Теории, в которых учет деформации сдвига и инерции вращения производится на основе физических гипотез [5, 6 и др.] (достаточно полную библиографию по этому вопросу можно найти, например, в [7, 8]), далее будем называть инженерными ТР теориями.

Замечание. Результаты [4] относятся к статике. В динамике в общем случае вместо асимптотических теорий $[O(\eta^{2-2q})=0]$ и $[O(\eta^{4-4q})=0]$ следовало бы говорить об асимптотических теориях $[O(\eta^{2-2q}+\eta^{2-2a})=0]$ и $[O(\eta^{4-4q}+\eta^{4-4a})=0]$ (a — показатель динамичности, см. п. 2). Далее рассматривается класс поверхностных нагрузок, для которого заведомо выполняется требование $q\geqslant a$.

Краевые интегралы в общей асимптотической теории оболочек играют двоякую роль. Во-первых, они позволяют приближенно построить НДС оболочки на сечениях, проходящих вдоль линий искажения, т. е. решить задачу, лежащую вне области достижимости двумерных теорий. Во-вторых, на основе изучения взаимодействия внутреннего НДС оболочки с погранслоем можно в принципе с любой степенью точности формулировать граничные условия, которые должны учитываться в двумерных теориях оболочек, и оценивать погрешности, связанные с их приближенной формулировкой. Обсуждению последнего вопроса посвящен п. 4.

2. Будем строить асимптотическую теорию изгиба изотропных пластин $[O(\eta^{4-4q})=0]$. Определим положение точек пластины в трехмерном пространстве радиус-вектором $\mathbf{R}=\mathbf{r}(x^1, x^2)+x^3\mathbf{n}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор срединной плоскости S, $\mathbf{n}$ — единичный вектор ее нормали, (x^1, x^2) — параметры криволинейных координат на S, а x^3 — расстояние, отсчитываемое от S по нормали. Обозначим через $a_{\alpha\beta}$ метрический тензор срединной плоскости S (здесь и в дальнейшем принимается, что греческие индексы могут иметь значения 1, 2), через σ^{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ — тензор напряжений и зададим вектор смещений упругой среды $\mathbf{u}$ формулой $\mathbf{u}=u^\alpha\mathbf{r}_\alpha+w\mathbf{n}$.

Тогда трехмерные динамические уравнения теории упругости запишутся так: уравнения движения

$$\begin{gathered}\nabla_\alpha\sigma^{\alpha\beta}+\partial\sigma^{3\beta}/\partial x^3-\rho\partial^2u^\beta/\partial t^2=0\\ \nabla_\alpha\sigma^{3\alpha}+\partial\sigma^{33}/\partial x^3-\rho\partial^2w/\partial t^2=0\end{gathered}\tag{2.1}$$

формулы «перемещения-напряжения»

$$\begin{gathered}E\partial w/\partial x^3=\sigma^{33}-\nu a_{\lambda\mu}\sigma^{\lambda\mu}\\ E(\nabla_\alpha w+\partial u_\alpha/\partial x^3)=2(1+\nu)a_{\lambda\alpha}\sigma^{3\lambda}\\ Ee_{\alpha\beta}=(1+\nu)\sigma_{\alpha\beta}-\nu a_{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\sigma_{\lambda\mu}-\nu a_{\alpha\beta}\sigma^{33}\\ e_{\alpha\beta}={}^1/_2(\nabla_\beta u_\alpha+\nabla_\alpha u_\beta)\end{gathered}\tag{2.2}$$

(∇_α — символ ковариантного дифференцирования, ρ — плотность материала пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона). Кроме того, будем учитывать лицевые условия

$$\sigma^{33}|_{x^3=\pm h}=\pm Q^3,\quad \sigma^{3\alpha}|_{x^3=\pm h}=Q^\alpha\tag{2.3}$$

в которых Q^α, Q^3 — тензоры тангенциальной и нормальной поверхностной нагрузки.

Замечание. В (2.3) считается, что внешние распределенные силы приложены к обеим лицевым плоскостям таким образом, чтобы НДС изгиба точно отделилось от обобщенного плоского НДС.

Следуя схеме асимптотического подхода [4], выполним преобразование растяжения масштабов независимых переменных по формулам $(c_s=(E/\rho)^{1/2})$

$$x^\alpha=R\eta^q\xi^\alpha,\quad x^3=R\eta\zeta,\quad t=Rc_s^{-1}\eta^a\tau\tag{2.4}$$

и примем

Предположение 2.1. Дифференцирование любой кратности по переменным ξ^α, ζ, τ не меняет асимптотического порядка искомых величин.

Тогда числа q и a будут иметь следующий физический смысл: q — показатель изменяемости искомого НДС по переменным x^α, a — показатель динамичности, т. е. асимптотическая характеристика скорости протекания во времени рассматриваемых процессов (см., например, [9]).

Введем кроме того безразмерные перемещения и напряжения при помощи формул

$$w=Rw^*,\ u_\alpha=R\eta^{1-q}u_\alpha^* \tag{2.5}$$

$$\sigma^{\alpha\beta}=E\eta^{1-2q}\sigma_*^{\alpha\beta},\ \sigma^{3\alpha}=E\eta^{2-3q}\sigma_*^{3\alpha},\ \sigma^{33}=E\eta^{3-4q}\sigma_*^{33}$$

и примем

Предположение 2.2. Все величины, отмеченные звездочкой (она ставится там, где нет индексов иного смысла), имеют одинаковый асимптотический порядок.

Замечание. Формулами (2.4), (2.5) определяются асимптотические свойства НДС пластины, работающей на изгиб. Они согласуются с привычными представлениями о ее НДС. Однако (2.4), (2.5) не являются математическим эквивалентом некоторых физических гипотез. Их можно было вывести и формально математически, но это заняло бы слишком много места. Есть, кроме того, возможность проверить правильность соотношений (2.4), (2.5) à posteriori: они используются в сочетании с предположениями 2.1 и 2.2 и можно удостовериться, что интегралы приближенных уравнений, вытекающих из (2.4), (2.5), при определенных обстоятельствах такими свойствами действительно обладают. Точнее, выясняется, что постулированными свойствами обладает некоторая часть интегралов, которая имеет достаточную общность для решения краевых задач, встречающихся в приложениях. В асимптотической теории $[O(\eta^{4-4q})=0]$, как будет показано, появляются и «лишние» интегралы (не обладающие предположенными асимптотическими свойствами). Они, вообще говоря, даже приближенно не описывают упругие явления, происходящие в оболочке, и целесообразно ставить вопрос о возможности их устранения, к чему еще предстоит вернуться.

Перепишем теперь уравнения движения (2.1), формулы «перемещения-напряжения» (2.2) с учетом (2.4), (2.5):

$$\begin{gathered}\partial\sigma_*^{3\beta}/\partial\zeta=-\nabla_\alpha^*\sigma_*^{\alpha\beta}+\eta^{2q-2a}\partial^2u_*^\beta/\partial\tau^2\\ \partial\sigma_*^{33}/\partial\zeta=-\nabla_\alpha^*\sigma_*^{3\alpha}+\eta^{4q-2a-2}\partial^2w^*/\partial\tau^2\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}\partial w^*/\partial\zeta=\eta^{4-4q}\sigma_*^{33}-\nu\eta^{2-2q}a_{\lambda\mu}\sigma_*^{\lambda\mu}\\ \partial u_\alpha^*/\partial\zeta=-\nabla_\alpha^*w^*+2(1+\nu)\eta^{2-2q}a_{\lambda\alpha}\sigma_*^{3\lambda}\\ \sigma_*^{\alpha\beta}=\frac{1}{1-\nu^2}\{(1-\nu)e_*^{\alpha\beta}+\nu a^{\alpha\beta}a_{\lambda\mu}e_*^{\lambda\mu}\}+\frac{\nu}{1-\nu}\eta^{2-2q}a^{\alpha\beta}\sigma_*^{33}\\ e_{\alpha\beta}^*={}^1/_2(\nabla_\beta^*u_\alpha^*+\nabla_\alpha^*u_\beta^*)\end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь $\nabla_\alpha^*=R\eta^q\nabla_\alpha$. Этот оператор, так же как и операторы $\partial/\partial\xi^1$, $\partial/\partial\xi^2$, не изменяет асимптотического порядка искомых величин.

Примем, что показатели q и a подчиняются неравенствам

$$q<1,\ a\leqslant 2q-1 \tag{2.8}$$

Первое из них представляет собой хорошо известное в двумерных теориях пластин и оболочек ограничение сверху для показателя изменяемости искомого НДС. Из результатов [9] вытекает, что при установившихся колебаниях, порождаемых краевыми воздействиями, второе неравенство (2.8) всегда выполняется (случай $a=2q-1$ соответствует свободным изгибным колебаниям). Если колебания вызваны поверхностными нагрузками, то оно может и нарушиться. Соответствующие обобщения выходят за рамки статьи.

Заметим, что из (2.8) следует упоминавшееся уже неравенство $q\geqslant a$.

Оно означает, что если можно отбрасывать величины вида $O(\eta^{\lambda-\mu q})$, то допустимо отбрасывание и величин вида $O(\eta^{\lambda-\mu a})$. Кроме того, легко убедиться, что в (2.6), (2.7) при выполнении неравенств (2.8) все степени η — неотрицательны.

Класс решений уравнений (2.6), (2.7), удовлетворяющих лицевым условиям (2.3), при выполнении неравенств (2.8) с требуемой точностью $[O(\eta^{4-4q})=0]$ можно задать формулами

$$w^*=w^{(0)}+\zeta^2\eta^{2-2q}w^{(2)},\quad u_\alpha{}^*=\zeta u_\alpha{}^{(1)}+\zeta^3\eta^{2-2q}u_\alpha{}^{(3)} \tag{2.9}$$

$$e_*{}^{\alpha\beta}=\zeta e^{\alpha\beta}_{(1)}+\zeta^3\eta^{2-2q}e^{\alpha\beta}_{(3)},\quad \sigma_*{}^{\alpha\beta}=\zeta\sigma^{\alpha\beta}_{(1)}+\zeta^3\eta^{2-2q}\sigma^{\alpha\beta}_{(3)}$$

$$\sigma_*{}^{3\beta}=\sigma^{3\beta}_{(0)}+\zeta^2\sigma^{3\beta}_{(2)}+\zeta^4\eta^{2-2q}\sigma^{3\beta}_{(4)},\quad \sigma_*{}^{33}=\zeta\sigma^{33}_{(1)}+\zeta^3\sigma^{33}_{(3)}+\zeta^5\eta^{2-2q}\sigma^{33}_{(5)} \tag{2.10}$$

$$u_\alpha^{(1)}=-\nabla_\alpha{}^*w^{(0)}+2(1+\nu)\eta^{2-2q}a_{\lambda\alpha}\sigma^{3\lambda}_{(0)}$$

$$e_{\alpha\beta}^{(1)}={}^1/_2(\nabla_\beta{}^*u_\alpha^{(1)}+\nabla_\alpha{}^*u_\beta^{(1)})$$

$$\sigma^{\alpha\beta}_{(1)}=\frac{1}{1-\nu^2}[(1-\nu)e^{\alpha\beta}_{(1)}+\nu a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}e^{\lambda\mu}_{(1)}]+\frac{\nu}{1-\nu}\eta^{2-2q}a^{\alpha\beta}\sigma^{33}_{(1)}$$

$$\sigma^{3\beta}_{(2)}=-{}^1/_2\nabla_\alpha{}^*\sigma^{\alpha\beta}_{(1)}+{}^1/_2\eta^{2q-2a}\partial^2u^{\beta}_{(1)}/\partial\tau^2$$

$$\sigma^{3\beta}_{(0)}=-\sigma^{3\beta}_{(2)}-\eta^{2-2q}\sigma^{3\beta}_{(4)}+E^{-1}\eta^{3q-2}Q^\beta$$

$$\sigma^{33}_{(1)}=-\nabla_\alpha{}^*\sigma^{3\alpha}_{(0)}+\eta^{4q-2a-2}\partial^2w^{(0)}/\partial\tau^2$$

$$\sigma^{33}_{(3)}=-{}^1/_3\nabla_\alpha{}^*\sigma^{3\alpha}_{(2)}+{}^1/_3\eta^{2q-2a}\partial^2w^{(2)}/\partial\tau^2$$

$$\sigma^{33}_{(1)}+\sigma^{33}_{(3)}+\eta^{2-2q}\sigma^{33}_{(5)}=(1/E)\eta^{4q-3}Q^3 \tag{2.11}$$

$$w^{(2)}=-{}^1/_2\nu a_{\lambda\mu}\sigma^{\lambda\mu}_{(1)},\quad u_\alpha^{(3)}=-{}^1/_3\nabla_\alpha{}^*w^{(2)}+{}^2/_3(1+\nu)a_{\lambda\alpha}\sigma^{3\lambda}_{(2)} \tag{2.12}$$

$$e_{\alpha\beta}^{(3)}={}^1/_2(\nabla_\beta{}^*u_\alpha^{(3)}+\nabla_\alpha{}^*u_\beta^{(3)})$$

$$\sigma^{\alpha\beta}_{(3)}=\frac{1}{1-\nu^2}[(1-\nu)e^{\alpha\beta}_{(3)}+\nu a^{\alpha\beta}a_{\lambda\mu}e^{\lambda\mu}_{(3)}]+\frac{\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}\sigma^{33}_{(3)}$$

$$\sigma^{3\beta}_{(4)}=-{}^1/_4\nabla_\alpha{}^*\sigma^{\alpha\beta}_{(3)},\quad \sigma^{33}_{(5)}=-{}^1/_5\nabla_\alpha{}^*\sigma^{3\alpha}_{(4)}$$

Здесь зависимость искомых величин от переменной ζ выписана явно, а величины, отмеченные дополнительным числовым индексом в скобках, являются функциями переменных ξ^1, ξ^2, τ или, что то же, переменных x^1, x^2, t. Чтобы проверить высказанное утверждение, надо подставить соотношения (2.9)—(2.12) в уравнения (2.6), (2.7), а также в лицевые условия (2.3) и всюду в выкладках отбрасывать величины порядка $O(\eta^{4-4q})$ по сравнению с единицей.

Исходя из соотношений (2.10)—(2.12), можно вывести систему двумерных дифференциальных уравнений асимптотических теорий изгиба пластин как с точностью $[O(\eta^{2-2q})=0]$, так и с точностью $[O(\eta^{4-4q})=0]$.

Первая из них получается в результате отбрасывания в (2.10)—(2.11) слагаемых с множителями η^{2-2q}, η^{2q-2a}. Тогда, беря равенства (2.10) в том порядке, как они здесь записаны, можно последовательно выразить величины

$$u_\alpha^{(1)},\ e_{\alpha\beta}^{(1)},\ \sigma^{\alpha\beta}_{(1)},\ \sigma^{3\beta}_{(2)},\ \sigma^{3\beta}_{(0)},\ \sigma^{33}_{(1)},\ \sigma^{33}_{(3)} \tag{2.13}$$

через $w^{(0)}$ и через компоненты Q^β внешней поверхностной нагрузки. Подстановка полученных результатов в (2.11) приводит после громоздких, но элементарных выкладок, для $w^{(0)}$ к классическому дифференциальному уравнению Кирхгофа. Далее, если считать, что $w^{(0)}$ известно, можно найти напряжения и перемещения трехмерной пластины, подставив величины (2.13) в формулы (2.9), в которых, конечно, также должны быть отброшены слагаемые с множителями η^{2-2q}. Это значит, что асимптотическая теория изгиба пластин $[O(\eta^{2-2q})=0]$ адекватна классической теории Кирхгофа. В [4] показана справедливость и более общего результата: асимптотическая теория оболочек $[O(\eta^{2-2q})=0]$, названная в п. 1 КЛ теорией, адекватна несущественно модифицированной двумерной теории, построенной с предположениями типа гипотез Кирхгофа — Лява.

Асимптотическую теорию изгиба пластин $[O(\eta^{4-4q})=0]$ можно на базе равенств (2.10)—(2.12) построить при помощи следующего итерационного подхода.

Выразим величины (2.13) с точностью $[O(\eta^{2-2q})=0]$ через $w^{(0)}$, Q^{β}, как описано выше, при помощи формул (2.10), упрощенных за счет отбрасывания членов порядка $O(\eta^{2-2q})$ по сравнению с единицей. Затем по формулам (2.12) выразим через $w^{(0)}$, Q^{β} последовательно величины

$$w^{(2)}, \overset{(3)}{u_{\alpha}}, \overset{(3)}{e_{\alpha\beta}}, \overset{\alpha\beta}{\sigma_{(3)}}, \overset{3\beta}{\sigma_{(4)}}, \overset{33}{\sigma_{(5)}} \qquad (2.14)$$

Далее построим поправку вида $O(\eta^{2-2q})$ для величин (2.13), заменив в определяющих их формулах (2.10) отброшенные ранее величины $\overset{3\beta}{\sigma_{(0)}}$, $\overset{33}{\sigma_{(1)}}$, $\overset{3\beta}{\sigma_{(4)}}$, $\overset{(1)}{u_{\alpha}}$, $w^{(2)}$ их приближенными выражениями по формулам (2.10), (2.12). В результате величины (2.13) и (2.14) выразятся через $w^{(0)}$, Q^{β} соответственно с точностью $[O(\eta^{4-4q})=0]$ и $[O(\eta^{2-2q})=0]$. Подставив соответствующие выражения в неупрощенное равенство (2.11), получим с точностью $[O(\eta^{4-4q})=0]$ уравнение для $w^{(0)}$. Оно в исходных независимых переменных x^{α}, t записывается в виде

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[1+h^2\frac{8-3\nu}{10(1-\nu)}\Delta\right]\Delta^2W+2\rho h\left[1+h^2\frac{\nu-2}{6(1-\nu)}\Delta\right]\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-$$
$$-2h\left[1+h^2\frac{2-\nu}{3(1-\nu)}\Delta\right]\nabla_{\lambda}Q^{\lambda}-2Q^3=0 \qquad (2.15)$$

Здесь $W=w|_{x^3=0}=Rw^{(0)}$, а Δ — оператор Лапласа в метрике срединной поверхности ($\Delta=a^{\lambda\mu}\nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}$).

Равенство (2.15) заслуживает названия разрешающего уравнения двумерной теории изгиба пластин $[O(\eta^{4-4q})=0]$. Каждое его решение определяет перемещения и напряжения в трехмерной области, занимаемой пластиной, по неупрощенным (с сохранением членов, имеющих множитель η^{2-2q}) формулам (2.9). В них коэффициентами при всех степенях ζ являются величины (2.13), (2.14), которые можно считать известными. Это вытекает из описанного выше процесса построения уравнения (2.15). Соответствующие формулы, выражающие величины (2.13), (2.14), строятся элементарно, но они слишком громоздки, чтобы привести их здесь.

Для удобства сравнения асимптотической ТР теории с инженерными ТР теориями, получаемыми, исходя из гипотез, введем усилия, моменты, перемещения и упругие углы поворота при помощи следующих формул:

Тензор моментов

$$M^{\alpha\beta}=\int_{-h}^{+h}\sigma^{\alpha\beta}x^3\,dx^3={}^2/_3ER^2\eta^{3-2q}(\overset{\alpha\beta}{\sigma_{(1)}}+{}^3/_5\eta^{2-2q}\overset{\alpha\beta}{\sigma_{(3)}}) \qquad (2.16)$$

Тензор перерезывающих усилий

$$N^{\alpha}=\int_{-h}^{+h}\sigma^{3\alpha}\,dx^3=2ER\eta^{3-3q}(\overset{3\alpha}{\sigma_{(0)}}+{}^1/_3\overset{3\alpha}{\sigma_{(2)}}+{}^1/_5\eta^{2-2q}\overset{3\alpha}{\sigma_{(4)}}) \qquad (2.17)$$

Прогиб и тензор углов поворота

$$W=w|_{x^3=0}=Rw^{(0)},\quad \theta_\alpha=(\partial u_\alpha/\partial x^3)_{x^3=0}=\eta^{-q}u_\alpha^{(1)}. \qquad (2.18)$$

Используя величины (2.16)–(2.18), формулы (2.10)–(2.12) асимптотической ТР теории изгиба пластин можно преобразовать к виду, сходному с обычными соотношениями инженерных ТР теорий, и записать так

Уравнения движения

$$\nabla_\lambda N^\lambda=-2Q^3+2\rho h\partial^2W/\partial t^2+\nu(3-3\nu)^{-1}\rho h^3(\partial^2/\partial t^2)\Delta W$$

$$\nabla_\alpha M^{\beta\alpha}-N^\beta+2hQ^\beta-{}^2/_3h^3\rho\partial^2\theta^\beta/\partial t^2=0 \qquad (2.19)$$

Соотношения «усилия, моменты — прогиб, углы поворота»

$$M^{\alpha\beta}={}^2/_3Eh^3\left(\frac{1}{1-\nu^2}\left\{\frac{1-\nu}{2}(\nabla^\beta\theta^\alpha+\nabla^\alpha\theta^\beta)+\nu a^{\alpha\beta}\nabla_\lambda\theta^\lambda\right\}-\right.$$

$$-\frac{h^2}{10(1-\nu^2)}\left[\nabla^\alpha\nabla^\beta\nabla_\lambda\theta^\lambda+\frac{1-\nu}{2}\Delta(\nabla^\alpha\theta^\beta+\nabla^\beta\theta^\alpha)+\frac{\nu(8-3\nu)}{3(1-\nu)}a^{\alpha\beta}\Delta\nabla_\lambda\theta^\lambda\right]+$$

$$\left.+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{Eh}a^{\alpha\beta}Q^3\right)$$

$$N^\alpha=\frac{2Eh}{3(1+\nu)}(\theta^\alpha+\nabla^\alpha W)+{}^2/_3hQ^\alpha \qquad (2.20)$$

3. Обсудим результаты п. 2. В задаче об изгибе пластины асимптотические теории $[O(\eta^{2-2q})=0]$ и $[O(\eta^{4-4q})=0]$ различаются тем, что во второй из них в соотношениях (2.9)–(2.11) учитываются слагаемые с множителями η^{2-2q}, η^{2q-2a}. Из них только слагаемые в первом и четвертом равенствах (2.10) отвечают учету деформации поперечного сдвига и инерции вращения. Остальные слагаемые имеют тот же порядок, но в инженерных ТР теориях обычно не учитываются. Отсюда следует, что учет деформаций поперечного сдвига и инерции вращения, произведенный изолированно от других уточнений, в теории изгиба пластин асимптотически непоследователен. Аналогичный вывод для общей статической теории оболочек получен в [10].

Из рассуждений п. 2 следует, что для исследования изгиба пластин ни в теории Кирхгофа, ни в асимптотической ТР теории, строго говоря, нет необходимости вводить такие двумерные величины как усилия и моменты, а также перемещения и углы поворота срединной плоскости. Асимптотический подход позволяет сразу получать трехмерные характеристики искомого НДС при помощи формул (2.5), (2.9), оставляя в сущности неизменным математический аппарат их построения. В теории Кирхгофа эта деталь несущественна: переход от двумерных к трехмерным величинам в данном случае совершенно элементарен. В асимптотической ТР теории обсуждаемая замена представляется менее оправданной, так как знания усилий N^α и моментов $M^{\alpha\beta}$ в рамках принятой точности $[O(\eta^{4-4q})=0]$ недостаточно, чтобы найти напряжения. Нужна дополнительная (хотя и несложная) работа, чтобы вернуться к напряжениям, от которых предлагалось избавиться ради соблюдения традиций. Равным образом знания прогиба W срединной плоскости еще недостаточно, чтобы определить с требуемой точностью более важные величины — прогибы на лицевых поверхностях. Из первой формулы (2.9) видно, что для этого надо использовать первую формулу (2.12).

Обратимся к уравнению (2.15). Оно отличается от классического разрешающего уравнения теории изгиба пластин, т. е. от равенства

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta^2W+2\rho h\frac{\partial^2W}{\partial t^2}-2Q^3-2h\nabla_\lambda Q^\lambda=0 \qquad (3.1)$$

только слагаемыми с множителем h^2 в квадратных скобках. Все они, как и следовало ожидать, соответствуют учету членов порядка $O(\eta^{2-2q})$ по сравнению с единицей и играют двоякую роль. Во-первых, они позволяют уточнить решения уравнения Кирхгофа (3.1) и, во-вторых, определяют дополнительные решения, так как учет слагаемого с h^2 в первой квадратной скобке равенства (2.15) приводит к повышению порядка разрешающего уравнения теории изгиба пластин с четвертого до шестого. Легко убедиться, что дополнительные интегралы имеют показатель изменяемости $q=1$. Это означает нарушение требования, выраженного первым неравенством (2.8) и существенно используемого при асимптотическом построении теории изгиба пластин. Таким образом, повышение порядка дифференциальных уравнений, характерное для теорий, учитывающих деформацию поперечного сдвига и инерцию вращения, сопровождается появлением «лишних» интегралов, о которых говорилось во втором замечании п. 2. От них можно избавиться, не выходя за рамки принятой точности $[O(\eta^{4-4q})=0]$, следующим образом.

Произведем дифференциальную операцию Δ над равенством (3.1), найдем из полученного уравнения выражение для $\Delta^3 W$ и подставим его в первую квадратную скобку левой части равенства (2.15). Получим более последовательное с математической точки зрения разрешающее уравнение теории изгиба пластин

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta^2 W+2\rho h\left[1+h^2\frac{7\nu-17}{15(1-\nu)}\Delta\right]\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-2\left[1-h^2\frac{8-3\nu}{10(1-\nu)}\Delta\right]Q^3-$$

$$-2h\left[1-h^2\frac{4+\nu}{30(1-\nu)}\Delta\right]\nabla_\lambda Q^\lambda=0 \qquad (3.2)$$

Оно четвертого порядка и составлено, как легко проверить, с такой же как и уравнение (2.15) точностью $[O(\eta^{4-4q})=0]$.

Для случая статического изгиба под действием поперечной нагрузки ($Q^\alpha=\partial/\partial t=0$) (3.2) совпадает с разрешающим уравнением работ [11, 12], а в задачах о свободных колебаниях ($Q^\alpha=Q^3=0$) — с разрешающим уравнением, полученным вариационным методом в [13] [1]. Следует также отметить, что при свободных колебаниях разрешающее уравнение инженерных ТР теорий, получаемых на основе гипотез [7], может быть преобразовано к виду (3.2), если положить коэффициент сдвига k^2 равным $5/(6-\nu)$.[2]

В [14] показано, что интегралы уравнения вида (2.15) с показателем изменяемости $q=1$ не могут дать адекватного описания быстро меняющихся статических НДС пластины не только с математической, но и с физической точки зрения. Теории, учитывающие деформацию поперечного сдвига, базируются на гипотезе о простейших (линейном и параболическом) законах изменения напряжений по толщине пластины. Они вполне правдоподобны для НДС, возникающих вдали от краев. Но на краях, где только и должны учитываться дополнительные быстро меняющиеся интегралы, такая гипотеза может оправдаться лишь при весьма благоприятном стечении обстоятельств: например, в простейших трехмерных задачах, используемых для числовых проверок [11].

4. Остановимся на граничных условиях в двумерных теориях оболочек. Их можно трактовать по-разному в зависимости от принципов построения соответствующих теорий. В классической теории Кирхгофа — Лява и в инженерных ТР теориях их формулировка часто связывается с двумерными вариационными принципами. При этом используются предположения, что усилия работают на перемещениях срединной поверхности, а моменты — на углах поворота. Это приводит к погрешностям, которые, как показано в [4], соизмеримы с погрешностями гипотез Кирхгофа — Лява.

Назовем так полученные граничные условия вариационными и отметим, что их число соответствует порядку тех дифференциальных уравне-

[1] В этой статье даны также ссылки на другие работы, разрешающие уравнения которых после устранения в них неточностей принимают такой же вид.
[2] Такое значение коэффициента сдвига первым, по-видимому, предложил П. А. Жилин (см. *Жилин П. А.* Теория простых оболочек и ее приложения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук, Л., ЛПИ им. М. И. Калинина, 1983. 32 с.).

ний, для которых они выставляются. Так например, для теории Кирхгофа и инженерных ТР теорий изгиба пластин соответственно получается два и три граничных условия.

В асимптотических теориях граничные условия для дифференциальных уравнений внутреннего НДС получаются как требования, обеспечивающие экспоненциальное затухание погранслоя [4]. Их можно составлять с большей или меньшей точностью. При точности $[O(\eta^{1-q})=0]$ так составленные граничные условия названы в [4] каноническими и совпадают с вариационными условиями классической теории Кирхгофа — Лява. При точности $[O(\eta^{2-2q})=0]$ получаются так называемые приведенные граничные условия. В теории изгиба пластин, например, для свободного края, проходящего вдоль α_1-линии, они записываются в виде (в обозначениях [4]):

$$N_1+\frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_2}=0, \qquad G_1+3D\frac{h}{A_2}\frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_2}\equiv G_1+O(\eta^{1-q})=0 \tag{4.1}$$

Входящий сюда коэффициент $3D$ найден в [15] из решения антиплоской задачи в полуполосе и выражается так

$$3D=\frac{384}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5}\approx 1{,}260091 \tag{4.2}$$

Сравним два изложенных подхода к формулировке граничных условий в теории изгиба пластин. Как известно [16], уравнения инженерных ТР теорий представимы в виде системы, состоящей из классического уравнения Кирхгофа, определяющего внутреннее НДС, и уравнения для определения краевого НДС. При коэффициенте сдвига $k^2={}^5/_6$ оно имеет вид

$$h^2\Delta\psi-10\psi=0 \tag{4.3}$$

Вариационные граничные условия также допускают асимптотическое преобразование, позволяющее выделить из них два условия, которые надо учитывать при построении внутреннего НДС пластины. Это преобразование было предложено в [11, 17] для изотропной, а в [18] — для ортотропной пластины. Назовем так полученные два граничных условия внутренними и сравним их с приведенными граничными условиями.

И те и другие выражаются равенствами вида (4.1) и отличаются от канонических условий в слагаемых порядка $O(\eta^{1-q})$, но, строго говоря, они асимптотически не эквивалентны друг другу. Это связано с тем, что смысл входящего в них коэффициента $3D$ различен. В приведенных граничных условиях он получается в результате решения антиплоской задачи теории упругости и выражается числовым рядом (4.2), а для внутренних граничных условий $3D$ получается в процессе упомянутого асимптотического преобразования граничных условий и выражается формулой $3D=0{,}4\cdot 10^{1/2}\approx 1{,}264911$ $(k^2={}^5/_6)$. Для жестко заделанного края в [11] показано, что обсуждаемые поправки имеют вид $O(\eta^{2-2q})$ для внутренних граничных условий и $O(\eta^{1-q})$ для приведенных. Вместе с тем надо отметить, что выявившееся асимптотическое несоответствие практически несущественно. Для свободного края это следует из почти полного совпадения значений коэффициента $3D$. Вычисления также показывают, что на жестко заделанном крае в приведенных граничных условиях при поправках $O(\eta^{1-q})$ стоят малые по сравнению с единицей коэффициенты (физическое объяснение этого обстоятельства дано в [19]).

Таким образом, использование при решении статических краевых задач изгиба пластин двух схем: схемы «уравнение Кирхгофа плюс приведенные граничные условия» с одной стороны и схемы «уравнение инженерных ТР теорий плюс три граничных условия» с другой — должно вдали от краев приводить к близким численным результатам. Следовательно, возникающая в инженерных ТР теориях возможность выполнить не два, а три граничных условия не дает выигрыша в точности. Преимущество инженерных ТР теорий можно видеть лишь в том, что они имеют вариационную формулировку, тогда как дать вариационную формулировку краевых задач, решаемых по схеме «уравнения КЛ теории плюс приведенные граничные условия», не удается (это показано в [20] для случая свободного края). Однако далеко не очевидно, что такое преимущество оправдывает дополнительные сложности, связанные с переходом от КЛ теории к инженерным ТР теориям. Подробнее об этом см. [21].

5. Будем считать, что в дифференциальных уравнениях асимптотической ТР теории удалось исключить «лишний» интеграл, и, следовательно, их порядок не превышает порядка дифференциальных уравнений КЛ теории. Для изгиба пластин разрешающее уравнение асимптотической ТР теории четвертого порядка имеет вид (3.2).

Из вышеприведенных рассуждений вытекает, что точность $[O(\eta^{1-q})=0]$ канонических граничных условий, так же как и точность $[O(\eta^{2-2q})=0]$ приведенных граничных условий, уступает точности $[O(\eta^{4-4q})=0]$ дифференциальных уравнений асимптотической ТР теории. Это значит, что обоснованное уточнение двумерной теории оболочек должно предусматривать уточнение не только дифференциальных уравнений (этому посвящено множество работ), но и уточнение граничных условий (этому почти не уделялось внимания). Таким требованиям для асимптотической ТР теории не отвечают ни канонические, ни приведенные граничные условия, а устранение этого несоответствия, т. е. построение граничных условий с точностью $[O(\eta^{4-4q})=0]$, слишком сложно и пока не осуществлено. В связи со сказанным возникает необходимость прояснить вопрос о влиянии указанного несоответствия точности дифференциальных уравнений и граничных условий на общую погрешность решения статических и динамических краевых задач теории оболочек.

В [22] показано, что для статических задач теории оболочек и пластин дифференциальные уравнения, составленные с точностью $[O(\eta^{\rho'})=0]$, т. е. с отбрасыванием в выкладках величин вида $O(\eta^{\rho'})$, приводят в их решениях также к погрешностям вида $\varepsilon'=O(\eta^{\rho'})$. Равным образом естественно принять, что использование граничных условий, составленных с точностью $[O(\eta^{\rho''})=0]$, приводит к погрешностям вида $\varepsilon''=O(\eta^{\rho''})$. Тогда приходится сделать вывод, что для решения статических задач с каноническими или приведенными граничными условиями использование асимптотической ТР теории является неоправданным, так как всегда справедливо неравенство $\rho''<\rho'$ и, вообще говоря, уточнение уравнений будет сведено на нет погрешностями в граничных условиях.

Если речь идет о динамических задачах, то, как показано в [22, 23], дифференциальные уравнения, выведенные с точностью $[O(\eta^{\rho'})=0]$, ведут в их решениях к более высокой погрешности вида $\varepsilon'=O(\eta^{\rho'-q})$, в то время как погрешности от граничных условий, составленных с точностью $[O(\eta^{\rho''})=0]$, и в этом случае по-прежнему имеют порядок $\varepsilon''=O(\eta^{\rho''})$. Таким образом, для задач о динамических НДС при достаточно больших q повышение точности дифференциальных уравнений теории оболочек может привести и к повышению точности решения краевых задач. Для этого надо потребовать выполнения неравенства $\rho'-q<\rho''$. Это, например, дает при использовании канонических граничных условий для КЛ теории ($\rho'=2-2q$, $\rho''=1-q$) и для асимптотической ТР теории ($\rho'=4-4q$, $\rho''=1-q$) соответственно следующие неравенства

$$q>{}^1/_2, \quad q>{}^3/_4 \tag{5.1}$$

Ими для КЛ теории и асимптотической ТР теории соответственно задаются области значений показателя изменяемости q, в которых для задач построения динамических НДС окончательная погрешность определяется точностью дифференциальных уравнений.

Область применимости любой двумерной теории оболочек и пластин определяется неравенством $q<1$. Оно устанавливает верхнюю границу допустимых значений показателя изменяемости. Для статических задач этим неравенством устанавливается верхняя граница применимости как КЛ, так и асимптотической ТР теорий. В задачах о динамических НДС ограничения, накладываемые на q, становятся более сильными: надо потребовать положительности числа $\rho'-q$ [22, 23]. Это дает

$$q<{}^2/_3, \quad q<{}^4/_5 \tag{5.2}$$

соответственно для КЛ теории и асимптотической ТР теории.

Таким образом, асимптотическая ТР теория в задачах динамики обладает по сравнению с КЛ теорией весьма существенным преимуществом: она имеет более широкую область применимости. Это преимущество позволяет рассматривать колебания при более высоких частотах в стационарных задачах и подходить ближе к фронтам волн в нестационарных.

Однако добиться расширения области применимости КЛ теории до верхней границы, задаваемой вторым неравенством (5.2), можно значительно проще, чем предусматривает асимптотическая ТР теория. В случае изгиба пластин для этого достаточно внести члены порядка $O(\eta^{2-2q})$ в однородное ($Q^\alpha=Q^3=0$, $a=2q-1$) разрешающее уравнение теории Кирхгофа. Этому соответствует замена в (3.1) инерционного члена $2\rho h\partial^2W/\partial t^2$ на оператор приведенной нормальной инерции

$$I_{nt}W=2\rho h\{1+h^2(7\nu-17)[15(1-\nu)]^{-1}\Delta\}\partial^2W/\partial t^2 \tag{5.3}$$

Однородное разрешающее уравнение теории Кирхгофа с учетом указанной подстановки совпадает с однородным разрешающим уравнением асимптотической ТР теории. Этим ограничиваются изменения, вносимые в соотношения теории Кирхгофа. Все входящие в (2.9)—(2.12) асимптотически малые члены с множителями η^{2-2q}, η^{2q-2a} равно, как и вторые слагаемые в квадратных скобках в выражениях, стоящих множителями перед Q^3 и $\nabla_\lambda Q^\lambda$ в (3.2), при этом могут быть отброшены.

Кратко остановимся на обосновании предложенного подхода. С этой целью укажем источник погрешности, ведущей к сужению области применимости КЛ теории в задачах динамики. В [22, 23] применительно к оболочкам установлено, что первое ограничение (5.2) связано с погрешностью определения распространяющихся мод колебаний (частных решений однородных уравнений движения, которые соответствуют НДС, охватывающим всю конструкцию). Подобная ситуация, разумеется, имеет место и при изгибе пластин. Проиллюстрируем это на примере одномерной стационарной задачи для полосы длиной R. Положим в (3.1) $\partial/\partial t=-i\omega$, $Q^\alpha=Q^3=\partial/\partial x^2=0$ и учтем, что при его составлении были отброшены члены порядка $O(\eta^{2-2q})$ по сравнению с единицей. Тогда распространяющиеся моды при $q<1$ имеют вид ($a=2q-1$):

$$\exp(\pm i\eta^{-q}\omega_1{}^{1/2}[1+O(\eta^{2-2q})]x^1/R) \tag{5.4}$$

$$\omega_1=\eta^a(\omega R/c_s)[3(1-\nu^2)]^{1/2} \quad (\omega_1\sim\eta^0)$$

Потребуем, чтобы моды (5.4) могли определяться из уравнения (3.1) на всей длине полосы, т. е. при $x^1/R\sim\eta^0$. Тогда из (5.4) сразу же вытекает, что пренебречь O — членом в показателе экспоненты можно только в случае выполнения первого неравенства (5.2).

Погрешность определения распространяющихся мод колебаний является единственной причиной сужения области применимости теории пластин Кирхгофа в задачах динамики. Очевидно, что отбрасывание асимптотически второстепенных членов в выражении для поверхностной нагрузки в разрешающем уравнении (3.2) и членов с множителями η^{2-2q}, η^{2q-2a} в (2.9)—(2.12) при восстановлении трехмерного НДС пластины по известному прогибу W ведет к погрешности $O(\eta^{2-2q})$.

На основании проведенных рассуждений можно, по-видимому, дать рациональное объяснение того, что в задачах динамики инженерные ТР теории, получаемые на основании физических гипотез и не являющиеся асимптотически последовательными, как правило, дают лучшие результаты, чем теория Кирхгофа. Это связано с тем, что практически все предлагаемые в инженерных ТР теориях значения коэффициента сдвига k^2 [7, 8] численно близки к значению $k^2=5/(6-\nu)$, при котором, как нетрудно убедиться, разрешающее уравнение инженерных ТР теорий приводится с точностью до асимптотически второстепенных членов к виду (3.1) с учетом замены (5.3). Поэтому область применимости инженерных ТР теорий реально оказывается более широкой, чем у теории Кирхгофа.

6. Из вышесказанного вытекает, что для построения двумерной динамической теории изгиба пластин с более широкой, чем задаваемая вторым неравенством (5.2), областью применимости достаточно произвести уточнение однородного разрешающего уравнения асимптотической ТР теории или, что то же самое, выписать с большей, чем $[O(\eta^{4-4q})=0]$, точностью оператор приведенной нормальной инерции (5.3). Указанное уточнение наиболее просто осуществить на основе символического метода Лурье [24, 25].

Точное разрешающее уравнение динамического изгиба пластин, записанное в символической форме, имеет вид [25] ($\Delta_0=h^2\Delta$, Δ – оператор Лапласа, $\partial_t\equiv hc_2^{-1}(\partial/\partial t)$, $c_2=(E/[2\rho(1+\nu)])^{1/2}$:

$$D_aW=0,\qquad D_a=\partial_t^{-2}\left(\beta^2\Delta_0\cos\alpha\frac{\sin\beta}{\beta}-\gamma^4\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\beta\right)\tag{6.1}$$

$$\alpha^2=\Delta_0-\varkappa^2\partial_t^2,\quad \beta^2=\Delta_0-\partial_t^2,\quad \gamma^2=\Delta_0-{}^1/_2\partial_t^2,\quad \varkappa^2=(1-2\nu)/(2-2\nu)$$

Разложим входящие в (6.1) тригонометрические функции, полагая, что выполняется первое неравенство (2.8) и $a=2q-1$. Затем последовательно выражая в символическом операторе D_a (за исключением его главной части) все степени Δ_0 выше первой через ∂_t^{2i}, $\partial_t^{2i}\Delta_0$ ($i=1, 2, \ldots$) аналогично тому, как это было сделано при переходе от (2.15) к (3.2), с точностью $[O(\eta^{(2-2q)(n+1)})=0]$ представим разрешающее уравнение (6.1) в виде

$${}^2/_3Eh^3(1-\nu^2)^{-1}\Delta^2W+I_{nt}W=0\tag{6.2}$$

$$I_{nt}W=2\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{k=0}^{i}\left[\left(\frac{h}{c_2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2k}(a_k+h^2eb_k\Delta)\right]W\tag{6.3}$$

$$e=1-\delta_{ik}(1-l);\quad i=0,1,2,\ldots;\quad l=0,1;\quad n=2i+l$$

Здесь δ_{ik} – символ Кронекера, $a_0=1$, $b_0=(7\nu-17)/[15(1-\nu)]$;

$$a_1=\frac{422-424\nu-33\nu^2}{1050(1-\nu)},\qquad b_1=\frac{32-96\nu+261\nu^2-197\nu^3}{15750(1-\nu)^2},\ldots$$

Для распространяющихся мод стационарных колебаний, происходящих во времени по закону $\exp(-i\omega t)$, $\partial/\partial t=-i\omega$, $\Delta=\omega h^{-1}[3(1-\nu^2)\rho E^{-1}]^{1/2}(1+O(\eta^{2-2q}))$, а оператор (6.3) можно переписать в виде

$$I_{nt}W=-2\rho h\omega^2W\sum_{k=0}^{n}A_k\left(\frac{\omega h}{c_2}\right)^k\tag{6.4}$$

Приведем значения первых четырех коэффициентов A_k

$$A_0=1,\quad A_1=[{}^3/_2(1-\nu)]^{1/2}\frac{17-7\nu}{15(1-\nu)},\quad A_2=\frac{1179-818\nu+409\nu^2}{2100(1-\nu)}$$

$$A_3=[{}^3/_2(1-\nu)]^{1/2}\frac{5951-2603\nu+9953\nu^2-4901\nu^3}{126000(1-\nu)^2}\tag{6.5}$$

Отбрасывание в уравнении (6.2) членов $O(\eta^{(2-2q)(n+1)})$ приводит к уточненной теории, действующей при [22, 23]:

$$q<q_n=(2+2n)/(3+2n),\quad a<a_n=(1+2n)/(3+2n)\tag{6.6}$$

Второе неравенство (6.6) получается из первого неравенства (6.6) при $q={}^1/_2(a+1)$. Будем называть динамическую теорию изгиба пластин, действующую в интервале (6.6), уточненной теорией n-го порядка.

При $n=0$ и $n=1$ (6.6) переходит соответственно в первое и второе неравенство (5.2), при $n\to\infty$ пределы применимости уточненной теории n-го порядка по показателю изменяемости q_∞ и показателю динамичности a_∞ стремятся слева к единице. Для уточненной теории третьего порядка (при стационарных колебаниях входящие в нее коэффициенты определяются формулами (6.5)) $q_3={}^8/_9$, $a_3={}^7/_9$.

Подчеркнем, что пределы применимости уточненной динамической теории изгиба пластин, отвечающей разрешающему уравнению (6.2), определяются неравенствами (6.6) и не зависят ни от точности граничных условий, ни от точности, с которой по известному прогибу W восстанавливается трехмерное НДС пластины. Поэтому к уравнению (6.2) могут ставиться имеющие точность $[O(\eta^{1-q})=0]$ канонические граничные условия, а в формулах (2.9)—(2.12) могут быть отброшены члены с множителями η^{2-2q}, η^{2q-2a}, т. е. могут применяться соотношения теории изгиба пластин Кирхгофа. Очевидно также, что в этом случае в соответствующем (6.2) неоднородном разрешающем уравнении не имеет смысла учитывать слагаемые порядка $O(\eta^{2-2q})$ по сравнению с единицей в выражениях для внешних поверхностных нагрузок.

Кратко коснемся вопроса о постановке начальных условий в нестационарных задачах. Не останавливаясь на деталях, ограничимся кругом задач, для которых с исчезающей при $\eta\to0$ асимптотической погрешностью можно, используя уравнение (6.2), полагать, что $(\partial^{k+2}W/\partial t^{k+2})_{t=0}=$ $=(\partial^k\Delta W/\partial t^k)_{t=0}=0$ ($k=0, 1, 2, \ldots$).

В качестве иллюстрации возможностей уточненного уравнения (6.2) рассмотрим задачу об определении частот свободных осесимметричных колебаний круглой пластины со свободным краем. Интервалы, внутри которых находятся точные значения Λ_{ac} собственных частот $\Lambda=\omega R/c_1$ (R — радиус пластины, c_1 — скорость волны расширения в материале пластины) [26], для различных значений относительной полутолщины пластины $\eta=h/R$ представлены во втором столбце таблицы. В расчетах принималось, что коэффициент Пуассона ν равен 0,3.

В третьем — шестом столбцах даны приблизительные значения Λ_n, получаемые из уравнения (6.2) при $n=0$, 1, 2, 3 в выражении для оператора $I_{nt}W$ в (6.4). Использовались канонические граничные условия. Для пластин с $\eta=0{,}05$ и $\eta=0{,}1$ представлены первые четыре, а для пластины с $\eta=0{,}2$ — первые три собственные частоты. Значение Λ_0 (третий столбец таблицы) заимствовано из [26] и соответствует теории пластин Кирхгофа, а значение Λ_1 (четвертый столбец таблицы) — асимптотической ТР теории.

Зная значение собственной частоты Λ_0 по теории Кирхгофа, легко найти и следующие приближения. Для этого достаточно решить уравнение

$$\Lambda_n^2\sum_{k=0}^{n}A_k(\eta\Lambda_n\varkappa^{-1})^k=\Lambda_0^2 \tag{6.7}$$

Результаты расчета показывают достаточно высокую эффективность уточненных динамических теорий, описываемых уравнением (6.2), даже для относительно толстых плит. Отметим, что процедура, основанная на символическом методе Лурье, ранее применялась к задаче о свободных колебаниях круглой пластины с различными условиями закрепления на краю в [27].

7. Перейдем к построению динамических уравнений плоской задачи теории упругости $[O(\eta^{4-4q})=0]$. Рассмотрим случай, когда условия на лицевых поверхностях пластины имеют вид

$$\sigma^{3\alpha}|_{x^3=\pm h}=\pm Q^\alpha,\quad \sigma^{33}|_{x^3=\pm h}=0 \tag{7.1}$$

а показатель динамичности a не превосходит показателя изменяемости q, т. е. справедливо неравенство $q\geqslant a$. Этот случай охватывает как свободные колебания пластины в своей плоскости ($a=q$), так и статику ($a\to-\infty$).

η	Λ_{ac}	Λ_0	Λ_1	Λ_2	Λ_3
0,05	0,23–0,24	0,24	0,24	0,24	0,24
	0,9–1,0	1,00	0,94	0,94	0,94
	2,0–2,1	2,29	2,03	2,01	2,01
	3,3–3,4	4,09	3,39	3,32	3,32
0,1	0,44–0,45	0,47	0,44	0,44	0,44
	1,6–1,7	2,01	1,67	1,64	1,64
	3,1–3,2	4,58	3,33	3,16	3,16
	4,7–4,8	8,19	5,25	4,84	4,80
0,2	0,78–0,79	0,95	0,79	0,78	0,78
	2,3–2,4	4,02	2,59	2,39	2,37
	3,9–4,0	9,16	4,81	4,16	4,07

Асимптотику искомого НДС возьмем в виде

$$u_\alpha=Ru_\alpha^*,\quad w=R\eta^{1-q}w^*$$
$$\sigma^{\alpha\beta}=E\eta^{-q}\sigma_*^{\alpha\beta},\quad \sigma^{3\alpha}=E\eta^{1-2q}\sigma_*^{3\alpha},\quad \sigma^{33}=E\eta^{2-3q}\sigma_*^{33} \tag{7.2}$$

Последовательность дальнейших преобразований аналогична алгоритму п. 2. Не останавливаясь на их описании, приведем сразу разрешающую систему уравнений плоской задачи теории упругости $[O(\eta^{4-4q})=0]$, получаемую после устранения «лишнего» интеграла $(U^\alpha=u^\alpha|_{x^3=0}=Ru_{(0)}^{\alpha})$:

$$Eh\left(\frac{1}{1+\nu}\Delta U^\alpha+\frac{1}{1-\nu}\nabla^\alpha\nabla_\lambda U^\lambda\right)-2\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[U^\alpha-h^2\frac{\nu^2}{3(1-\nu)^2}\nabla^\alpha\nabla_\lambda U^\lambda\right]+$$
$$+2Q^\alpha+\frac{4\nu^2}{3(1-\nu)^2}h^2\nabla^\alpha\nabla_\lambda Q^\lambda+{}^1/_3h^2\Delta Q^\alpha-{}^2/_3(1+\nu)\rho E^{-1}h^3\partial^2Q^\alpha/\partial t^2=0 \tag{7.3}$$

Область применимости (7.3) в задачах динамики определяется вторым неравенством (5.2), накладываемым на показатель изменяемости $q=a$. Одно из основных преимуществ системы уравнений (7.3) состоит в том, что она позволяет в нестационарных задачах сгладить разрыв на квазифронте (фронте волны растяжения — сжатия в классической плоской задаче) [28, 29]. Отметим, что все приводимые в обзорах [7, 8] варианты уточненных уравнений плоской задачи теории упругости отличаются от (7.3).

Если в задачах динамики стремиться только к расширению области действия уравнений плоской задачи теории упругости, то аналогично разобранному в п. 6 случаю изгиба пластин достаточно произвести уточнения однородной разрешающей системы уравнений. Для этой цели удобно опять воспользоваться символическим методом Лурье. Точная разрешающая система уравнений плоской задачи теории упругости может быть представлена в следующей символической форме

$$D_s\mathbf{V}=0,\qquad D_s=(\alpha_1^2-\beta^2)^{-1}\left(\alpha_1^2\cos\beta\,\frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}h^2\operatorname{grad}\operatorname{div}-\gamma_1^4\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\alpha_1\right) \tag{7.4}$$

Здесь $\mathbf{V}=U^\alpha\mathbf{r}_\alpha$, $\alpha_1=\varkappa^2[\Delta_0-\partial_t^2+(1-2\nu)^{-1}h^2\operatorname{grad}\operatorname{div}]$, $\gamma_1^2={}^1/_2(\Delta_0+$ $+h^2\operatorname{grad}\operatorname{div}-\partial_t^2)$.

После серии преобразований из (7.4) с точностью $[O(\eta^{(2-2q)(n+1)})=0]$ при $q=a$, $q<1$ получается приближенная разрешающая система уравнений вида

$$Eh\left(\frac{1}{1+\nu}\Delta U^\alpha+\frac{1}{1-\nu}\nabla^\alpha\nabla_\lambda U^\lambda\right)-I_{\tau t}U^\alpha=0 \tag{7.5}$$

где оператор приведенной тангенциальной инерции $I_{\tau t}U^\alpha$ записывается так

$$I_{\tau t}U^\alpha=2\rho h\left[\frac{\partial^2 U^\alpha}{\partial t^2}+h^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{k=0}^{n-1}B_k\left(\frac{h}{c_2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2k}\nabla^\alpha\nabla_\lambda U^\lambda\right] \tag{7.6}$$

$$B_0=-\frac{\nu^2}{3(1-\nu)^2},\quad B_1=\frac{\nu^2(3-5\nu-\nu^2)}{45(1-\nu)^3},$$

$$B_2=\frac{\nu^2(-17+56\nu-33\nu^2-28\nu^3+5\nu^4)}{1260(1-\nu)^4},\ldots$$

При $n=0$ в (7.6) система уравнений (7.5) совпадает с системой уравнений классической плоской задачи теории упругости, при $n=1$ — с однородной системой уравнений, соответствующей (7.3).

Область применимости уточненной динамической теории, отвечающей сохранению n членов ряда в сумме, входящей в выражение (7.8), т. е. построению оператора $I_{\tau t}U^\alpha$ с точностью $[O(\eta^{(2-2q)(n+1)})=0]$, выражается неравенством (6.6), накладываемым на показатель изменяемости q и неравенством

$$a<a_n=(2+2n)/(3+2n) \tag{7.7}$$

накладываемым на показатель динамичности a.

Все замечания, сделанные в п. 6 относительно разрешающего уравнения (6.2), без изменения переносятся на систему уравнений (7.5). Так например, при решении краевых задач к ней могут быть поставлены канонические граничные условия.

Так же как и при изгибе пластин, будем ограничивать рассмотрение таким классом нестационарных процессов, при описании которых с исчезающей асимптотической погрешностью можно считать $[(\partial^k/\partial t^k)\nabla^\lambda\nabla_\alpha U^\alpha]_{t=0}=0$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

8. Попытаемся распространить результаты, полученные для изгиба пластин и плоской задачи теории упругости, на динамику оболочек. При этом сразу оговорим, что речь пойдет только о расширении области применимости КЛ теории, определяемой первым неравенством (5.2) (а также области применимости асимптотической ТР теории, определяемой вторым неравенством (5.2)).

Хорошо известно [9, 22, 23, 29 и др.], что при увеличении частоты колебаний в стационарной динамике и при приближении к фронтам волн в нестационарной динамике (т. е. при увеличении показателя динамичности a и показателя изменяемости q) влияние геометрии оболочки на ее НДС становится в известном смысле второстепенным. В цитированных работах показано, что при описании распространяющихся по оболочке со свободными лицевыми поверхностями колебаний с показателем изменяемости $q>0$ исходная система уравнений динамической КЛ теории с исчезающей асимптотической погрешностью распадается на две более простые системы. Первая из них — система уравнений плоской теории оболочек — описывает квазитангенциальные колебания оболочки $(q=a)$ и совпадает с системой уравнений плоской задачи теории упругости в метрике срединной поверхности оболочки. Вторая — система уравнений изгибно-плоскостной теории — описывает квазипоперечные колебания $(q={}^1/_2(a+1))$. Ее асимптотически главная часть совпадает с уравнениями динамического изгиба пластин, а необходимость удержания второстепенных плоскостных членов обоснована в [23].

Используя приведенные соображения, можно показать, что для расширения области применимости КЛ теории достаточно в ее уравнениях заменить тангенциальные инерционные члены $2\rho h\partial^2U^\alpha/\partial t^2$ на оператор приведенной тангенциальной инерции (7.6), а инерционный член, отвечающий движению по нормали, $2\rho h\partial^2W/\partial t^2$ на оператор приведенной нормальной инерции (6.3). Таким образом, для построения уточненных динамических теорий оболочек достаточно скорректировать тангенциальную инерцию так же, как это сделано для плоской задачи теории упругости, а инерцию в направлении нормали так же, как для теории изгиба пластин. При этом можно использовать все соотношения КЛ теории и канонические граничные условия, справедливые в интервале $q<1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1057–1074.
2. *Базаренко Н. А., Ворович И. И.* Асимптотическое поведение решения задач теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 6. С. 1035–1052.
3. *Виленская Т. В., Ворович И. И.* Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 2. С. 278–295.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates // J. Math. and Phys. 1944. V. 23. № 4. P. 184–191.
6. *Timoshenko S. P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Phil. Mag. Ser. 6. 1921. V. 41. P. 744–746.
7. *Айнола Л. Я., Нигул У. К.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14. № 1. С. 3–63.
8. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.
9. *Гольденвейзер А. Л.* О вынужденных гармонических колебаниях оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 168–177.
10. *Рогачева Н. Н.* О соотношениях упругости Рейснера – Нахди // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 1063–1071.
11. *Колос А. В.* Об области применения приближенных теорий изгиба пластин типа теории Рейснера // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Баку, 1966. М.: Наука, 1966. С. 497–501.
12. *Vijayakumar K.* Poisson-Kirchhoff paradox in flexure of plates // AIAA J. 1988. V. 26. № 2. P. 247–249.
13. *Бердичевский В. Л.* К динамической теории тонких упругих пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 6. С. 99–109.
14. *Гольденвейзер А. Л.* К теории изгиба пластинок Райсснера // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. № 4. С. 102–109.
15. *Колос А. В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 771–781.
16. *Reissner E.* On bending of elastic plates // Quart. Appl. Math. 1947. V. 5. № 1. P. 55–68.
17. *Reissner E.* On the theory of transverse bending of elastic plates // Intern. J. Solids and Struct. 1976. V. 12. № 8. P. 545–554.
18. *Reissner E.* Asymptotic considerations for transverse bending of orthotropic shear-deformable plates // ZAMP. 1989. V. 40. № 4. P. 543–557.
19. *Гольденвейзер А. Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 996–1028.
20. *Бердичевский В. Л.* Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 664–687.
21. *Гольденвейзер А. Л.* Некоторые вопросы общей линейной теории оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 126–138.
22. *Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д.* Динамический погранслой в задачах колебаний оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 152–162.
23. *Каплунов Ю. Д.* Интегрирование уравнений динамического погранслоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 148–160.
24. *Лурье А. И.* К теории толстых плит // ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 2–3. С. 151–168.
25. *Нигул У. К.* О применении символического метода А. И. Лурье в трехмерной теории динамики упругих плит // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1963. № 2. С. 146–155.
26. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* О собственных частотах осесимметрично колеблющейся круглой толстой плиты // Прикл. механика. 1974. Т. 10. Вып. 11. С. 81–86.
27. *Аксентян О. К., Селезнева Т. Н.* Определение частот собственных колебаний круглых плит // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 112–119.
28. *Новожилов В. В., Слепян Л. И.* О принципе Сен-Венана в динамике стержней // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 261–281.
29. *Коссович Л. Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 176 с.

Москва

Поступила в редакцию 16.VIII.1990