МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1990

УДК 539.3

Н. Г. МОИСЕЕВ, Г. Я. ПОПОВ

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОЛНОСТЬЮ СЦЕПЛЕННОЙ С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Точное решение аналогичной задачи в случае, когда пластина находится в гладком контакте с полупространством, получено в [1]. Приближенное же решение для разбираемого здесь случая применительно к линейно-деформируемому основанию общего типа предложено в [2].

1. Постановка задачи и сведение к задаче Римана. С упругим полупространством ($-\infty<x$, $y<+\infty$, $z>0$) полностью сцеплена полубесконечная пластина ($0<x<+\infty$, $|y|<+\infty$, $-h<z<0$). На пластину при $z=-h$ действуют распределенные нагрузки $g_j(x, y)$, $j=1, 2, 3$ вдоль осей x, y, z соответственно. Край пластины $x=0$ свободен. Требуется найти расчетные усилия в пластине и контактные напряжения $p_j(x, y)$, $j=1, 2, 3$ между пластиной и полупространством.

Согласно [3], поставленная задача математически формулируется в виде интегро-дифференциальной системы уравнений

$$2\Theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\mathbf{K}(x-\xi, y-\eta)\begin{Vmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{Vmatrix}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\begin{Vmatrix}2w_1-h\partial_x w_3\\2w_2-h\partial_y w_3\\2w_3\end{Vmatrix}$$

$$D_0\begin{Vmatrix}\nu_-\Delta w_1+\nu_+\partial_x(\partial_x w_1+\partial_y w_2)\\ \nu_-\Delta w_2+\nu_+\partial_y(\partial_x w_1+\partial_y w_2)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}p_1-q_1\\p_2-q_2\end{Vmatrix}$$

$$D\Delta^2 w_3=q_3-p_3-{}^1/_2h\,[\partial_x(p_1+q_1)+\partial_y(p_2+q_2)]$$

$$0<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty;\ 2\nu_\pm=1\pm\nu \tag{1.1}$$

при следующих граничных условиях:

$$(\partial_x w_1+\nu\partial_y w_2)(0, y)=0,\quad (\partial_y w_1+\partial_x w_2)(0, y)=0$$

$$D[\partial_x^3 w_3+(2-\nu)\partial_x\partial_y^2 w_3]+hq_1(0, y)+$$

$$+D_0[\nu_-\Delta w_1+\nu_+\partial_x(\partial_x w_1+\partial_y w_2)](0, y)=0 \tag{1.2}$$

$$(\partial_x^2 w_3+\nu\partial_y^2 w_3)(0, y)=0,\ -\infty<y<+\infty$$

Здесь $w_j(x, y)$, $j=1, 2, 3$ — смещения срединной плоскости пластины вдоль осей x, y, z, $\Delta=\partial_x^2+\partial_y^2$, $E\Theta=2(1-\mu^2)$, E, μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругого полупространства, $D_0=E_0h(1-\nu^2)^{-1}$, $12D=h^2D_0$, E_0, ν, h — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина пластины, $\mathbf{K}(x, y)$ — матрица-ядро [4] классического основания:

$$\mathbf{K}(x, y)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^{-1}\mathbf{H}(t,\beta)e^{itx+i\beta y}dt\,d\beta$$

$$\mathbf{H}(t,\beta)=\begin{Vmatrix}(1+\mu_0)\mathbf{I}-\mu_0\rho^{-2}\mathbf{PQ} & i\mu_1\rho^{-1}\mathbf{P}\\ -i\mu_1\rho^{-1}\mathbf{Q} & 1\end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{P}=\left\|\begin{matrix} t \\ \beta \end{matrix}\right\|, \quad \mathbf{Q}=\|t, \beta\|, \quad \mathbf{I}=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$\rho=(t^2+\beta^2)^{1/2}, \quad (1-\mu)\mu_0=\mu, \quad 2\mu_1=1-\mu_0 \tag{1.3}$$

Применяя преобразования Фурье по переменной y:

$$\|w_{j,\beta}, p_{j,\beta}, q_{j,\beta}\|(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\|(\Theta c)^{-1}w_j, p_j, q_j\|(cx, cy)\times$$

$$\times\exp(-i\beta y)\,dy \quad (j=1,2,3) \quad c^3=2D\Theta \tag{1.4}$$

к задаче (1.1), (1.2), получим

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathbf{K}_\beta(x-\xi)\left\|\begin{matrix} p_{1,\beta} \\ p_{2,\beta} \\ p_{3,\beta}\end{matrix}\right\|(\xi)\,d\xi=\left\|\begin{matrix} w_{1,\beta}-kw'_{3,\beta} \\ w_{2,\beta}-i\beta k w_{3,\beta} \\ w_{3,\beta}\end{matrix}\right\| \tag{1.5}$$

$$w_{3,\beta}^{\mathrm{IV}}-2\beta^2 w''_{3,\beta}+\beta^4 w_{3,\beta}=q_{3,\beta}-p_{3,\beta}-k[(p_{1,\beta}+q_{1,\beta})'+i\beta(p_{2,\beta}+q_{2,\beta})]$$

$$\left\|\begin{matrix}\sigma_1'+i\beta\tau \\ \tau'+i\beta\sigma_2\end{matrix}\right\|=\frac{k^2}{3}\left\|\begin{matrix} p_{1,\beta}-q_{1,\beta} \\ p_{2,\beta}-q_{2,\beta}\end{matrix}\right\|, \quad k=\frac{h}{2c}$$

$$\sigma_1=w'_{1,\beta}+i\beta\nu w_{2,\beta}, \quad \sigma_2=\nu w'_{1,\beta}+i\beta w_{2,\beta}$$

$$2\tau=(1-\nu)(i\beta w_{1,\beta}+w'_{2,\beta}), \quad x>0 \tag{1.6}$$

$$(w'''_{3,\beta}-\beta^2(2-\nu)w'_{3,\beta}+3k^{-1}(\sigma_1'+i\beta\tau)(0)+4kq_{1,\beta}(0)=0$$

$$w''_{3,\beta}(0)-\nu\beta^2 w_{3,\beta}(0)=0, \quad \sigma_1(0)=0, \quad \tau(0)=0 \tag{1.7}$$

$$\mathbf{K}_\beta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho^{-1}\mathbf{H}(t,\beta)e^{itx}dt \tag{1.8}$$

Пусть $\mathbf{C}_L^{(n)}$ — класс функций, имеющих абсолютно непрерывные на любом сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$, $0<\alpha_0<\alpha_1<+\infty$ и абсолютно интегрируемые на интервале $(0, +\infty)$ производные порядка j, $j=\overline{0, n-1}$, и пусть $\mathbf{L}_1^{(0)}=\mathbf{L}_1(0, \infty)\cap\cup\mathbf{L}_r(0, \infty)$ $(r>1)$. Решение задачи (1.5), (1.6), (1.7) ищем в классе функций таких, что

$$p_{1,\beta}\in\mathbf{C}_L^{(1)}\cap\mathbf{L}_1^{(0)}, \quad p_{j,\beta}\in\mathbf{L}_1^{(0)}, \quad j=2, 3 \tag{1.9}$$

предполагая аналогичное относительно правых частей $q_{j,\beta}(x)$, $j=1, 2, 3$, а также, что $q_{1,\beta}(x)$ непрерывна при $x\geqslant 0$. В этом случае функции

$$w_{1,\beta}\in\mathbf{C}_L^{(3)}, \quad w_{2,\beta}\in\mathbf{C}_L^{(2)}, \quad w_{3,\beta}\in\mathbf{C}_L^{(4)}$$

$$w''_{1,\beta}, \quad w''_{2,\beta}, \quad w_{3,\beta}^{\mathrm{IV}}+3k^{-1}w'''_{1,\beta}\in\mathbf{L}_1^{(0)} \tag{1.10}$$

с точностью до четырех произвольных постоянных C_j, $j=\overline{1, 4}$ восстанавливаются из (1.6):

$$\|w_{1,\beta}-kw_{3,\beta}, \ w_{2,\beta}-i\beta kw_{3,\beta}, \ w_{3,\beta}\|_*(x)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{4}C_j\mathbf{f}_j(x)-\int_0^{+\infty}\mathbf{L}_\beta^{(0)}(x-\xi)\mathbf{p}_\beta(\xi)\,d\xi$$

$$\mathbf{p}_\beta(x)=\|p_{1,\beta}, p_{2,\beta}, p_{3,\beta}\|_*(x), \quad \mathbf{q}_\beta(x)=\|q_{1,\beta}, q_{2,\beta}, q_{3,\beta}\|_*(x)$$

$$\mathbf{f}_0(x)=2\int_0^{+\infty}\mathbf{L}_\beta^{(1)}(x-\xi)\mathbf{q}_\beta(\xi)d\xi,\quad C_0=1$$

$$\mathbf{L}_\beta^{(j)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho^{-4}\mathbf{A}_j(t,\beta)e^{itx}dt,\quad j=0,1$$

$$3\,\|\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1\|=\mathbf{M}\operatorname{diag}\{k^2,k^2,3\}\mathbf{N}\,\|\mathbf{M}^*,\mathbf{M}_*\|$$

$$\mathbf{M}=\begin{Vmatrix}\mathbf{I} & -ik\mathbf{P}\\ \mathbf{0}_* & 1\end{Vmatrix},\quad \mathbf{N}=\begin{Vmatrix}\nu_0\rho^2\mathbf{I}+(1-\nu_0)\mathbf{PQ} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0}_* & 1\end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{0}=\|0,0\|_*,\quad \nu_0=2(1-\nu)^{-1}$$

$$\mathbf{f}_{2j-1}(x)=\gamma_{2j-1}e^{-|\beta|x}+\gamma_{2j}xe^{-|\beta|x},\quad \mathbf{f}_{2j}(x)=\gamma_{2j}e^{-|\beta|x},\quad j=1,2$$

$$2|\beta|(1-\nu)\gamma_1=\|1,\ i\operatorname{sgn}\beta,\ 0\|_*,\quad \gamma_3=\|-k,\ 0,\ 0\|_*$$

$$\gamma_2=\|1,\ -i\operatorname{sgn}\beta,\ 0\|_*,\quad \gamma_4=\|k|\beta|,\ -i\beta k,\ 1\|_* \tag{1.11}$$

Здесь и далее принято: $\mathbf{A}_*$ — матрица, транспонированная к матрице $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^*$ — сопряженная к матрице $\mathbf{A}$, т. е. $\mathbf{A}^*=\overline{\mathbf{A}}_*$. Определенность граничных функционалов (1.7) следует из (1.10).

Подставляя (1.11) в (1.5), приходим к системе интегральных уравнений относительно $p_\beta(x)$:

$$\int_0^{+\infty}[\mathbf{K}_\beta(x-\xi)+2\mathbf{L}_\beta^{(0)}(x-\xi)]\mathbf{p}_\beta(\xi)d\xi=\sum_{j=0}^{4}C_j\mathbf{f}_j(x),\quad 0<x<+\infty \tag{1.12}$$

решение которой ищем в классе (1.9). Применение преобразования Фурье

$$\|\varphi^-(z),\mathbf{h}_0^-(z)\|=\int_0^{+\infty}\|\mathbf{p}_\beta(\xi),\mathbf{q}_\beta(\xi)\|e^{-i\xi z}d\xi \tag{1.13}$$

к системе интегральных уравнений (1.12) приводит к следующей краевой задаче Римана [5] относительно трех пар функций

$$\varphi^+(t)=\mathbf{G}(t)\rho^{-1}\varphi^-(t)-\gamma(t),\quad -\infty<t<+\infty$$

$$\mathbf{G}(t)=\mathbf{H}(t,\beta)+2\rho^{-3}\mathbf{A}_0(t,\beta),\quad \gamma(t)=\sum_{j=0}^{4}C_j\mathbf{g}_j(t)$$

$$\rho^4\mathbf{g}_0(t)=2\mathbf{A}_1(t,\beta)\mathbf{h}_0^-(t),\quad \mathbf{g}_{2j}(t)=\gamma_{2j}h_1^-(t)$$

$$\mathbf{g}_{2j-1}(t)=\gamma_{2j-1}h_1^-(t)+\gamma_{2j}h_2^-(t),\quad j=1,2$$

$$h_j^-(t)=[i(t-i|\beta|)]^{-j},\quad j=1,2 \tag{1.14}$$

в которой $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$ — аналитичны соответственно в $\operatorname{Im} z>0$, $\operatorname{Im} z<0$; непрерывны в $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, $\operatorname{Im} z\leqslant 0$, причем $\varphi^\pm(z)\to\mathbf{0}$, $z\to\infty$. Если, кроме того, выполнено условие, что интеграл

$$\mathbf{p}_\beta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}\varphi^-(t)dt,\quad x>0 \tag{1.15}$$

принадлежит классу (1.9), то краевая задача (1.14) эквивалентна системе (1.12), а, согласно (1.11), и системе (1.5), (1.6).

Замечание 1. Однородная задача (1.5), (1.6), (1.7) ($\mathbf{q}_\beta(x)\equiv\mathbf{0}$) в классе (1.9), (1.10) имеет только тривиальное решение. Это следует из положительной определенности матрицы $\mathbf{H}(t, \beta)$ и следующего соотношения

$$-\int_0^{+\infty} [\mathbf{p}_\beta(x)]^* \int_0^{+\infty} \mathbf{K}_\beta(x-\xi)\mathbf{p}_\beta(\xi)\,d\xi\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi^-(t)]^*\mathbf{H}(t,\beta)\varphi^-(t)\,dt=\int_0^{+\infty} W(x)\,dx$$

$$^1/_2 W(x)=3k^{-2}[\nu_0|\tau|^2+(1+\nu)^{-1}(|\sigma_1|^2+|\sigma_2|^2)+\nu(1-\nu^2)^{-1}|\sigma_1-\sigma_2|^2]+$$

$$+\nu|w''_{3,\beta}-\beta^2 w_{3,\beta}|^2+(1-\nu)(|w''_{3,\beta}|^2+2\beta^2|w'_{3,\beta}|^2+\beta^4|w_{3,\beta}|^2)$$

которое можно получить подстановкой представления (1.5) во внутренний интеграл двойного, а, затем, интегрируя полученное выражение по частям в соответствии с (1.6), (1.7), (1.10).

Таким образом задача свелась к задаче Римана (1.14), для решения которой необходимо факторизовать ее матричный коэффициент $\mathbf{G}(t)$.

2. Факторизация матричного коэффициента задачи Римана. Матричный коэффициент задачи (1.14) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{G}(t)=\Lambda(t)\mathbf{g}(t,\mathbf{A}(t)),\quad \mathbf{g}(t,u)=(1+2k_0\nu_1\rho^{-1})+\rho^{-3}u$$

$$\Lambda(t)=\begin{Vmatrix}(1+\mu_0)\mathbf{I}-\mu_0\rho^{-2}\mathbf{PQ} & 0\\ 0_* & 1\end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{A}(t)=\begin{Vmatrix}2k_0(1-\nu_1)\mathbf{PQ} & im(t)\mathbf{P}\\ -im(t)\mathbf{Q} & 2(1-k_0\nu_1\rho^2)\end{Vmatrix}$$

$$m(t)=\mu_1\rho^2-2k,\ 4\nu_1(1+\mu_0)=\nu_0,\ 3k_0=4k^2 \tag{2.1}$$

т. е. задача факторизации [5] матрицы-функции

$$G(t)=G_0^+(t)[G_0^-(t)]^{-1},\quad -\infty<t<+\infty \tag{2.2}$$

сводится $(\det\Lambda(t)\equiv 1+\mu_0)$ к факторизации $\mathbf{g}(t,\mathbf{A}(t))$, представление которой следует понимать в соответствии с определением функций от матриц [6]. Факторизация $\mathbf{g}(t,\mathbf{A}(t))$ будет проведена, следуя [7].

Вычисляя характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}(t)$, находим, что он представим в виде: $\det(\omega\mathbf{I}-\mathbf{A}(t))=\omega\varphi_2(t,\omega)$, где многочлен $\varphi_2(t,\omega)$ $(\deg_\omega\varphi_2=2)$ — неприводим над полем рациональных функций. Далее находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\omega=0$, и два вектора (с рациональными элементами), образующие базис ядра матричного оператора $\varphi_2(t,\mathbf{A}(t))$. Из них сформируем матрицу

$$\mathbf{T}(z)=\begin{Vmatrix}(z+i|\beta|)^{-1}\mathbf{S}(z) & 0\\ 0_* & 1\end{Vmatrix},\quad \mathbf{S}(z)=\begin{Vmatrix}\beta & z\\ -z & \beta\end{Vmatrix}$$

$$\det\mathbf{T}(z)=(z-i|\beta|)(z+i|\beta|)^{-1} \tag{2.3}$$

такую, что $\mathbf{T}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{T}(t)$ представима в виде

$$\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2k_0(1-\nu_1)\rho^2 & i(t+i|\beta|)m(t)\\ 0 & -i(t-i|\beta|)m(t) & 2(1-\nu_1 k_0\rho^2)\end{Vmatrix}$$

Таким образом

$$\mathbf{g}(t,\mathbf{A}(t))=\mathbf{T}(t)\begin{Vmatrix}\Delta(t) & 0_*\\ 0 & \mathbf{G}_2(t)\end{Vmatrix}T^{-1}(t)$$

$$\Delta(t)=1+2k_0\nu_1\rho^{-1},\quad \rho^3\mathbf{G}_2(t)=b_3(\rho)I+\mathbf{A}_2(t)$$

$$\mathbf{A}_2(t)=\begin{Vmatrix}l(t) & im(t)(t+i|\beta|)\\ -im(t)(t-i|\beta|) & -l(t)\end{Vmatrix}$$

$$l(t)=k_0\rho^2-1,\ b_3(\rho)=\rho^3+k_0\rho^2+1 \tag{2.4}$$

т. е. задача факторизации $\mathbf{g}(t, \mathbf{A}(t))$ свелась к факторизации скалярного множителя

$$\Delta(t)=\Delta_1^+(t)[\Delta_1^-(t)]^{-1},\ -\infty<t<+\infty \tag{2.5}$$

и матрицы второго порядка

$$\mathbf{G}_2(t)=\mathbf{X}_2^+(t)[\mathbf{X}_2^-(t)]^{-1},\ -\infty<t<+\infty \tag{2.6}$$

Для построения факторизации (2.6) исследуем характеристический многочлен полиномиальной матрицы $\mathbf{A}_2(z)$ (2.4):

$$\varphi(z,\ \omega)=\det(\omega\mathbf{I}-\mathbf{A}_2(z))=\omega^2-g^2(z)f(z) \tag{2.7}$$

$$g^2(z)f(z)=l^2(z)+(z^2+\beta^2)m^2(z) \tag{2.8}$$

Полином $g(z)$ определяется из представления (2.8) условием, что полином $f(z)$ не имеет кратных корней. В зависимости от соотношения между параметрами μ_1 и k (1.3), (1.6) будем различать следующие три ситуации: 1) если $27\mu_1=8k^3$, то $g(z)=\mu_1 f(z)$, $f(z)=z^2+r_0^2$; 2) если $3\mu_1=8k^3$, то $g(z)=m(z)=2kl(z)$, $f(z)=z^2+r_0^2$; 3) если $3\mu_1\neq 8k^3$, $27\mu_1\neq 8k^3$, то $g(z)\equiv 1$; $f(z)=\mu_1^2(z^2+r_0^2)(z^2-r_1^2)(z^2-\bar r_1^2)$, $\operatorname{Re} r_1>0$, $\operatorname{Im} r_1>0$, причем в каждой из приведенных ситуаций $r_0-|\beta|>0$.

Зафиксируем ветвь $[f(z)]^{1/2}$ следующими условиями: в ситуациях 1) и 2):

$$[f(z)]^{1/2}=(z-ir_0)^{1/2}(z+ir_0)^{1/2},\quad -\pi\pm{}^{\pi}/_2<\arg(z\pm ir_0)<\pi\pm{}^{\pi}/_2$$

в ситуации 3):

$$[f(z)]^{1/2}=\mu_1\prod_{j=1}^{6}(z-s_j)^{1/2}$$

$$s_1=-\bar r_1,\ s_2=ir_0,\ s_3=r_1,\ s_4=\bar r_1,\ s_5=-ir_0,\ s_6=-r_1$$

$$-2\pi+\arg(s_j)<\arg(z-s_j)<\arg(s_j)$$

$$0<\arg(s_j)<\pi,\ j=1,\ 2,\ 3$$

$$\arg(s_j)<\arg(z-s_j)<\arg(s_j)+2\pi$$

$$-\pi<\arg(s_j)<0,\ j=4,\ 5,\ 6$$

Выбранная ветвь обладает следующими свойствами: $[f(z)]^{1/2}=[f(-z)]^{1/2}$, $[f(t)]^{1/2}>0$ при $t\in(-\infty,+\infty)$, $[f(i\tau)]^{1/2}>0$ при $-r_0<\tau<r_0$.

В соответствии с базисными интерполяционными многочленами Лагранжа [6] $l_j(u)=L(z,\omega_j;u)$, $j=1,\ 2$, $L(z,\omega;u)=[\varphi(z,u)-\varphi(z,\omega)]\times\times[(u-\omega)\varphi_\omega'(z,\omega)]^{-1}$, ($l_\alpha(\omega_j)=\delta_{\alpha,j}$, α, $j=0$, 1, $\delta_{\alpha,j}$ — символ Кронекера), где $\omega_1=gf^{1/2}$, $\omega_2=-\omega_1$ — корни характеристического многочлена (2.7) матрицы $\mathbf{A}_2(z)$, введем в рассмотрение следующие матрицы

$$\mathbf{B}(z,\ \omega)=L(z,\ g(z)\omega;\ \mathbf{A}_2(z))=[g(z)\omega]^{-1}\mathbf{B}_0(z,\ \omega)$$

$$2\mathbf{B}_0(z,\ \omega)=g(z)\omega\mathbf{I}+A_2(z),\ \omega^2=f(z) \tag{2.9}$$

Через $\mathbf{R}$ обозначим двулистную риманову поверхность [8, 9], порожденную неприводимым алгебраическим уравнением $\omega^2=f(z)$. Пусть Z_1 — лист расширенной комплексной плоскости $C\cup\{\infty\}$ с системой разрезов, соответствующей выбранной ветви $[f(z)]^{1/2}$. Один из берегов каждого из разрезов отметим знаком плюс, а второй — минус. Через Z_2 обозначим второй лист расширенной комплексной плоскости с точно такой же системой и ориентацией разрезов. Поверхность $\mathbf{R}$ получается [9] склейкой листов Z_1 и Z_2 по указанной системе разрезов согласно закону подстановки: берег «плюс» каждого разреза первого листа с берегом «минус» аналогичного разреза второго листа и берег «минус» каждого разреза первого листа с берегом «плюс» аналогичного разреза второго листа. Функция ω равная $[f(z)]^{1/2}$ на листе Z_1 и равная $-[f(z)]^{1/2}$ на листе

Z_2 является однозначной аналитической функцией на R. Точку поверхности R с аффиксом $z=a$ на листе Z_1 будем обозначать парой $(a, [f(a)]^{1/2})$, на листе Z_2 — парой $(a, -[f(a)]^{1/2})$. Пара (z, ω) однозначно определяет точку поверхности $\mathbf{R}$. Через ξ будем обозначать аналогичную ω функцию, удовлетворяющую уравнению $\xi^2=f(\tau)$. Выражение $(\omega+\xi)\times\times(2\xi(\tau-z))^{-1}$ является аналогом ядра типа Коши [10] для $\mathbf{R}$. Через L_R обозначим контур поверхности $\mathbf{R}$, состоящий из вещественных осей листов Z_1 и Z_2, с направлением обхода по каждому из них от $-\infty$ до $+\infty$.

Каноническая [5] факторизация (2.6) имеет следующий вид [7]:

$$\mathbf{X}_2(z)=\mathbf{F}(z)\mathbf{R}_2(z)$$

$$\mathbf{F}(z)=x(z, \omega)\mathbf{B}(z, \omega)+x(z, -\omega)\mathbf{B}(z, -\omega) \tag{2.10}$$

где матрица $\mathbf{B}(z, \omega)$ определена в (2.9), $x(z, \omega)$ — решение следующей краевой задачи Римана на римановой поверхности $\mathbf{R}$ [10]:

$$x^+(\tau, \xi)=\lambda(\tau, \xi)x^-(\tau, \xi), \quad (\tau, \xi)\in\mathbf{L}_R$$

$$\rho^3\lambda(\tau, \xi)=b_3(\rho)+g(\tau)\xi; \quad \rho=\rho(\tau)=(\tau^2+\beta^2)^{1/2} \tag{2.11}$$

а $\mathbf{R}_2(z)$ — матрица с рациональными элементами, которая будет определена далее. Отметим, что матрица $\mathbf{F}(z)$ (2.10) обладает следующими свойствами:

$$\mathbf{F}^{-1}(z)=[x(z, \omega)]^{-1}\mathbf{B}(z, \omega)+[x(z, -\omega)]^{-1}\mathbf{B}(z, -\omega)$$

$$\det\mathbf{F}(z)=x(z, \omega)x(z, -\omega) \tag{2.12}$$

Рассмотрим коэффициент задачи (2.11). Имеем

$$\begin{gathered}\lambda(\tau, \xi)\lambda(\tau, -\xi)=\det\mathbf{G}_2(t)=\rho^{-4}d(\rho)\\ d(z)=(1-\mu_1^2)z^4+2k_0z^3+4k\mu_1z^2+2z+k_0\end{gathered} \tag{2.13}$$

Используя принцип аргумента [4], можно показать, что

$$\begin{gathered}d(z)=(1-\mu_1^2)(z-\rho_1)(z-\bar\rho_1)(z+\rho_2)(z+\rho_3)\\ 0<\rho_2<\rho_3, \quad 0<\arg\rho_1<\pi/2\end{gathered} \tag{2.14}$$

В ситуациях 1) и 2) (2.8) род [8, 9] поверхности $\mathbf{R}$ равен нулю и решение задачи (2.11) строится элементарно [10]. Кроме того в этих ситуациях факторизовать матрицу $\mathbf{G}_2(t)$ можно с помощью более простого аппарата работы [11], который оказывается не применим в ситуации 3), так как при этом оказываются не выполненными ограничения, связанные с отсутствием существенно особой точки в формулах этой работы. Так как ситуации 1) и 2) не типичны, более того, практически не возможны, то подробности построения факторизации (2.6) для них опускаем, ограничась в дальнейшем лишь некоторыми замечаниями по этим ситуациям.

Остановимся подробно на ситуации 3). В этом случае род поверхности $\mathbf{R}$ равен двум, а $d\omega_\alpha=\tau^{\alpha-1}\xi^{-1}$, $\alpha=1, 2$ — образуют базис абелевых дифференциалов 1-го рода [8—10].

Согласно [10], решение задачи (2.11) можно представить в следующем виде

$$x(z, \omega)=\exp[x_0(z, \omega)], \quad x_0(z, \omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R}\frac{\ln\lambda(\tau, \xi)}{\tau-z}\,\frac{\omega+\xi}{2\xi}\,d\tau+$$

$$+n\int_\Gamma\frac{\omega+\xi}{2\xi}\,\frac{d\tau}{\tau-z}-n_0\int_{(-iq_0,\xi_0)}^{(iq_0,\xi_0)}\frac{\omega+\xi}{2\xi}\,\frac{d\tau}{\tau-z}$$

$$\xi_0^2=f(iq_0), \quad 0\leqslant q_0\leqslant r_0; \quad n_0=1 \tag{2.15}$$

где n — целое число, контур L_R поверхности $\mathbf{R}$ определен ранее. Замкнутый контур Γ проходит по мнимой оси первого листа от точки $(-ir_0, 0)$

до $(ir_0, 0)$ и по мнимой оси второго листа от $(ir_0, 0)$ до $(-ir_0, 0)$. Контур, соединяющий точки $(-iq_0, \xi_0)$ и (iq_0, ξ_0), проходит без самопересечений по контуру Γ через точку $(0, [f(0)]^{1/2})$. Присутствующая в (2.15) функция $\ln\lambda$ определена условием $|\arg(\lambda)|<\pi$.

Для того, чтобы $x(z, \omega)$ не имела существенно особых точек, необходимо и достаточно [10] выполнение следующих условий

$$\int\limits_{(-iq_0,\xi_0)}^{(iq_0,\xi_0)} d\omega_\alpha = \int\limits_{L_R} \ln\lambda(\tau,\xi)\,d\omega_\alpha + n\int\limits_{\Gamma} d\omega_\alpha, \quad \alpha=1,2 \tag{2.16}$$

Условие (2.16) при $\alpha=2$ выполнено автоматически, так как $[f(z)]^{1/2}$ — четная функция. Числа q_0, ξ_0 и n определим, реализуя условие (2.16) при $\alpha=1$:

$$n=E(e_0(2H_0)^{-1})+1, \quad \xi_0=\varepsilon\,[f(iq_0)]^{1/2} \tag{2.17}$$

$$\varepsilon=\operatorname{sgn}(b_0),\ b_0=e_0-(2n-1)H_0, \quad H_0=H(0)$$

$$e_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ln\left[\frac{b_3(\rho(\tau))+(f(\tau))^{1/2}}{b_3(\rho(\tau))-(f(\tau))^{1/2}}\right]\frac{d\tau}{[f(\tau)]^{1/2}}>0, \quad H(q)=\int\limits_q^{r_0}\frac{d\tau}{(f(i\tau))^{1/2}}$$

где $E(x)$ — целая часть x, а число q_0 является корнем уравнения

$$H(q_0)=|b_0|, \quad q_0\in[0, r_0] \quad (b_0\leqslant H_0) \tag{2.18}$$

которое явно решается с помощью эллиптических функций Якоби [12]:

$$q_0=\frac{v}{r_0(1+v^2)^{1/2}}, \quad \frac{v}{|r_2|}=\frac{\operatorname{sn}(s|r_1|\,|b_0|,k_1)}{\operatorname{cn}(s|r_1|\,|b_0|,k_1)}$$

$$r_2^2=\frac{r_1^2}{r_0^2+r_1^2}, \quad s=\left|\frac{r_1}{r_2}\right|, \quad k_1^2=\frac{1}{2}\left[1-\frac{r_2^2+\bar r_2^2}{2|r_2|^2}\right] \tag{2.19}$$

Используя свойства интеграла типа Коши [13] с учетом представления

$$\frac{\omega+\xi}{2\xi(\tau-z)}=\frac{1}{\tau-z}+\frac{\omega-\xi}{2\xi(\tau-z)}$$

получим, то функция $x(z, \omega)$ (2.15) имеет в точке (iq_0, ξ_0) простой полюс, а в точке $(-iq_0, \xi_0)$ — простой ноль, т. е.

$$(z-iq_0)\mathbf{F}(z)=b_\pm\mathbf{B}_0(\pm iq_0, \pm\xi_0)+O(z\mp iq_0)$$

$$z\mapsto\pm iq_0, \quad b_\pm\neq0, \quad q_0\neq0 \tag{2.20}$$

$$\det\mathbf{F}(z)=\frac{z+iq_0}{z-iq_0}\exp\left\{\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln[\det\mathbf{G}_2(\tau)]}{\tau-z}d\tau\right\}$$

Последнее соотношение получено с учетом (2.12), (2.13). Кроме того, принимая во внимание (2.16), получим

$$[\mathbf{F}(z)]^{\pm1}=O(z^{i\beta_*})+O(z^{-i\beta_*}), \quad z\to\infty$$

$$2\pi\beta_*=\ln(3-4\mu) \tag{2.21}$$

Замечание 2. Формулы (2.20) верны и в случае $q_0=r_0$. При этом учтено, что функции

$$2\varphi_\alpha(z)=[x(z, \omega)+(-1)^\alpha x(z, -\omega)]\omega^{-\alpha}, \quad \alpha=0, 1$$

в окрестности точек $z=ir_0$, $-ir_0$ ведут себя следующим образом

$$\varphi_0(z)=O(1), \quad \varphi_1(z)=O((z-ir_0)^{-1}), \quad z\to ir_0$$

$$\varphi_0(z)=O(z+ir_0), \quad \varphi_1(z)=O(1), \quad z\to -ir_0$$

Последнее нетрудно получить, используя обобщённую теорему Римана об устранимой особенности [14] и учитывая (2.12).

В качестве рациональной матрицы $\mathbf{R}_2(z)$ возьмем следующую:

$$(z+iq_0)[f(iq_0)+q_0^2m^2(iq_0)]\mathbf{R}_2(z)=$$
$$=(z+iq_0)\mathbf{B}_0(iq_0, -\xi_0)-(z-iq_0)\mathbf{B}_0(-iq_0, \xi_0)$$
$$f(iq_0)+q_0^2m^2(iq_0)>0, \ 0\leqslant q_0\leqslant r_0 \tag{2.22}$$

Прежде всего заметим, что

$$\det \mathbf{R}_2(\infty)=1, \ \det \mathbf{B}_0(z, \omega)\equiv 0, \ (z, \omega)\in\mathbf{R} \tag{2.23}$$

Определитель матрицы $(z+iq_0)\mathbf{R}_2(z)$ представляет собой многочлен второй степени, который в силу (2.23) делится на $z^2+q_0^2$, т. е.

$$\det \mathbf{R}_2(z)=(z-iq_0)(z+iq_0)^{-1} \tag{2.24}$$

Из (2.20), (2.21), (2.24) с учетом тождества $\mathbf{B}(z, \omega)\ \mathbf{B}(z, -\omega)\equiv\mathbf{0}$, $(z, \omega)\in\mathbf{R}$ следует, что матрица $X_2(z)$, определенная формулами (2.9), (2.10), (2.15), (2.17)—(2.19), (2.22), является канонической факторизацией (2.6) матрицы $G_2(t)$ (2.4).

В исключительных случаях (ситуации 1) и 2)) каноническая факторизация также определяется формулами (2.9) (2.10), (2.15), причем в последней следует принять $n=n_0=0$. Матрица $\mathbf{R}_2(z)$ для ситуации 1) определяется следующими формулами

$$\mathbf{R}_2(z)=\mathbf{I}+(z-ir_0)^{-1}\mathbf{H}_+ +(z+ir_0)^{-1}\mathbf{H}_-$$
$$k_2\mathbf{H}_\pm=-k_3A_1^\pm+[A_0^\pm\mp 2ir_0A_1^\pm]A_0^\mp A_1^\mp$$
$$k_2=2^7r_0^2k_5^2[2k_4^4+2k_4^2+3], \ k_3=2^6k_4^2k_5^2$$
$$k_4=k_5|\beta|, \ 3k_5=2k, \ \mathbf{A}_j^\pm=(d/dz)^j\mathbf{A}_2(z)|_{z=\pm ir_0}$$

а для ситуации 2) $R_2(z)\equiv\mathbf{I}$. Отметим, что формулы (2.21) имеют место и для ситуаций 1), 2).

Факторизация скалярного множителя (2.5) имеет следующий вид [13]:

$$\Delta_1(z)=\frac{1}{(1+\mu_0)^{1/2}}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\Delta(\tau)}{\tau-z}d\tau\right\} \tag{2.25}$$

Обозначим

$$x_1(z)=(1+\mu_0)\Delta_1(z), \ \operatorname{Im} z>0; \ x_1(z)=\Delta_1(z), \ \operatorname{Im} z<0$$
$$\mathbf{X}_0(z)=\begin{Vmatrix} x_1(z) & 0_* \\ 0 & \mathbf{X}_2(z)\end{Vmatrix} \tag{2.26}$$

В соответствии с представлениями (2.1), (2.3)—(2.6) и тождеством $\Lambda(z)\mathbf{T}(z)=\mathbf{T}(z)\operatorname{diag}\{1+\mu_0, 1, 1\}$ факторизация (2.2) осуществляется матрицей

$$\mathbf{G}_0(z)=\mathbf{T}(z)\mathbf{X}_0(z) \tag{2.27}$$

Факторизационные множители из (2.27), (2.3), (2.26) обладают следующими свойствами:

$$[\mathbf{T}(\bar{z})]^*=[\mathbf{T}(z)]^{-1}, \quad [\mathbf{X}_0(\bar{z})]^*=[\mathbf{X}_0(z)]^{-1} \tag{2.28}$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой.

3. Решение задачи Римана. Для решения задачи Римана (1.14) приведем факторизующую матрицу (2.27) к каноническому виду [5]. При $z\to i|\beta|$ имеем

$$\mathbf{G}_0(z)\mathbf{X}_0^{-1}(i|\beta|)=\|\mathbf{\Psi}_1, i\operatorname{sgn}\beta\mathbf{\Psi}_1, \mathbf{\Psi}_3\|+O(z-i|\beta|)$$
$$2\mathbf{\Psi}_1=\|-i\operatorname{sgn}\beta, 1, 0\|_*, \ \mathbf{\Psi}_3=\|0\ 0, 1\|_* \tag{3.1}$$

$$\det\,[\mathbf{G}_0(z)\mathbf{X}_0^{-1}(i|\beta|)]=d_+(z-i|\beta|)+O((z-i|\beta|)^2)$$

$$d_+=(1+\mu_0)(2i|\beta|)^{-1}$$

Пусть

$$\mathbf{R}_0=\{\delta_{\alpha,j}-i\,\mathrm{sgn}\,\beta\,\delta_{\alpha,1}\delta_{j,2}\}_{\alpha,j=\overline{1,3}} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{\Lambda}_0(z)=\mathrm{diag}\,\{1,\ (z+i|\beta|)(z-i|\beta|)^{-1},\ 1\}$$

где $\delta_{\alpha,j}$ — символ Кронекера. В силу (3.1) матрица $\mathbf{G}_0(z)\mathbf{X}_0^{-1}(i|\beta|)\mathbf{R}_0\mathbf{\Lambda}_0(z)$ в точке $z=i|\beta|$ имеет нулевые порядки столбцов и нулевой порядок определителя. При $z\to-i|\beta|$

$$\begin{gathered}
\mathbf{G}_0(z)\mathbf{X}_0^{-1}(i|\beta|)\mathbf{R}_0=\mathbf{\Psi}_0\mathbf{\Psi}_2(z+i|\beta|)^{-1}+O(1)\\
\det[\mathbf{G}_0(z)\mathbf{X}_0^{-1}(i|\beta|)\mathbf{R}_0]=d_-(z+i|\beta|)^{-1}+O(1)\\
d_-=(-2i|\beta|)\det\,[\mathbf{X}_0(-i|\beta|)\mathbf{X}_0^{-1}(i|\beta|)]\neq 0\\
\mathbf{\Psi}_0=\|\alpha_{11},\ (-i\,\mathrm{sgn}\,\beta)(\alpha_{11}+\alpha_{22}),\ -i\,\mathrm{sgn}\,\beta\alpha_{23}\|\\
\mathbf{\Psi}_2=\beta\|1,\ i\,\mathrm{sgn}\,\beta,\ 0\|_*
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Числа $\alpha_{k,j}$ определяются из представления

$$\mathbf{A}_3=\mathbf{X}_0(-i|\beta|)\mathbf{X}_0^{-1}(i|\beta|)=\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

Принимая во внимание (2.28) и невырожденность $\mathbf{X}_0(z)$, получим, что матрица $\mathbf{A}_3$ из (3.4) является положительно определенной [6], из чего следует [6], что $\alpha_{j,j}>0$, $j=1,2,3$. Это позволяет ввести в рассмотрение следующие матрицы

$$\mathbf{R}_1(z)=\left\|\delta_{k,j}-2\beta\delta_{k,2}\frac{\alpha_{11}\delta_{j,1}-i\,\mathrm{sgn}\,(\beta)\,\alpha_{23}\delta_{j,3}}{(\alpha_{11}+\alpha_{22})(z+i|\beta|)}\right\|_{k,j=\overline{1,3}} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{R}_3(z)=\mathbf{X}_0^{-1}(i|\beta|)\mathbf{R}_0\mathbf{\Lambda}_0(z)\mathbf{R}_1(z)\mathbf{R}_0^{-1}\mathbf{X}_0(i|\beta|)$$

Отметим, что $[\mathbf{R}_3(\bar z)]^*=[\mathbf{R}_3(z)]^{-1}$. В силу (3.3) матрица-функция $\mathbf{G}_0(z)\mathbf{R}_3(z)$ имеет в точке $z=-i|\beta|$ нулевые порядки столбцов и нулевой порядок определителя.

Таким образом каноническая [5] факторизация $(\rho^{-1}\mathbf{G}(t)=\mathbf{X}^+(t)\cdot$ $\cdot[\mathbf{X}^-(t)]^{-1}$, $-\infty<t<+\infty)$ матричного коэффициента задачи (1.14) осуществляется следующими матрицами:

$$\begin{gathered}
\mathbf{X}^\pm(z)=\rho_\pm(z)\mathbf{X}_3(z),\quad \mathbf{X}_3(z)=\mathbf{G}_0(z)\mathbf{R}_3(z)\\
\rho_\pm(z)=\exp\,(i\pi/4)(z\pm i|\beta|)^{\mp 1/2}\\
-\pi\pm\pi/2<\arg\,(z\pm i|\beta|)<\pi\pm\pi/2
\end{gathered} \tag{3.6}$$

составляющие которых определены формулами (2.1), (2.3), (2.4), (2.25) — (2.27), (2.9), (2.10), (2.15), (2.17)–(2.19), (2.22), (3.2), (3.4), (3.5). Из (2.28) с учетом аналогичного свойства $\mathbf{R}_3$ следует $[\mathbf{X}_3(\bar z)]^*$, $[\mathbf{X}^\pm(\bar z)]^*=$ $=[\mathbf{X}_3(z)]^{-1}$, $[\mathbf{X}^\mp(z)]^{-1}$, что согласуется с общей теорией факторизации эрмитовых положительно определенных матриц [16]. В соответствии с (2.21), (2.25), (2.26) имеем

$$X_3(z)=O(z^{i\beta_*})+O(z^{-i\beta_*})+O(1) \tag{3.7}$$

$$z\to\infty,\quad 2\pi\beta_*=\ln\,(3-4\mu)$$

Из представления (3.6) следует, что все три частных индекса [5] однородной задачи Римана с матричным коэффициентом $\mathbf{G}(t)$ равны нулю.

Таким образом задача Римана (1.14) в рассматриваемом классе имеет единственное решение, которое строится на основании проведенной факторизации (3.6) согласно [5]:

$$\varphi^{\pm}(z)=\sum_{j=0}^{4} C_j\varphi_j^{\pm}(z) \tag{3.8}$$

$$\varphi_0^{\pm}(z)=-\mathbf{X}^{\pm}(z)\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathbf{X}^{+}(\tau)]^{-1}\mathbf{g}_0(\tau)\frac{d\tau}{\tau-z}$$

$$\varphi_j^{+}(z)=-\mathbf{g}_j(z)+(z-i|\beta|)^{-2}\mathbf{X}^{+}(z)\mathbf{u}_j(z)$$

$$\varphi_j^{-}(z)=(z-i|\beta|)^{-2}\mathbf{X}^{-}(z)\mathbf{u}_j(z),\quad j=\overline{1,4}$$

$$\mathbf{u}_{2j-1}(z)=-\mathbf{T}_0\gamma_{2j}-(\mathbf{T}_1\gamma_{2j}+i\mathbf{T}_0\gamma_{2j-1})(z-i|\beta|)$$

$$\mathbf{u}_{2j}(z)=-i(z-i|\beta|)\mathbf{T}_0\gamma_{2j},\ j=1,\ 2$$

$$\mathbf{T}_j=(d/dz)^j([\mathbf{X}^{+}(z)]^{-1})|_{z=i|\beta|},\ j=0,\ 1$$

Среди всех составляющих каноническую факторизацию (3.6) только представления (2.25) и (2.15) содержат интегралы типа Коши. В [1] даны эффективные вычислительные формулы для $\Delta_1(z)$ из (2.25) основанные на том, что ее логарифмическая производная вычисляется в элементарных функциях. Аналогичным свойством обладает и логарифмическая производная $x_1(z,\ \omega)=(d/dz)x_0(z,\ \omega)$ функции $x(z,\ \omega)$ из (2.15). В этом можно убедиться, интегрируя по частям в интеграле типа Коши из (2.15) с помощью тождества

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\omega\xi^{-1}}{\tau-z}\right]+\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\omega\xi^{-1}}{\tau-z}\right]=\frac{P(z,\ \tau)}{2\omega\xi f(\tau)}$$

в котором $\omega^2=f(z)$, $\xi^2=f(\tau)$, а $P(z,\ \tau)$ — следующий многочлен двух переменных $P(z,\ \tau)=[f'(z)f(\tau)-f'(\tau)f(z)]/(\tau-z)$. При этом следует учесть (2.17) и следующее представление

$$\xi^{-1}\frac{d}{d\tau}\ln\frac{b_3(\rho(\tau))+\xi}{b_3(\rho(\tau))-\xi}=\alpha_0(\tau)+[\rho(\tau)]^{-1}\alpha_1(\tau)$$

в котором $\alpha_j(\tau)$, $j=0,\ 1$ — рациональные функции. Таким образом приходим к выражению следующей структуры

$$\begin{gathered} x_1(z,\ \omega)=i\beta_*\mu_1 z^2\omega^{-1}+s_0(z)+\omega^{-1}s_1(z)-\\ -iq_0(z^2+q_0^2)^{-1}(1+\xi_0\omega^{-1}),\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\\ x_1(z,\ \omega)=x_1(z,\ -\omega),\ \operatorname{Im} z\leqslant 0 \end{gathered} \tag{3.9}$$

где параметр β_* определен в (2.21), а $s_j(z)$, $j=0,\ 1$ — аналитические при $\operatorname{Im} z>-\delta\,(\delta>0)$ функции, представимые в виде

$$\begin{gathered} s_j(z)=\sigma_{j,\,0}(z)L(z)+\sigma_{j,\,1}(z),\ j=0,\ 1\\ \pi i L(z)=-(z^2+\beta^2)^{-1/2}\ln(s_2(z))\\ i|\beta|s_2(z)=z+(z^2+\beta^2)^{1/2},\ |\operatorname{Im}(\ln s_2)|<\pi\\ -\pi\pm\pi/2<\arg(z\pm i|\beta|)<\pi\pm\pi/2 \end{gathered} \tag{3.10}$$

в котором $\sigma_{j,\,\alpha}(z)$, j, $\alpha=0,\ 1$ — рациональные функции аргумента z, причем

$$\sigma_{j,\alpha}(z)=O(z^{3j-1-\alpha}),\quad z\to\infty;\ j;\ \alpha=0,\ 1 \tag{3.11}$$

Функцию $x(z,\ \omega)$ можно однозначно восстановить из (3.9), (3.10), учитывая, что

$$x(0+i0,\ \pm(f(0))^{1/2})=(-1)^n[\rho(0)]^{-3/2}[b_3(\rho(0))\pm(f(0))^{1/2}]^{1/2}$$

Таким образом представления (3.9), (3.10) позволяют получить эффективные формулы для канонической факторизации (3.6). Кроме того, исходя непосредственно из представлений (3.9)—(3.11), можно получить, что факторизационный множитель $X_3(z)$ (3.6) обладает асимптотикой (3.7).

4. Решение поставленной задачи. Подставляя (3.8) в (1.15), получим решение интегральных уравнений (1.12). В том, что это решение действительно принадлежит классу (1.9), можно убедиться, преобразовав интегралы (1.15), (3.8) к виду

$$\mathbf{p}_\beta(x)\mathbf{p}_\beta^{(\infty)}(x)+\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \rho(t)\mathbf{G}^{-1}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)e^{ixt}dt+i\sum_{j=1}^{2}\mathbf{b}_j\exp(i\lambda_j x),\quad x>0 \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{\varphi}_0^+(t)+\mathbf{X}^+(t)\mathbf{u}(t),\quad \mathbf{u}(t)=\sum_{j=1}^{4}C_j\mathbf{u}_j(t),$$

$$\mathbf{b}_j=\lim_{t\to\lambda_j}\rho(t)G^{-1}(t)\Phi(t),$$

$$\lambda_1=(\rho_1^2-\beta^2)^{1/2},\ \lambda_2=(\bar\rho_1^2-\beta^2)^{1/2},\ \operatorname{Im}\lambda_j>0$$

Здесь $p_\beta^{(\infty)}(x)$ — трансформанта Фурье (по переменной y) вектора контактных напряжений между упругим полупространством и сцепленной с ним бесконечной пластиной, загруженной той же нагрузкой $q_j(x, y)$, $j=1, 2, 3$. Контур интегрирования γ обходит луч мнимой оси $[i|\beta|, +i\infty)$ от $+i\infty-0$ до $+i\infty+0$ таким образом, что точки λ_j, $j=1, 2$ и вещественная ось остаются вне замыкания области ограниченной этим контуром. Представление (4.1) можно получить с помощью теоремы о вычетах [14], предварительно преобразовав $\boldsymbol{\varphi}^-(t)$ в соответствии с (1.14), (3.8). Отметим, что при $x\to 0$ для $\mathbf{p}_\beta(x)$ имеет место асимптотика $O(x^{-1/2+i\beta_*})+O\cdot(x^{-1/2-i\beta_*})+O(x^{-1/2})$, которая следует [15] из (3.6)—(3.8).

Реализация условий (1.7) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно вектора $\mathbf{C}=\|C_1, C_2, C_3, C_4\|_*$ неизвестных постоянных

$$\mathbf{N}_0(0)\mathbf{C}=\mathbf{n}_q(0),\ \mathbf{N}_0(x)=\mathbf{D}_1(\partial_x)[\mathbf{F}_+(x)+\mathbf{F}_-(x, -i|\beta|)] \tag{4.2}$$

$$\mathbf{n}_q(x)=\mathbf{D}_2(\partial_x)\boldsymbol{\varepsilon}_2(x, -i|\beta|)-\mathbf{D}_1(\partial_x)\boldsymbol{\varepsilon}_1(x, -i|\beta|)$$

$$2\mathbf{F}_+(x)=\|f_1(x), f_2(x), \gamma_0 xe^{-|\beta|x}, \gamma_0 e^{-|\beta|x}\|$$

$$\|\mathbf{F}_-, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2\|(x, t)=i\partial_t[(t-i|\beta|)^{-2}e^{ixt}\times$$

$$\times\mathbf{N}\|\mathbf{M}^*\boldsymbol{\Phi}^-, \mathbf{M}^*\boldsymbol{\varphi}_0^-, \mathbf{M}_*\mathbf{h}_0^-\|(t)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_0=\|0, 0, 1\|_*,\ \boldsymbol{\Phi}^-(t)=\|\varphi_1^-, \varphi_2^-, \varphi_3^-, \varphi_4^-\|(t)$$

где матрицы $\mathbf{N}=\mathbf{N}(t, \beta)$, $M=M(t, \beta)$ и вектор-столбцы $\mathbf{f}_j(x)$, $j=\overline{1, 4}$ определены в (1.11), вектор-столбцы $\varphi_j^-(t)$, $j=\overline{1, 4}$ — в (3.8), $\mathbf{D}_j(\partial_x)$, $j=1,2$ — матричные дифференциальные операторы, порожденные следующими матрицами

$$\mathbf{D}_j(u)=\begin{Vmatrix} u & i\nu\beta & 0 \\ i\beta & u & 0 \\ \eta_j(u^2-\nu_-\beta^2) & i\eta_j\beta\nu_+u & (2-\nu)\beta^2u-u^3 \\ 0 & 0 & \nu\beta^2-u^2 \end{Vmatrix}$$

$\eta_j=k(j-1)$, $j=1, 2$

Матрица $\mathbf{N}_0(0)$ в силу замечания 1 является невырожденной. Трансформанты Фурье (по переменной y) расчетных усилий в пластине найдем, исходя из представления

$$4\pi w_{3,\beta}(x)=\|0, 0, 1\|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}\mathbf{H}(t, \beta)\boldsymbol{\varphi}^-(t)\rho^{-1}dt \tag{4.3}$$

которое следует из (1.5) и теоремы о свертке. Интеграл (4.3) можно преобразовать к виду (4.1), заменив в соответствии с (1.14), (4.1) $(\mathbf{H}\varphi^-)\rho^{-1}$ на $\varphi^+ + \Sigma_{j=0}^{4} C_j g_j - 2\rho^{-3}\mathbf{A}_0 \times \mathbf{G}^{-1}[\Phi + g_0]$, а, затем, используя приемы контурного интегрирования [14]. Приведем формулы для изгибающего момента $M_x = -D(\partial_x^2 + \nu\partial_y^2)w_3$ в случае, когда на торце пластины $x=0$ действует распределенная вертикальная (вдоль оси z) нагрузка $V(y)$, $-\infty < y < +\infty$ $(q_j(x, y) \equiv 0, j=1, 2, 3)$:

$$c^{-2}M_x(cx, cy) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta y} M_\beta(x)\, d\beta,$$

$$M_\beta(x) = M_\beta^{(0)}(x) - {}^1/_2(\partial_x^2 - \nu\beta^2)[e^{-|\beta|x}(C_3 x + C_4)]$$

$$M_\beta^{(0)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_{|\beta|}^{\infty} [ixF_1(i\tau) + F_1'(i\tau)] \frac{e^{-\tau x} d\tau}{(\tau - |\beta|)^{1/2}} +$$

$$+ i[F_0'(i|\beta|) + ixF_0(i|\beta|)]e^{-|\beta|x} + \sum_{j=1}^{2} s_j e^{i\lambda_j x}$$

$$s_j = \lim_{t \to \lambda_j} (t - \lambda_j)\rho_+(t)[\rho_-(t)]^{-4} F(t, \rho(t))$$

$$2[\rho(t)]^\alpha [\rho_+(t)]^{\alpha-1} F_\alpha(t) = F(t, \rho(t)) +$$
$$+ (-1)^\alpha F(t, -\rho(t)),\ \alpha = 0, 1;\ \rho(t) = (t^2 + \beta^2)^{1/2}$$

$$F(t, \rho) d(\rho)(t^2 + \nu\beta^2)^{-1} = \|itv_1(\rho), i\beta v_1(\rho), v_2(\rho)\| \mathbf{X}_3(t)\mathbf{u}(t)$$

$$v_1(\rho) = ik\rho + \mu_1,\quad v_2(\rho) = k\mu_1\rho^2 + \rho + 2k^2/3 \tag{4.4}$$

Компоненты, входящие в (4.4), определены в формулах (2.13), (2.14), (3.6), (3.8), (4.1). При этом постоянные C_j, $j=\overline{1, 4}$ находятся из системы (4.2), в которой следует принять

$$\mathbf{n}_q(0) = c^{-1}\|0, 0, 1, 0\|_* \int_{-\infty}^{+\infty} V(c\tau) e^{-i\beta\tau} d\tau$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов Г. Я.* Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно деформируемом основании // ПММ, 1961. Т. 25. Вып. 2. С. 342–355.
2. *Воробьев В. Л., Попов Г. Я.* Изгиб полубесконечной пластинки, сцепленной с линейно деформируемым основанием общего типа // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 4. С. 60–68.
3. *Попов Г. Я.* Пластинки на линейно деформируемом основании // Прикл. механ., 1972. Т. 8. Вып. 3.
4. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений подкреплений. // М.: Наука. 1982. 344 с.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы n-пар функций // УМН, 1952. Т. 7. Вып. 4. С. 3–54.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
7. *Моисеев Н. Г.* О факторизации матриц-функций специального вида // ДАН СССР. 1989. Т. 305. Вып. 1. С. 44–47.
8. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. М.-Л., Гостехиздат, 1948. 396 с.
9. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М.; ИЛ. 1960. 343 с.
10. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // УМН. 1971. Т. 26. Вып. 1. С. 113–179.
11. *Храпков А. А.* Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 4. С. 677–689.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971. 1108 с.
13. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука. 1977. 640 с.
14. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
15. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л., Гостехиздат, 1948.
16. *Шмульян Ю. Л.* Задача Римана с положительно определенной матрицей // УМН. 1953. Т. 8. Вып. 2. С. 143–145.

Одесса

Поступила в редакцию 21.IX.1990