МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1990

УДК 539.3

Л. М. ЗУБОВ

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ИНВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Формулируются принципы стационарности, обобщающие вариационные теоремы нелинейной теории упругости [1] на случай континуума Коссера – среды, обладающей вращательными степенями свободы и моментными напряжениями. При помощи модели континуума Коссера можно описывать микронеоднородные среды, к которым относятся поликристаллические материалы с зернистым строением, композиты, полимеры, геофизические среды, жидкие кристаллы и т. д. Примером двумерной модели моментной среды является теория оболочек.

Для нелинейно-упругого континуума Коссера, испытывающего большие деформации, строятся инвариантные энергетические поверхностные и контурные интегралы, аналогичные интегралам Эшелби и Черепанова – Райса и определяющие силу сопротивления продвижению трещины или другого дефекта. При помощи инвариантного интеграла сформулирован энергетический критерий распространения трещины в среде с моментными напряжениями.

1. Система уравнений, описывающих конечные деформации упругой среды с моментными напряжениями, состоит [2–6] из уравнений равновесия относительно статических величин

$$\operatorname{Div}\mathbf{T}+\rho_1\mathbf{k}=0,\quad \operatorname{Div}\mathbf{M}+\mathbf{T}_\times+\rho_1\mathbf{l}=0 \tag{1.1}$$

определяющих соотношений, связывающих статические величины с кинематическими

$$\mathbf{T}=A^{-1}(\operatorname{grad}R)^T\cdot\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{H},\quad A=\det(\operatorname{grad}\mathbf{R}),$$
$$\mathbf{M}=A^{-1}(\operatorname{grad}\mathbf{R})^T\cdot\mathbf{M}^*\cdot\mathbf{H}$$
$$\mathbf{T}^*=\partial W/\partial\mathbf{U},\quad \mathbf{M}^*=\partial W/\partial\boldsymbol{\varkappa},\quad W=W(\mathbf{U},\boldsymbol{\varkappa}) \tag{1.2}$$

и формул, выражающих кинематические величины через поле перемещений и микроповоротов упругого тела

$$\mathbf{U}=(\operatorname{grad}\mathbf{R})\cdot\mathbf{H}^T,\quad -\boldsymbol{\varkappa}\times\mathbf{E}=(\operatorname{grad}\mathbf{H})\cdot\mathbf{H}^T$$
$$\boldsymbol{\varkappa}={}^1/_2\mathbf{i}_k[(\partial\mathbf{H}/\partial y_k)\cdot\mathbf{H}^T]_\times \tag{1.3}$$

В (1.1)–(1.3) $\mathbf{T}$ – тензор напряжений, $\mathbf{M}$ – тензор моментных напряжений, ρ_1 – плотность материала в деформированном состоянии, $\mathbf{k}$ – вектор массовой силы, $\mathbf{l}$ – вектор моментной нагрузки, приходящийся на единицу массы, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ – векторы места частицы тела соответственно в отсчетной и деформированной конфигурациях, $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, $\mathbf{H}=(\mathbf{H}^T)^{-1}$ – тензор микроповорота, определяющий ориентацию частицы континуума Коссера, $\mathbf{U}$ – мера деформации, $\boldsymbol{\varkappa}$ – тензор изгибной деформации, y_m – декартовы координаты в отсчетной (недеформированной) конфигурации тела, $\mathbf{i}_m$ – координатные орты, W – удельная потенциальная энергия деформации, $\mathbf{E}$ – единичный тензор. Символ $\mathbf{P}_\times$ означает векторный инвариант тензора второго ранга $\mathbf{P}:(P_{sm}\mathbf{i}_s\mathbf{i}_m)_\times=P_{sm}\mathbf{i}_s\times\mathbf{i}_m$. В формулах (1.1)–(1.3) и ниже употребляются следующие дифференциальные операции $\operatorname{grad}\mathbf{X}=\mathbf{i}_m\partial\mathbf{X}/\partial y_m$, $\operatorname{div}\mathbf{X}=\mathbf{i}_m\cdot\partial\mathbf{X}/\partial y_m$, $\operatorname{rot}\mathbf{X}=\mathbf{i}_m\times\partial\mathbf{X}/\partial y_m$, $\operatorname{Grad}\mathbf{X}=\mathbf{i}_m\partial\mathbf{X}/\partial Y_m$, $\operatorname{Div}\mathbf{X}=\mathbf{i}_m\cdot\partial\mathbf{X}/\partial Y_m$, где $\mathbf{X}$ – дифференцируемое тензорное поле произвольного ранга, Y_m — декартовы координаты точек тела в деформированном состоянии.

Статические граничные условия на поверхности Σ деформированного тела, имеющей единичную нормаль $\mathbf{N}$, записываются в виде

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{f}_1,\quad \mathbf{N}\cdot\mathbf{M}=\boldsymbol{\mu}_1 \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{f}_1$ и $\boldsymbol{\mu}_1$ — интенсивности силовой и моментной нагрузок на единицу площади в деформированной конфигурации.

Тензоры $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ аналогичны тензору напряжений Коши в теории упругости простых материалов, а тензоры $\mathbf{T}^*$, $\mathbf{M}^*$ являются аналогами тензора напряжений Кирхгофа. Введя аналоги тензора напряжений Пиолы [7]:

$$\mathbf{D}=\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{H},\quad \mathbf{G}=\mathbf{M}^*\cdot\mathbf{H} \tag{1.5}$$

уравнения равновесия (1.1) и статические граничные условия (1.4) можно переписать в геометрии отсчетной конфигурации

$$\operatorname{Div}\mathbf{D}+\rho\mathbf{k}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{G}+[(\operatorname{grad}\mathbf{R})^T\cdot\mathbf{D}]_\times+\rho\mathbf{l}=0 \tag{1.6}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}=\mathbf{f},\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{G}=\boldsymbol{\mu},\quad \mathbf{f}d\sigma=\mathbf{f}_1d\Sigma,\quad \boldsymbol{\mu}d\sigma=\boldsymbol{\mu}_1d\Sigma \tag{1.7}$$

Здесь ρ — плотность в отсчетной конфигурации, $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности σ, ограничивающей тело в недеформированном состоянии, $\mathbf{f}$ и $\boldsymbol{\mu}$ — интенсивности нагрузок, рассчитанные на единицу площади в отсчетной конфигурации.

Ортогональный тензор $\mathbf{H}$ можно представить через вектор $\boldsymbol{\theta}$ [8], называемый в дальнейшем вектором микроповорота

$$\mathbf{H}=\mathbf{S}_+^{-1}\cdot\mathbf{S}_-=\mathbf{S}_-\cdot\mathbf{S}_+^{-1},\quad \mathbf{S}_\pm=\mathbf{E}\pm{}^1/_2\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta} \tag{1.8}$$

Вектор $\boldsymbol{\theta}$ выражается через тензор $\mathbf{H}$ по формуле [8]:

$$\boldsymbol{\theta}=2(1+\operatorname{tr}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}_\times \tag{1.9}$$

Из (1.3), (1.8) получим представление тензора изгибной деформации через вектор микроповорота

$$\boldsymbol{\varkappa}=\eta(\operatorname{grad}\boldsymbol{\theta})\cdot(\mathbf{E}+{}^1/_2\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}),\quad \eta=(1+{}^1/_4\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta})^{-1} \tag{1.10}$$

2. Разобьем границу σ упругого тела в отсчетной конфигурации на две непересекающиеся части двумя способами: $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$ и $\sigma=\sigma_3\cup\sigma_4$. Будем предполагать, что на σ_1 задан вектор перемещений, на σ_2 — силовая нагрузка, на σ_3 задан вектор микроповорота, на σ_4 приложена моментная нагрузка. Таким образом имеем следующие краевые условия

$$\sigma_1:\quad \mathbf{R}=\mathbf{R}_0 \tag{2.1}$$

$$\sigma_2:\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}=\mathbf{f} \tag{2.2}$$

$$\sigma_3:\quad \boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0 \tag{2.3}$$

$$\sigma_4:\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{G}=\boldsymbol{\mu} \tag{2.4}$$

где $\mathbf{R}_0$, $\boldsymbol{\theta}_0$ — заданные функции точек поверхности. Интенсивность нагрузок $\mathbf{f}$ и $\boldsymbol{\mu}$ в общем случае зависит не только от координат на поверхности, но и от перемещений и микроповоротов. Более точно, будем предполагать, что векторы $\mathbf{f}$ и $\boldsymbol{\mu}$ в данной точке поверхности являются заданными функциями перемещений, микроповоротов и их первых производных в этой же точке

$$\mathbf{f}=\mathbf{f}(\mathbf{r},\ \mathbf{R},\ \operatorname{grad}\mathbf{R},\ \boldsymbol{\theta},\ \operatorname{grad}\boldsymbol{\theta}) \tag{2.5}$$

Соотношение, аналогичное (2.5), выполняется для моментной поверхностной нагрузки $\boldsymbol{\mu}$, а также для массовых нагрузок $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$.

Используя (1.2), (1.3), (1.5), а также соотношения

$$\delta\mathbf{H}=-\mathbf{H}\times\boldsymbol{\psi},\quad \delta\boldsymbol{\varkappa}=(\operatorname{grad}\boldsymbol{\psi})\cdot\mathbf{H}^T$$

$$\boldsymbol{\psi}=\eta(\delta\boldsymbol{\theta}+{}^1/_2\boldsymbol{\theta}\times\delta\boldsymbol{\theta}) \tag{2.6}$$

можно проверить, что уравнения равновесия (1.6) и статические краевые условия (2.2), (2.4) вытекают из вариационного уравнения

$$\delta \int_v W dv = \int_v \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{R} dv + \int_{\sigma_2} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R}\, d\sigma + \int_v \rho \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dv + \int_{\sigma_4} \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dv \tag{2.7}$$

в котором вариации $\delta \mathbf{R}$ и $\delta \boldsymbol{\theta}$ подчинены условиям: $\delta \mathbf{R}=0$ на σ_1, $\delta \boldsymbol{\theta}=0$ на σ_3, а v — объем тела в отсчетной конфигурации. Правая часть (2.7) представляет собой элементарную работу внешних нагрузок и в общем случае не является вариацией какого-либо функционала. Если же такой функционал существует, то нагрузка называется консервативной. Используя [9], можно показать, что необходимое и достаточное условие консервативности нагрузки имеет вид

$$F[\delta \mathbf{R}, \delta \boldsymbol{\theta}, \delta' \mathbf{R}, \delta' \boldsymbol{\theta}] = F[\delta' \mathbf{R}, \delta' \boldsymbol{\theta}, \delta \mathbf{R}, \delta \boldsymbol{\theta}]\ \forall \delta \mathbf{R}, \delta' \mathbf{R}, \delta \boldsymbol{\theta}, \delta' \boldsymbol{\theta} \tag{2.8}$$

Здесь билинейный функционал F определяется следующим образом

$$F[\delta \mathbf{R}, \delta \boldsymbol{\theta}, \delta' \mathbf{R}, \delta' \boldsymbol{\theta}] = \int_v [\rho \delta' \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{R} + \rho \delta' \mathbf{l} \cdot \eta (\mathbf{E} + {}^1/_2 \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} + \tag{2.9}$$

$$+ \rho \delta' \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\theta}] dv + \int_{\sigma_2} \delta' \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R}\, d\sigma + \int_{\sigma_4} [\eta \delta' \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{E} + {}^1/_2 \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} + \delta' \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}_2 \cdot \delta \boldsymbol{\theta}] d\sigma$$

$$\mathbf{L}_1 = -{}^1/_2 \eta \mathbf{l} \times \mathbf{E} - {}^1/_2 \eta^2 \boldsymbol{\theta} (\mathbf{l} + {}^1/_2 \mathbf{l} \times \boldsymbol{\theta})$$

$$\mathbf{L}_2 = -{}^1/_2 \eta \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E} - {}^1/_2 \eta^2 \boldsymbol{\theta} (\boldsymbol{\mu} + {}^1/_2 \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\theta})$$

$$\delta \mathbf{f} \equiv (\partial \mathbf{f} / \partial R) \cdot \delta \mathbf{R} + (\partial \mathbf{f} / \partial \operatorname{grad} \mathbf{R}) \cdot\cdot (\operatorname{grad} \delta \mathbf{R})^T +$$

$$+ (\partial \mathbf{f} / \partial \boldsymbol{\theta}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} + (\partial \mathbf{f} / \partial \operatorname{grad} \boldsymbol{\theta}) \cdot\cdot (\operatorname{grad} \delta \boldsymbol{\theta})^T \tag{2.10}$$

Аналогично (2.10) записываются $\delta \mathbf{k}$, $\delta \mathbf{l}$, $\delta \boldsymbol{\mu}$. Выражение $\delta' \mathbf{f}$ получается из (2.10) заменой $\delta \mathbf{R}$, $\delta \boldsymbol{\theta}$ на $\delta' \mathbf{R}$, $\delta' \boldsymbol{\theta}$.

При выполнении условия (2.8) элементарная работа внешних нагрузок будет вариацией некоторого функционала $A[\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta}]$, называемого потенциалом внешних сил. Здесь и в дальнейшем в качестве аргументов функционала указываются варьируемые функции. В случае консервативного нагружения вариационное уравнение (2.7) превращается в вариационный принцип типа Лагранжа — принцип стационарности функционала потенциальной энергии упругого тела

$$\Pi_1[\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta}] = \int_v W dv - A[\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta}] \tag{2.11}$$

Среди всех дважды дифференцируемых векторных полей $\mathbf{R}$ и $\boldsymbol{\theta}$, подчиненных условиям (2.1), (2.3), стационарное значение функционалу Π_1 сообщают только те поля, которые удовлетворяют уравнениям равновесия (1.6) и статическим краевым условиям (2.2), (2.4).

В вариационном принципе типа Ху — Васидзу главными граничными условиями являются ограничения (2.2) на вектор микроповорота, а условия (2.1), (2.3), (2.4) будут естественными. Функционал этого принципа стационарности имеет вид

$$\Pi_2[\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\varkappa}, \mathbf{D}, \mathbf{M}^*] = \int_v [W(\mathbf{U}, \boldsymbol{\varkappa}) - \mathbf{D}^T \cdot\cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{H} - \operatorname{grad} \mathbf{R}) -$$

$$- \mathbf{M}^{*T} \cdot\cdot (\boldsymbol{\varkappa} - \eta (\operatorname{grad} \boldsymbol{\theta}) \cdot (\mathbf{E} + {}^1/_2 \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta})] dv - \int_{\sigma_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) d\sigma - A[\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta}] \tag{2.12}$$

В (2.12) независимо варьируются перемещения, микроповороты, мера деформации, тензор изгибной деформации, тензор напряжений Пиолы и тензор моментных напряжений Кирхгофа. Уравнениями Эйлера — Лагранжа вариационной задачи $\delta \Pi_2 = 0$ служат уравнения равновесия (1.6), определяющие соотношения (1.2) и геометрические соотношения (1.3).

3. Введем в рассмотрение удельную дополнительную энергию V как функцию тензоров $\mathbf{T}^*$ и $\mathbf{M}^*$, связанную с удельной потенциальной энергией W преобразованием Лежандра

$$V(\mathbf{T}^*,\ \mathbf{M}^*)=\mathbf{T}^*\cdot\cdot\mathbf{U}^T+\mathbf{M}^*\cdot\cdot\boldsymbol{\varkappa}^T-W \tag{3.1}$$

По свойству преобразования Лежандра имеем

$$\mathbf{U}=\partial V/\partial\mathbf{T}^*,\quad \boldsymbol{\varkappa}=\partial V/\partial\mathbf{M}^* \tag{3.2}$$

В (3.1), (3.2) предполагается, что меры деформации $\mathbf{U}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$ выражены через тензоры $\mathbf{T}^*$ и $\mathbf{M}^*$, т. е. выполнено обращение определяющих соотношений (1.2).

С использованием удельной дополнительной энергии формируется принцип типа Рейсснера с функционалом

$$\Pi_3[\mathbf{R},\boldsymbol{\theta},\mathbf{T}^*,\mathbf{M}^*]=\int\limits_v [\mathbf{T}^{*T}\cdot\cdot((\operatorname{grad}\mathbf{R})\cdot\mathbf{H}^T)+\mathbf{M}^{*T}\cdot\cdot(\eta\operatorname{grad}\boldsymbol{\theta})\cdot$$
$$\cdot(\mathbf{E}+{}^1/_2\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta})-V(\mathbf{T}^*,\mathbf{M}^*)]dv-A[\mathbf{R},\boldsymbol{\theta}] \tag{3.3}$$

Здесь варьируемые функции $\mathbf{R}$ и $\boldsymbol{\theta}$ должны быть подчинены геометрическим условиям (2.1) и (2.3). Следствиями стационарности функционала Π_3 являются уравнения равновесия (1.6), определяющие соотношения $(\operatorname{grad}\mathbf{R})\cdot\mathbf{H}^T=\partial V/\partial\mathbf{T}^*$, $\eta(\operatorname{grad}\boldsymbol{\theta})\cdot(\mathbf{E}+{}^1/_2\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta})=\partial V/\partial\mathbf{M}^*$ и статические краевые условия (2.2), (2.4).

Из системы уравнений (1.1)—(1.3), описывающей равновесие упругого континуума Коссера, можно исключить вектор-функцию $\mathbf{R}$, определяющую положение частиц тела после деформации. Для этого перепишем первое соотношение в (1.3) в форме $\operatorname{grad}\mathbf{R}=\mathbf{U}\cdot\mathbf{H}$, откуда приходим к следующему уравнению совместности

$$\operatorname{rot}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{H})=0 \tag{3.4}$$

При выполнении условия (3.4) векторное поле $\mathbf{R}$ определяется квадратурами через тензорное поле $\mathbf{U}\cdot\mathbf{H}$. При мертвой массовой силе, т. е. в случае, когда вектор $\mathbf{k}$ — известная функция координат y_s, первому из уравнений равновесия (1.6) можно тождественно удовлетворить [1] при помощи тензора функций напряжений $\boldsymbol{\Phi}$:

$$\mathbf{D}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\Phi}+\mathbf{D}_0 \tag{3.5}$$

где $\boldsymbol{\Phi}$ — дважды дифференцируемый тензор второго ранга, $\mathbf{D}_0$ — некоторое частное решение первого уравнения из (1.6), соответствующее массовой нагрузке $\mathbf{k}(\mathbf{r})$. Если далее выразить меру деформации $\mathbf{U}$ через тензоры $\mathbf{T}^*$ и $\mathbf{M}^*$ и учесть (1.5), то полная система нелинейных уравнений эластостатики моментной среды будет состоять из уравнения совместности (3.4) и уравнения равновесия моментов и содержать в качестве неизвестных функции $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{\theta}$. Применение функций напряжений, тождественно удовлетворяющих уравнению равновесия сил, особенно удобно в плоских задачах, а также в теории оболочек типа Коссера. Кроме того, систему уравнений равновесия, не содержащую поля перемещений, можно эффективно использовать при наличии в упругом теле трансляционных дислокаций.

Система разрешающих уравнений эластостатики моментного упругого тела, не содержащая вектора перемещений, вытекает из вариационного принципа типа Кастильяно. При формулировке этого принципа будем предполагать, что как массовые силы, так и силы, распределенные по поверхности σ_2, являются мертвыми, т. е. векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{f}$ — заданные функции координат y_m. Потенциал моментной нагрузки считается независимым от поля перемещений:

$$\int\limits_v \rho\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\psi}\,dv+\int\limits_{\sigma_4}\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\psi}\,d\sigma=\delta A[\boldsymbol{\theta}] \tag{3.6}$$

Граничные условия на σ_2 записываются через тензор функций напряжений следующим образом

$$\nabla(\mathbf{e}\cdot\mathbf{\Phi})=\mathbf{f}-\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_0, \quad \mathbf{e}=-\mathbf{E}\times\mathbf{n}, \quad \nabla=(\mathbf{E}-\mathbf{nn})\cdot\mathrm{grad} \tag{3.7}$$

Здесь ∇ — двумерный оператор градиента на поверхности [8], $\mathbf{e}$ — дискриминантный тензор поверхности.

Имея в виду формулу (1.5), удельную дополнительную энергию V будем считать функцией тензоров $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}^*$. Это приводит к соотношению

$$\delta V=\mathbf{U}^T\cdot\cdot(\delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{H}^T+\mathbf{D}\cdot\delta\mathbf{H}^T)+(\partial V/\partial\mathbf{M}^*)\cdot\cdot\delta\mathbf{M}^{*T} \tag{3.8}$$

Функционал принципа типа Кастильяно нелинейной моментной теории упругости имеет вид

$$\Pi_4[\mathbf{\Phi},\boldsymbol{\theta},\mathbf{M}^*]=\int_v[V(\mathbf{D}(\mathbf{\Phi}),\boldsymbol{\theta},\mathbf{M}^*)-\mathbf{M}^{*T}\cdot\cdot\boldsymbol{\eta}(\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\theta})\cdot(\mathbf{E}+{}^1/{}_2\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta})]dv+$$
$$+A[\boldsymbol{\theta}]-\int_{\sigma_1}\mathbf{R}_0\cdot(\nabla\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{\Phi})d\sigma \tag{3.9}$$

В (3.9) через $\mathbf{D}(\mathbf{\Phi})$ обозначено выражение (3.5), определяющее статически возможные напряжения. Варьируемые функции напряжений должны удовлетворять условиям (3.7) на σ_2, а поле микроповоротов — условиям (2.3). На основании (2.6), (3.5), (3.8) вариация функционала (3.9) приводится к виду

$$\delta\Pi_4=\int_v\mathrm{tr}[\delta\mathbf{\Phi}^T\cdot\mathrm{rot}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{H})]dv+\int_v[\partial V/\partial\mathbf{M}^*-\boldsymbol{\eta}(\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\theta})\cdot$$
$$\cdot(\mathbf{E}+{}^1/{}_2\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta})]\cdot\cdot\delta\mathbf{M}^{*T}dv+\int_v[\mathrm{div}(\mathbf{M}^*\cdot\mathbf{H})+(\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{U}^T\cdot\mathbf{D})_\times+\rho\mathbf{l}]\cdot\boldsymbol{\psi}\,dv-$$
$$-\int_{\sigma_1}\mathrm{tr}(\mathbf{e}\cdot\delta\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{U}^T)d\sigma-\int_{\sigma_1}\mathbf{R}_0\cdot(\nabla\cdot\mathbf{e}\cdot\delta\mathbf{\Phi})d\sigma-$$
$$-\int_{\sigma_2}\mathrm{tr}(\mathbf{e}\cdot\delta\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{U}^T)d\sigma-\int_{\sigma_4}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}^*\cdot\mathbf{H}-\boldsymbol{\mu})\cdot\boldsymbol{\psi}d\sigma$$

Пусть $\delta\Pi_4=0$. Положив сначала на $\sigma:\delta\mathbf{\Phi}=0$ и $\delta\boldsymbol{\theta}=0$ (это совместимо с ограничениями (2.3), (3.7)), в силу основной леммы вариационного исчисления приходим к уравнению совместности (3.4), уравнению равновесия моментов и соотношению $\partial V/\partial\mathbf{M}^*=\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\theta})$. Уравнение (3.4) означает, что в области v существует векторное поле $\mathbf{R}$, градиент которого есть $\mathbf{U}\cdot\mathbf{H}$. В односвязном объеме $\mathbf{R}$ — однозначная функция координат, определенная с точностью до аддитивной векторной постоянной. Учитывая это и выполнив вычисление, описанное в [10] и связанное с преобразованием поверхностных интегралов в контурные, приведем к такому равенству

$$\int_{\sigma_2}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0)\cdot(\nabla\cdot\mathbf{e}\cdot\delta\mathbf{\Phi})d\sigma+\int_{\sigma_4}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}^*\cdot\mathbf{H}-\boldsymbol{\mu})\cdot\boldsymbol{\psi}\,d\sigma=0$$

Таким образом, уравнения совместности и равновесия моментов являются уравнениями Эйлера — Лагранжа для функционала типа Кастильяно, а условия (2.1) и (2.4) — естественными краевыми условиями.

Если объем v неодносвязен, то аналогично [10] можно показать, что из стационарности функционала (3.9) следует однозначность перемещений в области v.

Из принципа стационарности типа Тонти с функционалом

$$\Pi_5[\mathbf{U},\boldsymbol{\theta},\mathbf{\Phi}]=\int_v[(\mathrm{rot}\,\mathbf{\Phi}+\mathbf{D}_0)\cdot\cdot(\mathbf{U}\cdot\mathbf{H})^T-$$
$$-W(\mathbf{U},\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\theta}))]dv+A[\boldsymbol{\theta}]-\int_{\sigma_1}\mathbf{R}_0\cdot(\nabla\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{\Phi})d\sigma$$

вытекают уравнение совместности (3.4), уравнение равновесия моментов, определяющее соотношение $(\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}+\mathbf{D}_0)\cdot\mathbf{H}^T=\partial W/\partial\mathbf{U}$ и граничные условия (2.1), (2.4). Доказательство этого принципа аналогично предыдущему.

Сформулированные выше принципы стационарности можно перенести на двумерную моментную среду, т. е. на теорию оболочек Коссера. Этот случай имеет специфические особенности и требует отдельного изложения.

4. Рассмотрим поверхностный интеграл $\mathbf{I}$, определенный на действительных полях перемещений и микроповоротов, т. е. полях, удовлетворяющих уравнениям равновесия (1.1)

$$\mathbf{I}=\int_{\sigma_0}\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}\,d\sigma,\quad \mathbf{P}=(W-\rho\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})\mathbf{E}-\mathbf{D}\cdot(\operatorname{grad}\mathbf{R})^T-\mathbf{G}\cdot\mathbf{H}^T\cdot\boldsymbol{\varkappa}^T=$$
$$=(W-\rho\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})\mathbf{E}-\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{U}^T-\mathbf{M}^*\cdot\boldsymbol{\varkappa}^T \tag{4.1}$$

Докажем следующую теорему.

При мертвой и постоянной массовой силе $\mathbf{k}$ и отсутствии массовых моментов интеграл (4.1) обращается в нуль для любой замкнутой кусочно-гладкой поверхности σ_0, имеющей внешнюю нормаль $\mathbf{n}$ и ограничивающей область v_0, в которой материал тела однороден, а тензоры $\mathbf{U}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$ — непрерывно дифференцируемые функции координат.

Так как тензор $\mathbf{H}$ — ортогональный, тензоры $\mathbf{H}^T\cdot\partial\mathbf{H}/\partial y_m$ ($m=1, 2, 3$) будут антисимметричны и их можно представить через векторы $\mathbf{K}_m$ следующим образом

$$\mathbf{H}^T\cdot\partial\mathbf{H}/\partial y_m=-\mathbf{E}\times\mathbf{K}_m \tag{4.2}$$

Из (1.3) и (4.2) имеем

$$\boldsymbol{\varkappa}=\mathbf{i}_s\mathbf{K}_s\cdot\mathbf{H}^T \tag{4.3}$$

При помощи (4.3) и вытекающего из (4.2) тождества $\partial\mathbf{K}_m/\partial y_s=\partial\mathbf{K}_s/\partial y_m-\mathbf{K}_m\times\mathbf{K}_s$ доказывается соотношение

$$(\partial\boldsymbol{\varkappa}/\partial y_m)\cdot\mathbf{H}=\operatorname{grad}\mathbf{K}_m \tag{4.4}$$

Для однородного тела удельная потенциальная энергия W, являющаяся функцией тензоров $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, не зависит явно от координат y_s. Отсюда на основании (1.2), (1.3), (1.5), (4.2) и (4.4) получаем

$$\begin{aligned}\partial W/\partial y_s&=(\partial W/\partial\mathbf{U})^T\cdot\cdot\,\partial\mathbf{U}/\partial y_s+\\&+(\partial W/\partial\boldsymbol{\varkappa})^T\cdot\cdot\,\partial\boldsymbol{\varkappa}/\partial y_s=\\&=-\operatorname{tr}[(\operatorname{grad}\mathbf{R})^T\cdot\mathbf{D}\times\mathbf{K}_s]+\operatorname{tr}(\mathbf{D}^T\cdot\partial\operatorname{grad}\mathbf{R}/\partial y_s)+\\&+\operatorname{tr}(\mathbf{G}^T\cdot\operatorname{grad}\mathbf{K}_s)\end{aligned} \tag{4.5}$$

Далее выражение (4.5) преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned}\partial W/\partial y_s=&-[(\operatorname{grad}\mathbf{R})^T\cdot\mathbf{D}]_\times\cdot\mathbf{K}_s+\operatorname{div}(\mathbf{D}\cdot\partial\mathbf{R}/\partial y_s)+\\&+\operatorname{div}(\mathbf{G}\cdot\mathbf{K}_s)-(\operatorname{div}\mathbf{D})\cdot\partial\mathbf{R}/\partial y_s-(\operatorname{div}\mathbf{G})\cdot\mathbf{K}_s\end{aligned} \tag{4.6}$$

В силу уравнений равновесия (1.1) при $\rho\mathbf{k}=\mathrm{const}$ из (4.6) имеем

$$\operatorname{grad}(W-\rho\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})=\operatorname{div}[\mathbf{D}\cdot(\operatorname{grad}\mathbf{R})^T+\mathbf{G}\cdot\mathbf{H}^T\cdot\boldsymbol{\varkappa}^T]$$

откуда $\operatorname{div}\mathbf{P}=0$. После применения формулы Остроградского — Гаусса получаем $\mathbf{I}=0$, что и требовалось доказать.

Если условия теоремы нарушаются в некоторой области $v'\subset v$, то интеграл $\mathbf{I}$ по поверхности, охватывающей v', вообще говоря, отличен от нуля. В этом случае в силу теоремы значение интеграла не зависит от выбора замкнутой поверхности σ_0, охватывающей v'. Подобласть v' может содержать включения, полости, неоднородности, дислокационные и дисклинационные петли, сингулярные точки тензорных полей $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ и другие эффекты.

Интеграл $\mathbf{I}$ аналогичен интегралу Эшелби [11] в нелинейной теории упругости простых материалов. Как и в [11], можно показать, что малое приращение потенциальной энергии моментного упругого тела, т. е. функционала (2.11) при смещении дефекта на величину $d\lambda$ в направлении единичного вектора $\mathbf{a}$ в случае, когда поверхность тела свободна от нагрузки, выражается формулой

$$d\Pi_1 = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{I}\,d\lambda \tag{4.7}$$

Формула (4.7) справедлива также в случае, когда дефект представляет собой полость с ненагруженной поверхностью, а на внешней границе тела выполняются произвольные краевые условия.

Согласно (4.7) интеграл $\mathbf{I}$ можно интерпретировать как силу сопротивления, возникающую при изменении положения дефекта.

Для плоской задачи нелинейной моментной теории упругости $\mathbf{I}$ — интеграл будет контурным ($\mathbf{m}$ — нормаль к контуру γ):

$$\mathbf{I} = \oint_\gamma \mathbf{m}\cdot\mathbf{P}\,ds \tag{4.8}$$

Рассмотрим прямолинейную бесконечно тонкую трещину, берега которой параллельны единичному вектору $\mathbf{h}$ и свободны от нагрузки. В этом случае на основании теоремы доказывается, что интеграл $J=\mathbf{h}\cdot\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ выражается формулой (4.8), имеет одинаковое значение для всех контуров, охватывающих один из концов трещины и имеющих начало и конец на противоположных берегах. Для независимости интеграла $\mathbf{I}$ от выбора контура достаточно свойства однородности материала только в направлении трещины. Инвариантный интеграл J аналогичен интегралу Черепанова — Райса [12, 13] в плоской теории упругости и переходит в него при отбрасывании слагаемого с моментными напряжениями в (4.1). Как и в [12, 13], J-интеграл характеризует высвобождение энергии при продвижении трещины на длину $d\lambda$ в нелинейно-упругом теле с моментными напряжениями: $d\Pi_1=-J d\lambda$.

Если принять, следуя Гриффитсу, что разрушение развивается тогда, когда интенсивность освобождающейся энергии принимает некоторое критическое значение, то выражение J-интеграла будет служить энергетическим критерием распространения трещины в нелинейно-упругой моментной среде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 406–410.
2. *Пальмов В. А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964, Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
3. *Тупин Р. А.* Теории упругости, учитывающие моментные напряжения // Механика: Период. сб. перев. иностр. статей. 1965. № 3. С. 113–140.
4. *Жилин П. А.* Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29–46.
5. *Шкутин Л. И.* Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука, 1988. 127 с.
6. *Зубов Л. М., Карякин М. И.* Дислокации и дисклинации в нелинейно-упругих телах с моментными напряжениями // ПМТФ. 1990. № 3. С. 160–167.
7. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. *Зубов Л. М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1982. 143 с.
9. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехиздат, 1956. 344 с.
10. *Зубов Л. М.* Об одном вариационном принципе нелинейной теории упругости // Изв. Сев.-Кавк. научн. центра высш. шк. Естеств. науки. 1984. № 2. С. 40–43.
11. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
12. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
13. Разрушение/Под ред. Г. Либовица. Т. 2. М.: Мир, 1975. 764 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию 6.VI.1990