

УДК 539.3
© 1990 г.

Р. М. МАНСУРОВ

НАЧАЛЬНАЯ И ПОСЛЕДУЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ ДЛЯ ГЕКСАГОНАЛЬНОГО ТЕЛА

Показана неприемлемость условия текучести Хилла для существенно анизотропных тел. Предлагается новый подход к определению начальной и последующих поверхностей текучести, не предполагающий несжимаемость среды и независимость условия текучести от гидростатического давления. Определяющие соотношения удовлетворяют принципу градиентальности. Для случая квадратичных поверхностей текучести входными материальными данными являются, кроме постоянных упругости, кривые одноосных нагружений в главных осях анизотропии. Приведено сравнение с данными графита.

1. Начальная поверхность текучести изотропного тела достаточно хорошо описывается круговым цилиндром Мизеса $(\sigma_{ij} - \delta_{ij}) (\sigma_{ij} - \delta_{ij}) = (\frac{2}{3})^{1/2} \sigma_T$ с осью $\sigma_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера, σ_{ij} — напряжения, $3\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij} = \sigma_{kk}$, σ_T — предел текучести при растяжении). В качестве его обобщения на случай ортотропного тела Хилл [1] предложил условие текучести (в главных осях ортотропии x_i):

$$A(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + B(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + C(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + D\sigma_{12}^2 + E\sigma_{23}^2 + F\sigma_{31}^2 = 1 \quad (1.1)$$

где A, B, \dots определяются из соответствующих одноосных экспериментов. Поверхность (1.1) имеет ту же ось $\sigma_{ij} = \delta_{ij}$. Ее поперечное сечение представляет пятимерный эллипсоид только в том случае, если матрица коэффициентов квадратичной формы (1.1) является положительно определенной (иначе вместо эллипсоида получится незамкнутая поверхность). Нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием замкнутости неосевого сечения (1.1) является $k < 2$, где k — отношение пределов текучести в произвольно выбранных двух направлениях x_i .

Для большинства тел с исходной анизотропией это условие ($k < 2$) не выполняется. Для них также не выполняется условие пластической несжимаемости и независимость условия текучести f от δ_{ij} , содержащиеся в (1.1). Ниже предлагается новое условие текучести, не обладающее этими недостатками.

2. Внутри искомой поверхности текучести f имеет место закон Гука $e_{ij} = a_{ijnm} \sigma_{nm}$, $\sigma_{ij} = b_{ijnm} e_{nm}$, $a_{ijrs} b_{rsnm} = \frac{1}{2} (\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn})$. Пусть $e_{ij} = e \delta_{ij} + \gamma_{ij}$, $3e = e_{kk}$, $\gamma_{kk} = 0$. Тогда имеем $e \delta_{ij} = 3^{-1} \delta_{ij} a_{nnrs} \sigma_{rs} = K_{ijnm} \sigma_{nm}$, $\gamma_{ij} = \Gamma_{ijnm} \sigma_{nm}$ ($\Gamma_{ijnm} = a_{ijnm} - K_{ijnm}$).

Для анизотропных тел, вообще говоря, $K_{ijnm} \neq K_{nmij}$, $\Gamma_{ijnm} \neq \Gamma_{nmij}$ и также $\sigma_{ij} \sigma_{ij}' \neq 0$, где $\sigma_{ij}' = e b_{ijnm}$, $\sigma_{ij}'' = b_{ijnm} \gamma_{nm}$, $(\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' + \sigma_{ij}'')$. Введем тензоры $\alpha_{ij} = 3^{-1} b a_{ijnm}$, $\beta_{ij} = b^{-1} b_{ijnm}$, $b = (b_{ijnm} b_{ijnm})^{1/2}$. Видно, что имеют место равенства

$$\alpha_{ij} \beta_{ij} = 1, \beta_{ij} \beta_{ij} = 1, \Gamma_{nnij} = 0, \Gamma_{ijnm} \beta_{nm} = 0, \sigma_{ij}' = \sigma^* \beta_{ij}, \sigma^* = \sigma_{ij} \alpha_{ij} \quad (2.1)$$

Для изотропного тела имеем $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \delta_{ij} / \sqrt{3}$.

В дальнейшем из-за простоты и конкретности будем рассматривать, в основном, гексагональное (трансверсально-изотропное) тело (ось x_1 направим по оси изотропии). К тому же, в нашем распоряжении имеются экспериментальные данные только графита [2], относящегося к гексагональному типу. По-видимому, изложенный ниже материал можно соответственно обобщить на анизотропные среды более сложного типа.

Оперируя только в системе координат x_i , для сокращения записи вдвое уменьшим число индексов. Тогда согласно [2] для графита имеем (для удобства сравнения с первоисточником принято $10 \text{ кг/см}^2 = 1 \text{ МПа}$):

$$\begin{aligned} a_{1111} &\equiv a_{11} \equiv a_1 = 2,174 \cdot 10^{-4} \text{ (МПа)}^{-1}, & a_{22} &= a_{33} \equiv a = 0,4 \cdot 10^{-4} \\ a_{1122} &\equiv a_{12} = a_{13} = -0,24 \cdot 10^{-4}, & a_{23} &= -0,044 \cdot 10^{-4} \\ a_{1212} &\equiv a_{12}^* = a_{13}^* = 0,75 \cdot 10^{-4}, & a_{23}^* &= 0,222 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Поэтому $b_{1111} \equiv b_{11} = 54,05 \cdot 10^2 \text{ МПа}$, $b_{22} = b_{33} = 277,67 \cdot 10^2$, $b_{12} = b_{13} = 36,45 \cdot 10^2$, $b_{23} = 52,53 \cdot 10^2$, $b_{12}^* = b_{13}^* = 33,3 \cdot 10^2$, $b_{23}^* = 112,6 \cdot 10^2$.

Оси x_i являются главными осями и для всех ранее введенных тензоров и поэтому

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\equiv \alpha_1 = 3,0128, & \alpha_2 &= \alpha_3 = \alpha = 0,2063 \\ \beta_1 &= 0,2378, & \beta_2 &= \beta_3 = \beta = 0,6868, & K_{11} &= K_{21} = K_{31} = 0,5647 \cdot 10^{-4} \\ K_{22} &= K_{33} = K_{12} = K_{13} = K_{23} = K_{32} = 0,0387 \cdot 10^{-4}, & K_{12}^* &= K_{23}^* = K_{13}^* = 0 \\ \Gamma_{11} &= 1,609 \cdot 10^{-4}, & \Gamma_{12} &= \Gamma_{13} = -0,2787 \cdot 10^{-4}, & \Gamma_{21} &= \Gamma_{31} = -0,8045 \cdot 10^{-4} \\ \Gamma_{23} &= \Gamma_{32} = -0,0826 \cdot 10^{-4}, & \Gamma_{12}^* &= \Gamma_{13}^* = a_{12}^*, & \Gamma_{23}^* &= a_{23}^* \end{aligned}$$

Как видно, несимметричность тензоров K и Γ существенна. Если α_{ij} , β_{ij} и δ_{ij} изобразить соответствующими векторами, то для приведенного графита окажется, что угол между векторами α и β равен $70,7^\circ$ причем угол между α и δ равен $49,2^\circ$, а угол между β и δ равен $21,5^\circ$. Таким образом, поворот обобщенной девиаторной плоскости $\alpha_{ij}\sigma_{ij} = 0$ от обычной девиаторной плоскости $\sigma_{kk} = 0$ оказывается существенным ($49,2^\circ$).

Заметим, что можно доказать переход в равенство остальных вышеприведенных неравенств, если одно из них переходит в тождество.

3. Для скоростей пластических деформаций примем закон градиентальности

$$\varepsilon_{ij}^* = h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} \sigma_{nm} \right) \equiv \mu \cdot F_{ijnm} \sigma_{nm} \quad (3.1)$$

где h , μ , F_{ijnm} являются, вообще говоря, функциями σ_{ij} . Обычно постулируют явный вид функции текучести f . При этом вынуждены принимать ряд гипотез, которые могут оказаться несовместимыми. Примером является поверхность (1.1).

С другой стороны, при экспериментальном определении нескольких точек f (для определения значений параметров f) всегда имеет место выход за f (обычно, вдоль луча $\sigma_{ij} = t\sigma_{ij}^0$, $\sigma_{ij}^0 = \text{const}$). Следовательно, имеются первые значения $d\varepsilon_{ij}^*$. Но последние не используются для конкретизации f , т. е. теряется часть данных, которых и так всегда не хватает. Эти значения $d\varepsilon_{ij}^*$ можно использовать, если вместо f постулировать ее градиент, т. е. величины F_{ijnm} в (3.1). Считая пока известными F_{ijnm} , попытаемся определить явный вид функции f .

4. Далее будет предполагаться, что члены с касательными напряжениями в уравнении поверхности текучести $f=0$ можно учесть так же, как и в (1.1). Поэтому рассмотрим случай $\sigma_{ij}=0$ при $i \neq j$. Вначале установим определяющие параметры f .

Вообще говоря, $f=f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=0$, т. е. $\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_2, \sigma_3)$. Поэтому f представима в виде

$$f = P - Q(s, r) = 0 \quad (4.1)$$

За P выберем квадрат модуля вектора σ_k'' , лежащего на обобщенной девиаторной плоскости $\alpha_k \sigma_k'' = 0$ и вызывающего только формоизменение линейно-упругого тела, т. е. $P = \sigma_1''^2 + \sigma_2''^2 + \sigma_3''^2$. Величина $r = \alpha_k \sigma_k$ определяет нормальную составляющую вектора σ_k на упомянутой плоскости. Обозначим через θ угол между следом (проекцией) простого растяжения по оси x_1 ($\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) на обобщенной плоскости и следом на этой же плоскости заданного вектора σ_k . Примем $s = \cos \theta$, что допустимо вследствие наличия плоскости симметрии (x_2, x_3) гексагонального тела. (В общем случае ортотропии за s следует принимать другую, однозначную функцию θ). Пусть $\sigma_1 = \sigma_{1T}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Тогда $r = \alpha_1 \sigma_{1T}$, $\sigma_1'' = 2\alpha \beta \sigma_{1T}$, $\sigma_2'' =$

$=\sigma_3'' = -\alpha_1\beta\sigma_{1r}$. Следом этого растяжения является прямая $\sigma_1/2\alpha\beta = -\sigma_2/\alpha_1\beta = -\sigma_3/\alpha_1\beta$. Следом вектора σ_k является прямая $\sigma_1/\sigma_1'' = \sigma_2/\sigma_2'' = \sigma_3/\sigma_3''$. Поэтому

$$s = \cos \theta = (\omega\sqrt{P})^{-1} [2\alpha\beta\sigma_1'' - \alpha_1\beta(\sigma_2'' + \sigma_3'')], \quad \omega^2 = 2\beta^2(2\alpha^2 + \alpha_1^2)$$

Теперь нужно определить функцию $Q(s, r)$.

Из (3.1) имеем только два соотношения (обозначено $v_i \equiv \varepsilon_i \cdot r$):

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\partial f / \partial \sigma_2}{\partial f / \partial \sigma_1}, \quad \frac{v_3}{v_1} = \frac{\partial f / \partial \sigma_3}{\partial f / \partial \sigma_1}$$

Отсюда с учетом $\partial f / \partial \sigma_k \equiv f_{\sigma_k} = P_{\sigma_k} - Q_{s\sigma_k} - Q_r\alpha_k$ будем иметь

$$\begin{aligned} Q_s(v_2s_{\sigma_1} - v_1s_{\sigma_2}) + Q_r(v_2\alpha_1 - v_1\alpha) &= v_2P_{\sigma_1} - v_1P_{\sigma_2} \\ Q_s(v_3s_{\sigma_1} - v_1s_{\sigma_3}) + Q_r(v_3\alpha_1 - v_1\alpha) &= v_3P_{\sigma_1} - v_1P_{\sigma_3} \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} Q_s &= \Delta_s / \Delta, \quad Q_r = \Delta_r / \Delta \quad (4.2) \\ \Delta / v_1 &= \alpha [v_1(s_{\sigma_2} - s_{\sigma_3}) - s_{\sigma_1}(v_2 - v_3)] + \alpha_1(v_2s_{\sigma_3} - v_3s_{\sigma_2}) \\ \Delta_s / v_1 &= \alpha [v_1(P_{\sigma_2} - P_{\sigma_3}) - P_{\sigma_1}(v_2 - v_3)] + \alpha_1(v_2P_{\sigma_3} - v_3P_{\sigma_2}) \\ \Delta_r / v_1 &= s_{\sigma_1}(v_3P_{\sigma_2} - v_2P_{\sigma_3}) + P_{\sigma_1}(v_2s_{\sigma_3} - v_3s_{\sigma_2}) + v_1(s_{\sigma_2}P_{\sigma_3} - s_{\sigma_3}P_{\sigma_2}) \end{aligned}$$

Теперь систему (4.2) нужно привести к виду $Q_s = Q_s(Q, s, r)$, $Q_r = Q_r(Q, s, r)$. Опуская здесь изложение этого преобразования, приведем окончательный результат

$$\begin{aligned} \Delta / v_1(\sigma_2 - \sigma_3) &= (s^2\sqrt{P}C_1' + srC_2^1 + \sqrt{P}C_3^1) / P \\ \Delta_s / v_1(\sigma_2 - \sigma_3) &= s\sqrt{P}C_1^2 + rC_2^2 \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_r / v_1(\sigma_2 - \sigma_3) &= (s\sqrt{P}C_1^3 + rC_2^3) / \sqrt{P} \\ C_1^1 &= 2\beta\omega^{-1}[\alpha^2(F - F_1) + 2\alpha\alpha_1F_{12} - (\alpha^2 + \alpha_1^2)F_{23}] \\ C_2^1 &= -\alpha\beta_1F_1 + \alpha_1\beta(F + F_{23}) + (\alpha_1\beta_1 - 2\alpha\beta)F_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3^1 &= -0,5\omega\beta^{-1}(F - F_{23}), \quad C_1^2 = -2C_1^1, \quad C_2^2 = C_1^3 = -2C_2^1 \quad (4.4) \\ C_2^3 &= \omega[F_1\beta_1^2/\beta + 2\beta(F + F_{23}) + 4\beta_1F_{12}] \end{aligned}$$

Здесь для упрощения введены обозначения $F_{ijnm} \equiv F_{in}$: $F_{1111} \equiv F_{11} \equiv F_1$, $F_{22} \equiv F_{33} \equiv F$, $F_{1122} \equiv F_{1133} \equiv F_{12}$, $F_{2233} \equiv F_{23}$.

С учетом (4.3) и $P = Q$ система (4.2) примет вид

$$Q_s = -2Q(s^2\sqrt{Q}C_1^1 + rC_2^1) / N, \quad Q_r = \sqrt{Q}(rC_2^3 - 2s\sqrt{Q}C_2^1) / N \quad (4.5)$$

$$N \equiv s^2\sqrt{Q}C_1^1 + srC_2^1 + \sqrt{Q}C_3^1$$

Можно проверить, что $Q_{sr} = Q_{rs}$ и это есть следствие предположения симметрии $F_{ik} = F_{ki}$, приведшее к $C_1^3 = -2C_2^1$.

Ввиду (4.1) система (4.5) есть система дифференциальных уравнений поверхности текучести f . Величины F_{ik} в (4.5) могут быть функциями напряжений σ_{ij} , т. е. s и r . Из (4.5) и (4.1) видно, что если известна одна точка f , то вся она строится однозначно.

5. При произвольных функциях F_{ik} систему (4.5) трудно решить аналитически, но возможно решение численным методом. А сейчас предположим, что F_{ik} постоянны, т. е. не зависят от s и r . Тогда постоянны и C_i^k , а система (4.5) допускает аналитическое решение. Путем замены переменной $\sqrt{Q} = ru(s, r)$ интегрируется второе уравнение (4.5) и это решение с произвольной функцией $C_0(s)$ является решением и первого уравнения (4.5) при условии, если C_0 — постоянная величина. В результате, возвращаясь к исходным обозначениям, окончательно получаем функцию текучести (4.1) в виде

$$\sigma_1^2F_1 + (\sigma_2^2 + \sigma_3^2)F + 2\sigma_1(\sigma_2 + \sigma_3)F_{12} + 2\sigma_2\sigma_3F_{23} = \sigma_{1r}^2F_1 \quad (5.1)$$

Эта поверхность проходит через точку $\sigma_1 = \sigma_{1T}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, где σ_{1T} — предел текучести при растяжении по оси x_1 . Заметим, что предположение $F_{ik} = \text{const}$ означает, что градиент f , согласно (3.1) является линейной функцией. Поэтому f должна быть квадратичной функцией σ_k , что и подтверждается уравнением поверхности текучести (5.1). Подчеркнем, что при выводе (5.1) не использовалась никакая гипотеза о характере пластической сжимаемости среды. В (5.1) также отсутствует гипотеза о независимости f от $\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij}$, приводящая в случае закона градиентальности к пластической несжимаемости. Такое свойство f и пластическая сжимаемость или несжимаемость тела зависят от значений величин F_{ik} . Ввиду закона градиентальности для несжимаемого материала имеют место равенства

$$F_{12} = -0,5F_1, \quad F_{23} = 0,5F_1 - F \quad (5.2)$$

Поэтому (5.1) примет вид

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - (\sigma_2 - \sigma_3)^2 (F_1 - F) / F_1 = \sigma_{1T}^2$$

Это есть уравнение эллиптического цилиндра с осью $\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij}$. Для изотропных тел $F_1 = F$ и он переходит в круговой цилиндр Мизеса. Но эти условия при экспериментальном определении F_{ik} чаще всего не выполняются.

6. Теперь рассмотрим способы определения F_{ik} . Представим себе кривую растяжения без учета упругой деформации $\sigma_1 - \varepsilon_1^p$. На пределе текучести (т. е. при $\varepsilon_1^p = 0$) имеем $d\varepsilon_1^p = F_1 d\sigma_1$, $d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_3^p = F_{12} d\sigma_1$. Если $F_1 \equiv F_{11}$, F_{12} определить таким образом, то F_{ik} можно трактовать как тензор касательных модулей (аналогично тензору модулей упругости). С другой стороны, такая трактовка допустима и в рамках закона градиентальности (3.1), если рассмотреть только лучевое нагружение $\sigma_{ij} = t\sigma_{ij}$, т. е. $\sigma_{ij} = q\sigma_{ij}$. Тогда (3.1) примет вид

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda F_{ijnm} \sigma_{nm} \quad (6.1)$$

и F_{ijnm} действительно представится как тензор касательных модулей. Но, чтобы (6.1) представлял не закон Гука, а закон градиентальности необходима представимость F_{ijnm} в виде диадного произведения $f_{\sigma_{ij}} f_{\sigma_{nm}}$ (со скалярным коэффициентом). Это возможно, если экспериментально определенные F_{ik} , как касательные модули, войдут в уравнение поверхности текучести f . Именно так обстоит дело в (5.1): присутствующие здесь F_{ik} можно определить из (6.1) при $\lambda = 1$ по данным на простое растяжение вдоль главных осей анизотропии на пределе текучести. В рассматриваемом случае гексагонального тела для определения четырех величин F_1, F, F_{12}, F_{23} в (5.1) достаточно иметь данные на пределе текучести при растяжении вдоль осей x_1 и x_2 . Растяжение по оси x_1 рассмотрено выше. При растяжении вдоль оси x_2 на пределе текучести имеем $d\varepsilon_1^p = F_{12} d\sigma_2$, $d\varepsilon_2^p = F d\sigma_2$, $d\varepsilon_3^p = F_{23} d\sigma_2$. Отсюда, зная $d\sigma_2$ и $d\varepsilon_k^p$, определим F, F_{23} и, повторно, F_{12} . Эти два значения F_{12} , вообще говоря, не совпадут. Однако можно добиться их совпадения путем соответствующего выбора значений σ_{1T} и σ_{2T} (σ_{2T} — предел текучести на растяжение по оси x_2), вместе с которыми изменяются и F_{ik} как касательные модули в соответствующих точках кривых растяжения. Такой выбор позволяет вследствие того, что предел текучести в эксперименте не определяется однозначно: допустимые значения этой величины заполняют конечный интервал.

Заметим, что при обычной трактовке F_{ik} в (5.1) как величин, определяемых по значениям пределов текучести в различных направлениях, были бы необходимы не только два растяжения вдоль x_1 и x_2 , а еще два эксперимента. К тому же, из-за отсутствия критерия выбора точного значения допуска по различным направлениям теперь придется варьировать значения не двух, а четырех пределов текучести. Это вносит сильную неоднозначность.

Однако можно сформулировать еще один и, по-видимому, предпочтительный метод определения F_{ik} . Разделив обе части (5.1) на F и вводя обозначения $F_{ik}^* \equiv F_{ik}/F$, получим, что в (5.1) по существу входят только

три величины F_1^* , F_{12}^* и F_{23}^* , причем

$$(\sigma_{2T}/\sigma_{1T})^2 = F_1/F = F_1^* \quad (6.2)$$

Для определения F_{12}^* и F_{23}^* примем специальную гипотезу. В экспериментах при лучевом нагружении путь деформаций в момент перехода через предел текучести не имеет точки излома. (Заметим, что если бы в самом деле существовала такая точка излома, то не возник бы вопрос о допуске). Но можно допустить все-таки наличие малого угла излома, который трудно обнаружить на экспериментах в силу этой малости. По крайней мере, согласно известным моделям изотропных пластически несжимаемых тел при растяжении на пределе текучести имеем $e_2/e_1 = e_2^p/e_1^p = -\nu = -0,3$; $\varepsilon_2^p/\varepsilon_1^p = -0,5$, т. е. путь деформаций имеет излом. Однако этот излом связан с изменением характера объемной деформации, а путь деформаций формоизменения остается гладким. К тому же, в условиях отсутствия фазовых превращений резкое изменение направления плоскостей скольжения на пределе текучести при лучевом нагружении представляется маловероятным. Следовательно, можно принять гипотезу: при лучевом нагружении на пределе текучести путь деформаций формоизменения остается гладким.

Предположим теперь, что деформационная анизотропия упругих свойств пренебрежимо мала по сравнению с исходной анизотропией. Тогда скорости упругих деформаций при лучевом нагружении не нарушают гладкости пути деформаций формоизменения. Поэтому принятая гипотеза означает, что девиаторы упругих деформаций и скоростей пластических деформаций коаксиальны (подобны), т. е.

$$\gamma_{ij} = \Gamma_{ijnm} \sigma_{nm} = c (\varepsilon_{ij}^p - 1/3 \varepsilon_{kk}^p \delta_{ij}) = k \Gamma_{ijnm}^p \sigma_{nm} \quad (6.3)$$

где Γ_{ijnm}^p образуется из тензора F_{ijnm} аналогично определению Γ_{ijnm} , т. е. $\Gamma_{ijnm}^p = F_{ijnm} - 1/3 \delta_{ij} F_{hhmm}$. Теперь из (6.3) имеем $\Gamma_{ijnm}^p = q \Gamma_{ijnm}$. Эти соотношения и определяют искомые величины F_{12}^* и F_{23}^* .

Действительно, ограничившись при $\sigma_{ij} = 0$, ($i \neq j$) случаем $i = j$, $n = m$, рассмотрим укороченную матрицу

$$\Gamma_{in} = \frac{1}{3} (a_1 - a_{12}) \begin{vmatrix} 2 & A_1 & A_1 \\ -1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \frac{2a_{12} - a - a_{23}}{a_1 - a_{12}}, \quad A_2 = \frac{2a - a_{12} - a_{23}}{a_1 - a_{12}}, \quad A_3 = \frac{2a_{23} - a - a_{12}}{a_1 - a_{12}}$$

Аналогично для Γ_{in}^p имеем

$$\Gamma_{in}^p = \frac{1}{3} (F_1 - F_{12}) \begin{vmatrix} 2 & A_1^p & A_1^p \\ -1 & A_2^p & A_3^p \end{vmatrix}$$

$$A_1^p = \frac{2F_{12} - F - F_{23}}{F_1 - F_{12}}, \quad A_2^p = \frac{2F - F_{12} - F_{23}}{F_1 - F_{12}}, \quad A_3^p = \frac{2F_{23} - F - F_{12}}{F_1 - F_{12}}$$

Поэтому из $\Gamma^p = q \Gamma$ имеем $A_1^p = A_1$, $A_2^p = A_2$, $A_3^p = A_3$. Отсюда, вводя обозначения $F_1 - F_{12} = X$, $F - F_{12} = Y$, $F_{12} - F_{23} = Z$, получим $Z - Y = A_1 X$, $2Y + Z = A_2 X$, $2Z + Y = -A_2 X$. Но, так как $A_1 + A_2 + A_3 = 0$, то последнее уравнение есть простая сумма первых двух. Решение этих двух уравнений имеет вид

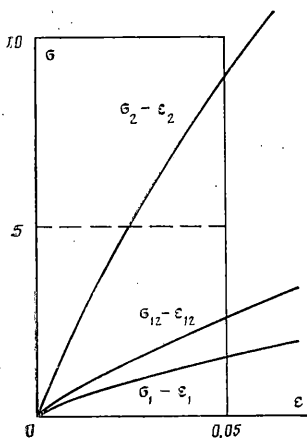
$$Y = X(A_2 - A_1)/3, \quad Z = X(2A_1 + A_2)/3$$

Отсюда, переходя к старым обозначениям, получим

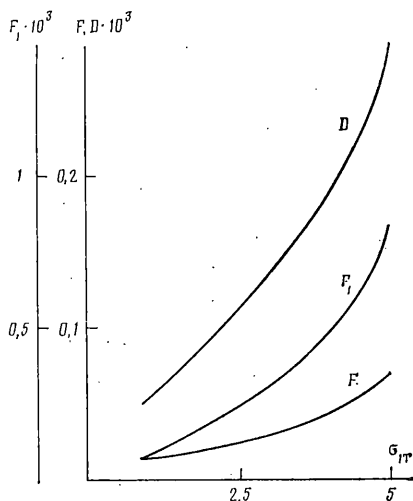
$$F_1^* = 3(A_2 - A_1)^{-1} [1 - F_{12}^* (1 - (A_2 - A_1)/3)], \quad F_{23}^* = (A_2 - A_1)^{-1} \times$$

$$\times \{2A_1 + A_2 + F_{12}^* [2(A_2 - A_1)(2A_1 + A_2)/3 - 3A_1]\} \quad (6.4)$$

Таким образом, F_{12}^* и F_{23}^* определяются точно по формулам (6.4), если известны F_1^* и тензор модулей упругости, от компонент которого зависят A_1 , A_2 . Иначе говоря, остается только одна величина F_1^* , определяемая по формуле (6.2) и непосредственно зависящая от неточно опре-



Фиг. 1



Фиг. 2

деляемого в экспериментах отношения σ_{2T}/σ_{1T} . Отметим, что для изотропных тел $A_1 = -1$, $A_2 = 2$, $F_1^* = 1$ и поэтому $F_{23}^* = F_{12}^*$, как и должно быть.

При растяжении по оси x_2 имеем $\epsilon_1^p/\epsilon_2^p = F_{12}/F = F_{12}^*$ и $\epsilon_3^p/\epsilon_2^p = F_{23}^*$, т. е. F_{12}^* и F_{23}^* представляют собой величины типа коэффициента Пуассона. Поэтому имеем неравенства $-1 < F_{12}^* < 0$ и $-1 < F_{23}^* < 0$, которые должны быть удовлетворены при выборе значения F_1^* (6.2).

Пусть теперь касательные напряжения в x_i не равны нулю. Поступая аналогично (1.1), путем прибавления соответствующих слагаемых в левую часть (5.1) будем иметь

$$\begin{aligned} & \sigma_{11}^2 F_1^* + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{11}(\sigma_{22} + \sigma_{33})F_{12}^* + 2\sigma_{22}\sigma_{33}F_{23}^* + \\ & + D(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) + C\sigma_{23}^2 = \sigma_{1T}^2 F_1^* \end{aligned} \quad (6.5)$$

где D и C можно определить с помощью той же гипотезы подобия (6.3). Тогда будем иметь

$$D = 4(F_1^* - F_{12}^*)\Gamma_{1212}/3\Gamma_{1111}, \quad C = 2(2 - F_{12}^* - F_{23}^*)\Gamma_{2323}/3\Gamma_{2222} \quad (6.6)$$

Более сложный случай, когда F_{ih} в (4.4) зависят от σ_{ij} т. е. от s и r (в силу (4.1) в число определяющих параметров состояния P не входит), требует специального исследования. Тем не менее, уже сейчас можно отметить, что этот общий случай можно исследовать в рамках гипотезы подобия и ее следствия (6.4), так как вывод (6.4) не связан с конкретным видом $F_{ih}(s, r)$. Поэтому достаточно установить только одну функцию, например, $F_{12}^*(s, r)$. Но формула (6.2) будет не пригодна как следствие квадратичности функции (6.5).

Однако пока неясно насколько необходимо исследование этого общего случая, так как существование целого слоя экспериментальных поверхностей текучести постоянного допуска и отсутствие критерия отбора действительной поверхности текучести из этого слоя позволяет пока ограничиться функцией текучести (6.5).

7. Теперь рассмотрим один из возможных способов определения последующих поверхностей текучести. В изотропной теории течения для начально изотропных тел используется концепция изотропного расширения начальной поверхности текучести, которая вполне приемлема для лучевых и близких к ним нагружений. Ниже для случая монотонного нагружения малой кривизны предлагается обобщение этой концепции.

Предположим, что деформационная анизотропия упругих свойств пренебрежимо мала по сравнению с исходной. Тогда $a_{ijnm} = \text{const}$ и можно воспользоваться вышеприведенными соотношениями. Дальнейшей целью является определение всех входящих в (6.5) коэффициентов так, чтобы (6.5) представляло уравнение последующих поверхностей теку-

части. Это становится возможным благодаря трактовке F_{ik} как касательных модулей. Изложим этот метод применительно к конкретному материалу, данные которого будут использованы в дальнейшем.

На фиг. 1 изображены начальные участки кривых одноосных нагружений гексагонального графита [2] в главных осях анизотропии x_i . Из этих кривых путем отбрасывания упругой деформации можно построить соответствующие диаграммы напряжение-пластическая деформация $\sigma_1 \sim \varepsilon_1^p$, $\sigma_2 \sim \varepsilon_2^p$, $\sigma_{12} \sim \varepsilon_{12}^p$. В (6.5) F_1 есть обратная величина касательного модуля к кривой $\sigma_1 \sim \varepsilon_1^p$ в точке $\varepsilon_1^p = 0$, F — то же самое к кривой $\sigma_2 \sim \varepsilon_2^p$ в точке $\varepsilon_2^p = 0$, а D — к кривой $\sigma_{12} \sim \varepsilon_{12}^p$ в точке $\varepsilon_{12}^p = 0$. Очевидно, $F_1 < \infty$, $F < \infty$ и $D < \infty$. Из этих диаграмм построим новые кривые $\varphi_1(\varepsilon_1^p) = \sigma_1^2 F_1$, $\varphi_2(\varepsilon_2^p) = \sigma_2^2 F$, $\varphi_{12}(\varepsilon_{12}^p) = \sigma_{12}^2 D$, где $F_1(\sigma_1)$, $F(\sigma_2)$ и $D(\sigma_{12})$ определяются так же, как обратные величины касательных модулей, но в соответствующих точках диаграмм. Эти кривые в силу (6.5) должны начинаться из одной и той же точки при $\varepsilon_1^p = \varepsilon_2^p = \varepsilon_{12}^p = 0$. Сверх того, ввиду (6.5) должны выполняться равенства

$$\sigma_{1T}^2 F_1(\sigma_{1T}) = \sigma_{2T}^2 F(\sigma_{2T}) = \sigma_{12T}^2 D(\sigma_{12T}) \quad (7.1)$$

Так как для известных материалов φ_1 , φ_2 , φ_{12} являются монотонно возрастающими функциями, то из (7.1) однозначно определяются функции $\sigma_{2T}(\sigma_{1T})$, $\sigma_{12T}(\sigma_{1T})$, а также функции $-F_1(\sigma_{1T})$, $F(\sigma_{1T})$ и $D(\sigma_{1T})$, которые для случая графита изображены на фиг. 2. Остается определить σ_{1T} . Для этого воспользуемся условием, что (6.5) проходит через точку нагружения. При этом вектор догружения $d\sigma_{ij}$, выходящий за поверхность текучести f , разложим на две составляющие $d\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} dt$ и $d\sigma_{ij} - d\sigma_{ij}^*$, направленный по касательной к f . Теперь, внося вместо σ_{ij} в (6.5) величины $\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}^*$, получим одно уравнение относительно неизвестной σ_{1T} . Это уравнение можно решить численно или по какой-либо приближенной методике (путем разложения в ряд и пренебрежения малыми высшего порядка).

Изложенная методика определения последующих поверхностей текучести является обобщением известной модели изотропного расширения в пластичности изотропных тел. Если же материал обладает эффектом Баушингера, то его учет можно осуществить также формально, как и в известной теории изотропно-трансляционного упрочнения, путем замены σ_{ij} на $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$, где σ_{ij}^0 — координаты центра поверхности (6.5). При этом для $d\sigma_{ij}^0$ лучше принять известные соотношения Цингера.

8. Теперь, после определения последующих поверхностей текучести, казалось бы, можно воспользоваться соотношениями градиентальности (3.1). Но в них присутствуют неизвестные скалярные функции $h(\sigma_{ij})$, $\mu(\sigma_{ij})$. Эти функции для изотропных тел определяются по известной гипотезе «единой кривой». Для анизотропных же тел такой кривой не существует.

Однако вид определяющих соотношений подсказывается самим методом построения поверхности текучести:

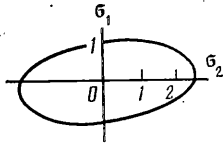
$$\varepsilon_{ij}^*{}^p = F \cdot F_{ijnm}^* \sigma_{nm}^* \equiv F_{ijnm} \sigma_{nm}^* \quad (8.1)$$

где $F_{ijnm}^* \equiv F_{in}^*$ — коэффициенты квадратичной формы (6.5), а σ_{ij}^* — составляющая вектора σ_{ij} направленная по σ_{ij} (см. выше). Очевидно, вектор (8.1) направлен по нормали к (6.5), т. е. принцип градиентальности выполнен, так как

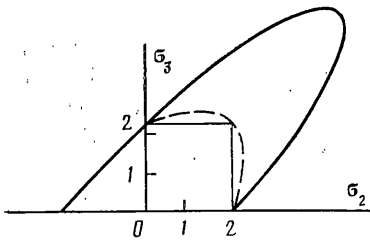
$$f_{\sigma_{ij}} = 2F_{ijnm}^* \sigma_{nm}^* = 2(q^*)^{-1} F_{ijnm}^* \sigma_{nm}^* = 2(q^* F)^{-1} \varepsilon_{ij}^*{}^p$$

Заметим, что для сильно анизотропных тел, когда нелинейность проявляется с самого начала нагружения, следует воспользоваться подходом, изложенными в [3].

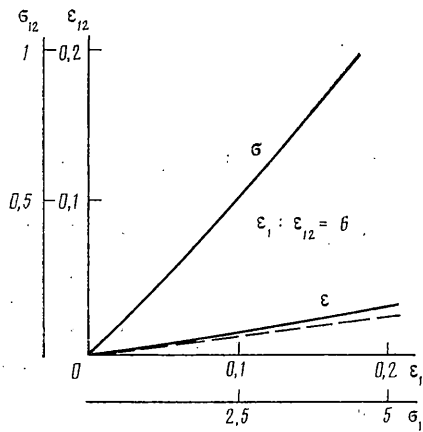
9. В качестве примера рассмотрим тот же графит 2. По данным (2.2) имеем: $A_1 = -0,3463$, $A_2 = 0,449$ и поэтому из (6.4) находим $F_1^* = -2,7722F_{12}^* + 3,7722$, $F_{23}^* = 1,1439F_{12}^* - 0,3063$. Следовательно, $3,7722 < F_1^* < 5,4533$.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Из кривых на фиг. 1 видно, что значение σ_{1T} можно выбрать где-то в интервале $0,6 < \sigma_{1T} < 0,8$ МПа, а значение σ_{2T} — в интервале $1,7 < \sigma_{2T} < 2,2$. Поэтому $2,125 < \sigma_{2T}/\sigma_{1T} < 3,667$. Пусть $\sigma_{2T}/\sigma_{1T} = 2,28$. Тогда $F_1^* = 5,2$, $F_{12}^* = -0,515$, $F_{23}^* = -0,9$ и согласно (6.6) $P = 3,55$, $C = 1,4$. Таким образом, определены все коэффициенты начальной поверхности текучести (6.5). Они не удовлетворяют условиям пластической несжимаемости (5.2). На фиг. 3 и 4 изображены сечения эллипсоида (6.5) плоскостями (σ_1, σ_2) и (σ_2, σ_3) , где для удобства принято $\sigma_{1T} = 1$. (Заметим, что из опытных данных остается выбрать только значение) На фиг. 4 пунктиром изображена часть эллипса Мизеса для изотропных тел, который сильно отличается от (6.5), хотя фиг. 4 относится к плоскости изотропии (x_2, x_3) гексагонального тела. Таким образом, с появлением заметной анизотропии круговой цилиндр Мизеса, превращаясь в вытянутый эллипсоид, поворачивается в сторону более «жесткой» ($\sigma_{1T} < \sigma_{2T} = \sigma_{3T}$) плоскости изотропии (x_2, x_3) , в результате чего материал выдерживает больше двухосного растяжения, чем при $\sigma_{1T} = \sigma_{2T} = \sigma_{3T}$ ($\sigma_2, \sigma_3 > \sigma_{2T}$), не выходя из упругой области. Иными словами, свойства материала при таком двухосном растяжении как бы улучшаются за счет ухудшения свойства в направлении x_1 (т. е. уменьшения σ_{1T}). (Это обстоятельство может быть использовано при создании определенных конструкций.)

На фиг. 5 изображены результаты испытания одного из трубчатых образцов на растяжение — кручение [2] и результаты расчета по предлагаемой теории (птриховая линия ϵ_T). Программа нагружения ведется по деформациям ($\epsilon_1 : \epsilon_{12} = 6$), а напряжения измеряются (см. путь σ на фиг. 5). При расчете задавался, наоборот, путь нагружения и определялся путь деформации ϵ_T . Как видно, отличие теоретических и экспериментальных результатов вполне приемлемо. Аналогичные результаты получены и при других отношениях $\epsilon_1 : \epsilon_{12}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. Огибалов П. М., Кузнецов В. Н., Савов П. М., Алифанов А. В. Экспериментальное исследование пластичности начально-анизотропного материала при простом деформировании // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 136–146.
3. Мансуров Р. М. К описанию малых деформаций нелинейных анизотропных тел при монотонных нагружениях малой кривизны // МТТ. 1989. № 3. С. 185–188.

Москва

Поступила в редакцию
29.XII.1988