

УДК 531.38

© 1990 г.

А. А. ЛАПИН, М. А. ПАВЛОВСКИЙ, Ю. В. РАДЫШ

**К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА
В ПОПЛАВКОВОМ ПОДВЕСЕ ТИПА СФЕРА В СФЕРЕ**

Исследуется механическая система, состоящая из сферического твердого тела и несжимаемой вязкой жидкости, заключенных в сферической полости несущего твердого тела. Жидкость без разрывов заполняет слой между сферическими поверхностями твердых тел. Носимое твердое тело подвешивается в полости несущего под действием центральной силы, которая линейно зависит от расстояния между центрами сфер. При нестационарных режимах течения жидкости изучается главный вектор и момент гидродинамических сил действующих на носимое твердое тело, а также устойчивость равновесия и движения центра однородного носимого тела вблизи положения равновесия.

Особенность динамических моделей, отражающих явления последействия и запаздывания, связана с неограниченной размерностью пространства состояний системы [1-4]. Отмеченные трудности часто преодолеваются использованием конечно-мерных моделей, на основе которых получено большинство результатов [5-9].

1. Постановка задачи. Приведем параметры рассматриваемой механической системы: зазор между концентрическими сферами ε , радиус внутренней сферы l^* , кинематическая вязкость жидкости ν , плотность жидкости ρ , средняя плотность носимого тела ρ_0^* , жесткость центрирующего устройства c^* . Значения параметров ε , ν , ρ (не отмеченных звездочкой) с независимыми размерностями принимаются в качестве единиц измерения соответствующих физических величин. Они дополняются характерным временем движения твердых тел τ и характерной для жидкости скоростью течения u . Дополнительно к безразмерным параметрам $\rho_0 = \rho_0^*/\rho$, $c = c^*\varepsilon/(\nu^2\rho)$, $l = l^*/\varepsilon$, вводятся числа Струхала и Рейнольдса $Sr = \varepsilon/(u\tau)$, $Re = u\varepsilon/\nu$.

Предполагается, что течение жидкости характеризуется малыми значениями Re . Значения Sr не ограничиваются, поскольку время τ соизмеримо по порядку со временем установления течения жидкости ε^2/ν . С учетом этого предложения, динамика механической системы описывается совместно: линеаризованным уравнением движения жидкости

$$\begin{aligned} (\alpha\partial/\partial t - \nabla^2)v(\mathbf{r}, t) + \nabla p(\mathbf{r}, t) &= 0 \quad (\mathbf{r} \in \Omega, t > 0) \\ \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= 0 \quad (\mathbf{r} \in \Omega, t \geq 0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

уравнением движения центра O_0 носимого твердого тела

$$(\mu\alpha^2 d^2/dt^2 + \lambda)\mathbf{e}(t) - {}^{3/4}(\pi l^3)^{-1}\mathbf{f}(t) = \mu(\mathbf{g}(t) - \mathbf{w}_1(t)) \quad (t > 0) \quad (1.2)$$

условиями прилипания жидкости к поверхности носимого и несущего твердых тел

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \omega_0(t) \times \mathbf{r} \quad (\mathbf{r} \in \Gamma_0, t \geq 0) \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \omega_1(t) \times (\mathbf{r} + \mathbf{e}(t)) - \alpha d\mathbf{e}(t)/dt \quad (\mathbf{r} \in \Gamma_1, t \geq 0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

начальным состоянием движения механической системы

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_0 \quad (t=0); \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\mathbf{r} \in \Omega, t=0) \quad (1.4)$$

Отметим, что значение $d\mathbf{e}/dt$ определяется однозначно как функция состояния (\mathbf{e}, \mathbf{v}) . В приведенных соотношениях использованы следующие безразмерные величины: $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*/\varepsilon$ — радиус-вектор точки, фиксированной в невращающейся системе координат с началом в центре внутренней

сферы; $t=t^*/\tau$ — время; $\mathbf{v}=\mathbf{v}^*\varepsilon/\nu$ — вектор скорости течения жидкости относительно системы отсчета, связанной с указанной системой координат; $p=p^*\varepsilon^2/(\nu^2\rho)$ — гидродинамическое давление жидкости; $\boldsymbol{\omega}_0=\boldsymbol{\omega}_0^*\varepsilon^2/\nu$, $\boldsymbol{\omega}_1=\boldsymbol{\omega}_1^*\varepsilon^2/\nu$ — угловые скорости вращения носимого и несущего твердых тел; $g=g^*\varepsilon^3/\nu^2$, $\mathbf{w}_1=\mathbf{w}_1^*\varepsilon^3/\nu^2$ — ускорение свободного падения и ускорение центра O_1 внешней сферы; $\mathbf{e}=\mathbf{e}^*/\varepsilon$ — вектор O_1O_0 :

$$\mu=\rho_0-1, \quad \lambda=^3/4c(\pi l^3)^{-1}, \quad \alpha=\text{Sr}\cdot\text{Re}$$

Главный вектор $\mathbf{f}=\mathbf{f}^*/(\nu^2\rho)$ и главный момент $\mathbf{m}=\mathbf{m}^*/(\varepsilon\nu^2\rho)$ гидродинамических сил, действующих на носимое твердое тело в центре O_0 равны [10]:

$$\mathbf{f} = \int_{\Gamma_0} (\partial\mathbf{v}/\partial r - \mathbf{v}/r + \nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})/r - p\mathbf{r}/r) ds \quad (1.5)$$

$$\mathbf{m} = \int_{\Gamma_0} l\mathbf{r}/r \times (\partial\mathbf{v}/\partial r - \mathbf{v}/r + \nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})/r) ds \quad (1.6)$$

Решение гидродинамической задачи (1.1) — (1.6) состоит в том, чтобы при заданном вращении $\boldsymbol{\omega}_0(t)$, $\boldsymbol{\omega}_1(t)$ обоих твердых тел и движении центра носимого тела относительно несущего $\mathbf{e}(t)$, найти главный вектор и момент гидродинамических сил $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{m}(t)$. Задача (1.1) — (1.5) о движении механической системы допускает решение ($\mathbf{e}=0$, \mathbf{v}), если правые части (1.2), (1.4) равны нулю. Рассматривается задача об устойчивости равновесия $\mathbf{e}=0$ центра носимого твердого тела. Ее решение состоит в том, чтобы при заданном вращении $\boldsymbol{\omega}_0(t)$, $\boldsymbol{\omega}_1(t)$ обоих твердых тел, найти условие устойчивости положения равновесия центра носимого твердого тела.

2. Главный вектор и момент гидродинамических сил. Гидродинамическая задача для квазисферического слоя Ω с неподвижной Γ_0 и подвижной Γ_1 сферическими границами (см. фиг. 1) решается методом возмущения формы подвижной границы [11], в предположении малости расстояния между центрами сфер сравнительно с расстоянием между сферами при движении твердых тел. Ее решение сводится к сходящейся итерационной процедуре, на каждом шаге которой решается начально-краевая задача для сферического слоя с невозмущенными границами Γ_0 и Γ_1' . При этом используются сферическая $\{\varphi, \theta, r\}$ и декартова $\{x, y, z\}$ прямоугольные системы координат, связанные между собой обычным образом. В сферических координатах границы Γ_0 и Γ_1' являются координатными сферами радиусов l и $l+1$.

Решение задачи относительно (\mathbf{v}, p) представляется, соответственно, в форме разложения по векторным и скалярным сферическим гармоникам [12, 13]: $\{\gamma_i^n \mathbf{r}/r, r\nabla\gamma_i^n, \mathbf{r}\times\nabla\gamma_i^n\}$, $\{\gamma_i^n\}$ с коэффициентами, зависящими от r, t : $\{f_i^n, g_i^n, h_i^n\}$, $\{d_i^n\}$, где $\gamma_i^n(\theta, \varphi)$ — гессеральные гармоники степени $i=0, 1, \dots$ порядка $n=-i, \dots, 0, \dots, +i$. Подстановка разложений (\mathbf{v}, p) в (1.5), (1.6) дает

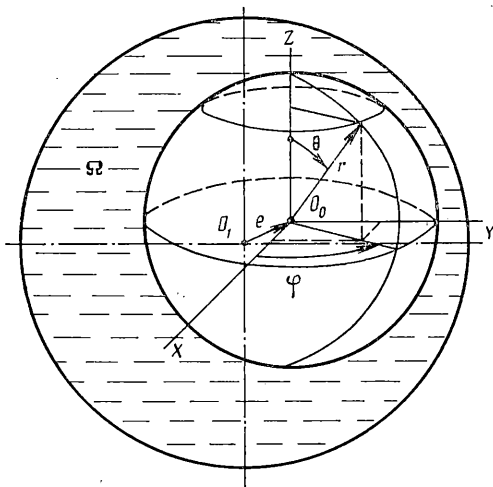
$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= -^4/3\pi r(\mathbf{d}_1 - 2\partial(r\mathbf{g}_1)/\partial r + 2\mathbf{f}_1) \quad (r=l) \\ \mathbf{m} &= -^8/3\pi r^2(r\partial\mathbf{h}_1/\partial r - \mathbf{h}_1) \quad (r=l) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{d}_1 = \{d_1^{+1}, d_1^{-1}, d_1^0\}$, $(\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_1, \mathbf{h}_1)$ аналогично) — векторы, определенные своими компонентами в декартовой системе координат. Следовательно, главный вектор и момент гидродинамических сил зависят только от форм скорости и давления жидкости, для которых $i=1$.

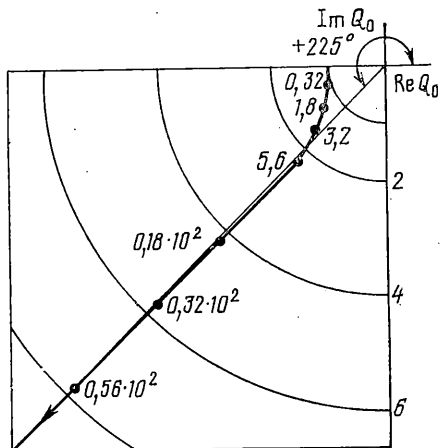
Подстановка разложений (\mathbf{v}, p) в (1.1) приводит к независимым уравнениям относительно h_i^n ($n=-i, \dots, 0, \dots, +i$)

$$[\alpha\partial/\partial t - \partial^2/\partial r^2 + i(i+1)/r^2]rh_i = 0 \quad (2.2)$$

и независимым системам уравнений относительно d_i^n, f_i^n, g_i^n ($n=-i, \dots$



Фиг. 1



Фиг. 2

..., 0, ..., +i)

$$\begin{aligned} \alpha \partial (rg_i) / \partial t - \partial (\partial (rg_i) / \partial r - f_i) / \partial r + d_i &= 0 \\ \alpha \partial f_i / \partial t - i(i+1) (\partial (rg_i) / \partial r - f_i) / r^2 - \partial d_i / \partial r &= 0 \\ \partial (r^2 f_i) / \partial r - i(i+1) rg_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнения (2.2), (2.3) решаются совместно с краевыми и начальными условиями

$$\begin{aligned} \{f_i(r, t), g_i(r, t), h_i(r, t)\} &= \{f_{i0}, g_{i0}, h_{i0}\} \quad (r=l, t \geq 0) \\ \{f_i(r, t), g_i(r, t), h_i(r, t)\} &= \{f_{i1}, g_{i1}, h_{i1}\} \quad (r=l+1, t \geq 0) \\ \{f_i(r, t), g_i(r, t), h_i(r, t)\} &= \{0, 0, 0\} \quad (r \in]l, l+1[, t=0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Правые части первых двух равенств (2.4) вычисляются по векторному полю заданному на сферах Γ_0 и Γ_1' для каждого шага итерации. Если на сфере Γ произвольного радиуса r задано векторное поле (v, p) , то коэффициенты его разложения вычисляются из равенств

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \gamma_i (\mathbf{r}/r \cdot \mathbf{v}) ds &= f_i \int_{\Gamma} (\gamma_i)^2 ds, \quad \int_{\Gamma} \gamma_i p ds = d_i \int_{\Gamma} (\gamma_i)^2 ds \\ \int_{\Gamma} (\nabla r \gamma_i) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}/r) ds &= i(i+1) h_i \int_{\Gamma} (\gamma_i)^2 ds \\ \int_{\Gamma} (\nabla r \gamma_i - \gamma_i \mathbf{r}/r) \cdot \mathbf{v} ds &= i(i+1) g_i \int_{\Gamma} (\gamma_i)^2 ds \end{aligned}$$

Задача (2.2) ÷ (2.4) для сферического слоя решается с применением прямого и обратного преобразований Лапласа (односторонних) по переменной t . Отметим, что общее решение обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих (2.2), (2.3), содержит всего шесть произвольных постоянных. Эти постоянные однозначно устанавливаются из краевых условий, соответствующих первым двум равенствам (2.4).

Первый шаг итерации дает решение исходной задачи для сферического слоя ($\mathbf{e}(t)=0$), второй шаг уточняет его в случае малых возмущений формы границы ($\mathbf{e}(t) \neq 0$). Подстановка решений $\mathbf{d}_1, \mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1$, полученных после второго шага итерации, в (2.1) приводит к явной зависимости главного вектора и момента гидродинамических сил от кинематических характеристик движения обоих твердых тел

$$\mathbf{f}(t) = -8\pi l^4 \psi^* (de/dt) \alpha - 8\pi l^4 \psi_1^* (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_1) - 4\pi l^4 \psi_2^* [\mathbf{e} \times (\chi_0^* \boldsymbol{\omega}_0 - \chi_1^* \boldsymbol{\omega}_1)] \quad (2.5)$$

$$\mathbf{m}(t) = {}^8/3\pi l^4 \theta_0 * \omega_0 + {}^8/3\pi l^4 \theta_1 * \omega_1 - 4\pi l^4 \theta_1 * [\mathbf{e} \times (\chi * (de/dt) \alpha)]$$

где звездочкой обозначена свертка функций.

Функции $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\chi(t)$ в (2.5) зависят от двух безразмерных параметров l и α . В практически важных случаях больших значений l их зависимость от этого параметра незначительна (практически при $l > 10$). При этом изображения Лапласа

$$\Psi(s) = L\psi(t), \quad \Theta(s) = L\theta(t), \quad X(s) = L\chi(t)$$

указанных функций-оригиналов приближаются выражениями

$$\begin{aligned} \Psi &= \kappa^3 \operatorname{sh} \kappa [24(1 - \operatorname{ch} \kappa) + 12\kappa \operatorname{sh} \kappa]^{-1} = \Psi_1 \\ \Psi_2 &= \kappa^2 (\operatorname{ch} \kappa - 1) [12(1 - \operatorname{ch} \kappa) + 6\kappa \operatorname{sh} \kappa]^{-1} = X \\ -\Theta_0 &= (3l^2 + 1)\kappa^3 \operatorname{ch} \kappa [3(l^2\kappa^2 - 1) \operatorname{sh} \kappa + 3\kappa \operatorname{ch} \kappa]^{-1} = X_1 \\ \Theta_1 &= (3l^2 + 1)\kappa^3 [3(l^2\kappa^2 - 1) \operatorname{sh} \kappa + 3\kappa \operatorname{ch} \kappa]^{-1} = X_0 \end{aligned}$$

где $\kappa^2 = \alpha s$. Если $\alpha s = 0$, то выполняются равенства $\Psi = \Psi_1 = \Psi_2 = X = X_0 = X_1 = \Theta_1 = -\Theta_0 = 1$. Следовательно, всюду, где в дальнейшем встречаются указанные функции, их замена на единицу соответствует квазистационарному приближению и решению гидродинамической задачи (при больших значениях l).

Если движение твердых тел задается в форме колебаний с дискретным спектром

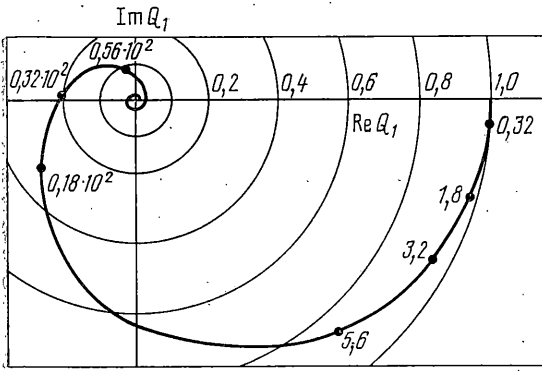
$$\omega_0 = \sum_{s \in S_0} \Omega_{0s} e^{st}, \quad \omega_1 = \sum_{s \in S_1} \Omega_{1s} e^{st}, \quad \mathbf{e} = \sum_{s \in S} \mathbf{E}_s e^{st}$$

то в режиме установившихся колебаний жидкости

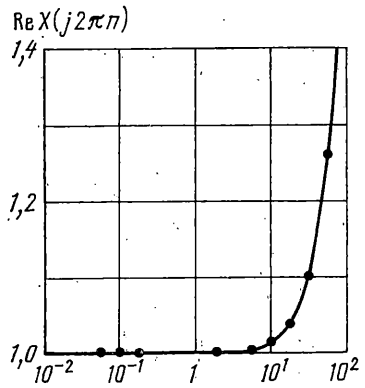
$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= -8\pi l^4 \sum_s \mathbf{E}_s \kappa^2 \Psi(s) e^{st} - 4\pi l^4 \sum_s \sum_{s_0} \mathbf{E}_p \times \Omega_{0s} X_0(s) \Psi_2(s+p) e^{(s+p)t} - \\ &- 4\pi l^4 \sum_s \sum_{s_1} \mathbf{E}_p \times \Omega_{1s} (2\Psi_1(s+p) - X_1(s) \Psi_2(s+p)) e^{(s+p)t} \\ \mathbf{m}(t) &= \frac{8}{3} \pi l^4 \sum_{s_0} \Omega_{0s} \Theta_0(s) e^{st} + \frac{8}{3} \pi l^4 \sum_{s_1} \Omega_{1s} \Theta_1(s) e^{st} - \\ &- 4\pi l^4 \sum_s \sum_s \mathbf{E}_p \times \mathbf{E}_s \kappa^2 X(s) \cdot \Theta_1(s+p) \cdot e^{(s+p)t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Исследование гидродинамического момента. Рассмотрим вращение обоих твердых тел при совпадении центров O_0 и O_1 . Согласно (2.5), (2.6) передаточные функции по угловой скорости вращения носимого и несущего твердых тел имеют вид ${}^8/3\pi l^4 \Theta_0(s)$ и ${}^8/3\pi l^4 \Theta_1(s)$. Следовательно, при вращении твердых тел с постоянными угловыми скоростями ($s=0$) гидродинамический момент равен $\mathbf{m} = {}^8/3\pi l^4 (\omega_1 - \omega_0)$. Если угловые скорости изменяются по гармоническому закону с частотой τ^{-1} колебаний тел, то гидродинамический момент вполне определяется зависимостью значений передаточных функций при $s = j2\pi$ от параметров l и α . Представленная на фиг. 2, 3 зависимость $\theta_0(j2\pi)$ и $\theta_1(j2\pi)$ от параметра α показывает, что значения этих функций близки к единице, если значения α не превышают единицы. Это условие устанавливает область применимости квазистационарных оценок гидродинамического момента при угловых колебаниях твердых тел.

Рассмотрим поступательные колебания носимого твердого тела относительно несущего, заданные в виде $\mathbf{e} = \sum_n \mathbf{E}_n e^{j2\pi n t}$ (сумма по n от $-\infty$ до $+\infty$). Эти колебания характеризуются движением центра O_0 по замкнутой траектории с периодом τ . Согласно (2.6) постоянная составляющая



Фиг. 3



Фиг. 4

момента при установившихся колебаниях жидкости равна

$$\langle m(t) \rangle = 16\pi^4 \sum_{n=1}^{n=\infty} 2\pi n \alpha \operatorname{Re} X(j2\pi n) \operatorname{Im} \mathbf{E}_n \times \operatorname{Re} \mathbf{E}_n$$

Зависимость вещественной части $X(j2\pi n)$ от параметра α (см. фиг. 4) показывает, что она близка к 1, если значения αn не превышают 10. Это условие устанавливает область применимости квазистационарных оценок постоянной составляющей момента при колебаниях носимого тела относительно несущего. Отметим, что в рассмотренном диапазоне изменения параметра α , с увеличением частоты колебаний постоянная составляющая момента возрастает быстрее чем по линейному закону, предсказанному по квазистационарному приближению [5]. Аналогичные оценки для поплавоквого подвеса твердого тела типа «цилиндр в цилиндре» установлены в [1].

4. Исследование устойчивости равновесия. Подстановка (2.5) в (1.2) с последующим применением прямого и обратного преобразования Лапласа, приводит к интегральному уравнению относительно $\mathbf{e}(t)$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{e} + \varphi_2 * (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_1) + \varphi_3 * [\mathbf{e} \times (\varphi_0 * \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \varphi_1 * \boldsymbol{\varepsilon}_1)] + \\ & + \varphi_3 * [\mathbf{e} \times (\varphi_0 \boldsymbol{\omega}_0 (+0) - \varphi_1 \boldsymbol{\omega}_1 (+0))] = \mathbf{e}_0 \varphi_4 + \varphi_5 * (\mathbf{g} - \mathbf{w}_1) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= L^{-1} X_0(s)/s, & \varphi_1(t) &= L^{-1} X_1(s)/s \\ \varphi_2(t) &= L^{-1} 6l \Psi_1(s) (\mu \kappa^4 + \lambda + 6l \Psi_1(s) \kappa^2)^{-1} \\ \varphi_3(t) &= L^{-1} 3l \Psi_2(s) (\mu \kappa^4 + \lambda + 6l \Psi_1(s) \kappa^2)^{-1} \\ \varphi_4(t) &= L^{-1} \alpha (\mu \kappa^2 + 6l \Psi_1(s)) (\mu \kappa^4 + \lambda + 6l \Psi_1(s) \kappa^2)^{-1} \\ \varphi_5(t) &= L^{-1} \mu (\mu \kappa^4 + \lambda + 6l \Psi_1(s) \kappa^2)^{-1}, & \boldsymbol{\varepsilon}_0 &= d\boldsymbol{\omega}_0/dt, & \boldsymbol{\varepsilon}_1 &= d\boldsymbol{\omega}_1/dt \end{aligned}$$

Однородное при $\mathbf{e}_0 = \mu(\mathbf{g} - \mathbf{w}_1) = 0$ уравнение (4.1) имеет тривиальное решение $\mathbf{e}(t) = 0$. Этому решению соответствует центральное положение равновесия точки O_0 . Решение неоднородного уравнения (4.1) описывает возмущенное движение в окрестности положения равновесия. Устойчивость равновесия в малом определяется обычным образом по отношению к возмущенному движению [3, 4].

Рассмотрим случай вращения твердых тел с постоянными угловыми скоростями

$$\boldsymbol{\omega}_0(t) = \omega_0 H(t) \mathbf{i}, \quad \boldsymbol{\omega}_1(t) = \omega_1 H(t) \mathbf{i} \quad (4.2)$$

где \mathbf{i} — неизменный орг осей вращения. Отметим, что функции φ_0, φ_1 в (4.1) допускают приближенные представления

$$\varphi_0(t) \simeq H(t), \quad \varphi_1(t) \simeq H(t) + \delta_+(t) \int_0^{\infty} (\varphi_1(x) - 1) dx \quad (4.3)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, $\delta_+(t)$ — односторонняя δ — функция Ди-

рака. При выполнении равенства (4.2) (4.3) уравнение (4.1) принимает вид интегрального уравнения типа свертки. При этом изображение $E(s) = Le(t)$ является решением линейного алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} E(\mu\kappa^4 + \lambda + 6l\Psi_1\kappa^2) + E \times i(6l\Psi_1\omega_1 - 3l\Psi_2(\omega_1 - \omega_0)) = \\ = e_0\alpha(\kappa^2\mu + 6l\Psi_1) + e_0 \times i\alpha\omega_0 3l^2\Psi_2(3l^2 + 1)^{-1} + \mu(G - W_1) \end{aligned} \quad (4.4)$$

и задача об устойчивости сводится к исследованию корней характеристического уравнения относительно κ^2 , вида

$$\det[I(\mu\kappa^4 + \lambda + 6l\Psi_1\kappa^2) + i\tilde{\nu}(6l\Psi_1\omega_1 - 3l\Psi_2(\omega_1 - \omega_0))] = 0 \quad (4.5)$$

где I — единичная матрица, $i\tilde{\nu}$ — кососимметрическая матрица, сопоставляемая орту i в векторном произведении.

Раскрывая определитель в (4.5) получим характеристические уравнения для случая движения центра O_0 вдоль направления i , и для случая движения центра O_0 в плоскости, нормальной к i :

$$\begin{aligned} \mu\kappa^4 + \lambda + 6l\Psi_1\kappa^2 = 0 \\ (\mu\kappa^4 + \lambda + 6l\Psi_1\kappa^2)^2 + 9l^2(2\Psi_1\omega_1 - \Psi_2(\omega_1 - \omega_0))^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Следовательно, вращение твердых тел вокруг осей одинакового направления оказывает влияние на устойчивость равновесия центра только в плоскости нормальной к направлению осей вращения.

Значения корней характеристического уравнения (4.6) зависят от значений параметров μ , λ , l , ω_0 , ω_1 . Применение метода D — разбиения дает границу устойчивости в пространстве этих параметров и частоту колебаний центра при потере устойчивости равновесия

$$4\lambda - \mu(\omega_0 + \omega_1)^2 + l(\omega_1^2 - \omega_0^2)/2 = 0 \quad (4.7)$$

$$\omega = (\omega_0 + \omega_1)/2 \quad (4.8)$$

Область устойчивости при этом определяется неравенством

$$4\lambda > \mu(\omega_0 + \omega_1)^2 - l(\omega_1^2 - \omega_0^2)/2 \quad (4.9)$$

Замена функций X , Ψ на единицу в уравнении (4.1) приводит его к форме, эквивалентной обыкновенному дифференциальному уравнению квазистационарного приближения. При этом из (4.6) следует (4.8). Однако, в отличие от (4.9) область устойчивости устанавливается другим неравенством

$$4\lambda > \mu(\omega_0 + \omega_1)^2 \quad (4.10)$$

Исследование устойчивости на основе уравнений квазистационарного приближения дает неверный результат.

Рассмотрим механизм развития неустойчивости в случае $\mu(g - w_1) = 0$. Из решения уравнений (4.1), (4.4) при выполнении равенства (4.7) следует, что в установившемся режиме точка O_0 описывает окружность с центром на оси вращения несущего твердого тела в плоскости перпендикулярной оси. При этом круговая частота обращения и направление движения точки O_0 определяются согласно (4.8). Покажем, что равенства (4.7), (4.8) выражают условия «динамического равновесия» главного вектора внешних сил, действующих на носимое твердое тело, и сил инерции при орбитальном движении точки O_0 в осях естественного трехгранника.

Действительно, пусть центр O_0 движется по окружности радиуса e с круговой частотой обращения ω . Обозначим τ , n — орты касательной и главной нормали окружности в точке O_0 . Главный вектор внешних сил и сил инерции равны $f + \frac{1}{3}\pi l^3 w_0 - ce$ и $-\frac{1}{3}\pi l^3 \rho_0 w_0$, где w_0 — ускорение центра O_0 , f — главный вектор гидродинамических сил (2.6).

Сумма проекций главных векторов внешних сил и сил инерции на направления τ , n дает

$$\begin{aligned} 4\pi l^4 e [2\omega_1 \operatorname{Re} \Psi_1 - (\omega_1 - \omega_0) \operatorname{Re} \Psi_2] - 8\pi l^4 e \omega \operatorname{Re} \Psi_1 = 0 \\ 4\pi l^4 e [2\psi_1 \operatorname{Im} \Psi_1 - (\omega_1 - \omega_0) \operatorname{Im} \Psi_2] - 8\pi l^4 e \omega \operatorname{Im} \Psi_1 + \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$+ce^{-4/3\pi l^3 \mu \omega^2} = 0 \quad (\kappa^2 = j\omega)$$

Уравнение (4.11) относительно ω имеет единственный вещественный корень (4.8). При выполнении условия (4.8) из равенства (4.12) следует (4.7).

Квазистационарное приближение не учитывает наличия нормальной составляющей главного вектора гидродинамических сил при орбитальном движении центра O_0 , которая при условии (4.8) равна $f \cdot n = \pi l^4 e (\omega_1^2 - \omega_0^2) / 6$. Если $\omega_1^2 = \omega_0^2$, то неравенства (4.9), (4.10) совпадают. Последнее условие выполняется при вращении твердых тел с одинаковой по величине угловой скоростью в одном ($\omega_1 = \omega_0$) либо противоположных ($\omega_1 = -\omega_0$) направлениях. Пусть $\omega_1 = \omega_0$, тогда $\omega = \omega_1 = \omega_0$. Следовательно, жидкость вращается вместе с носимым и несущим твердыми телами как твердое тело. При этом со стороны жидкости к носимому телу прикладывается только гидростатическая сила $4/3 \pi l^3 \rho \omega_0$. Пусть $\omega_1 = -\omega_0$, тогда $\omega = 0$. Следовательно, отсутствует колебательная форма потери устойчивости. Однако при этом гидродинамическая сила, связанная с вращением твердых тел, не равна нулю и является, согласно (2.6), гироскопической силой вида $f = 2/3 \pi l^4 \omega_1 \times (de/dt) \alpha$.

Устойчивость равновесия $e=0$ при вращении несущего твердого тела с переменной по величине и направлению скоростью рассматривалась в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Городецкий О. М., Климов Д. М.* О применимости квазистационарного метода для изучения динамики гороскопа с жидкостным подвесом // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 10–20.
2. *Радьш Ю. В.* Исследование гидродинамического момента, действующего на твердое тело в поплавковом подвесе // Механика гироскопических систем. Киев: Вища шк. 1982. Вып. 1. С. 85–92.
3. *Астапов И. С., Белоцерковский А. С., Морозов В. И.* Нелинейные интегродифференциальные уравнения аэроупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 61–70.
4. *Радьш Ю. В.* О влиянии вращения корпуса на устойчивость твердого тела в поплавковом подвесе // Механика гироскопических систем. Киев: Вища школа. 1985. Вып. 4. С. 63–69.
5. *Лойцянский Л. Г.* Гидродинамическая теория сферического подшипника // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 5. С. 531–540.
6. *Лойцянский Л. Г.* К теории сферического подшипника // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 133–145.
7. *Городецкий О. М.* Исследование возмущающих моментов вязкого трения в подвесе сферического поплавкового гироскопа // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 4. С. 20–26.
8. *Андрейченко К. П.* К теории слабонагруженного сферического гидродинамического подвеса // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 1. С. 17–24.
9. *Андрейченко К. П.* О возмущающих моментах в поплавковом гироскопе на вибрирующем основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 11–17.
10. *Ламб Г.* Гидромеханика. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
11. *Ханпель Дж., Бреннер Г.* Гидромеханика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
12. *Сорокин В. С.* Замечания о шаровых электромагнитных волнах // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 228–235.
13. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.
14. *Лапин А. А., Павловский М. А., Радьш Ю. В.* О гидродинамической реакции при колебаниях сферического поплавкового подвеса // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 157.
15. *Лапин А. А., Павловский М. А., Радьш Ю. В.* Исследование динамики гидростатического подвеса // Аннот. докл. 5-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике: Алма-Ата: Наука КазССР, 1981. С. 226.

Москва, Киев

Поступила в редакцию
15.II.1988