

УДК 539.3;519.6

© 1990 г.

В. А. АНДРУЩЕНКО, В. А. ГОЛОВЕШКИН, Н. Н. ХОЛИН
ЗАДАЧА О СООСНОМ СОУДАРЕНИИ ЦИЛИНДРА
С КРУГЛОЙ ПЛАСТИНОЙ

Рассматривается осесимметричная задача о соосном соударении цилиндра и круглой пластины в упругой постановке. Получено приближенное аналитическое решение задачи, позволяющее достаточно просто рассчитывать усилия на поверхности контакта, напряжения и перемещения в ударнике и мишени. Проверка справедливости используемых в полученном аналитическом решении гипотез осуществляется решением аналогичной задачи на ЭВМ. Численная методика решения задачи основана на явной двухшаговой разностной схеме типа предиктор-корректор, имеющей второй порядок точности и в ряде работ применявшейся для решения динамических задач теории упругости (см., например, [1]). Одной из трудных проблем, возникающих при решении пространственных задач соударения, является проблема корректной постановки граничных условий контакта¹. В данной работе задача формулируется и решается в перемещениях и на границе контакта ставятся условия на перемещения для случая полного прилипания. Однако допускаются и другие варианты граничных условий.

1. **Постановка задачи.** В начальный момент $t=0$ просходит соударение (со скоростью V_0) цилиндра радиуса r_0 и высоты l с дискообразной пластиной толщины h ; $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ — постоянные Ламе для материалов цилиндра и пластины соответственно. Рассматривается случай осевой симметрии, когда оси цилиндра и диска совпадают. Уравнения движения запишутся в виде $(\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi, \sigma_{rz})$ — компоненты тензора напряжений, u, w — радиальные и осевые перемещения):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Связь напряжений с перемещениями (закон Гука) примем в следующей форме (λ_i и μ_i — параметры Ламе, $i=1$ — для цилиндра и $i=2$ — для пластины):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda_i \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu_i \frac{\partial u}{\partial r} \\ \sigma_\varphi &= \lambda_i \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu_i \frac{u}{r} \\ \sigma_z &= \lambda_i \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu_i \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_{rz} &= \lambda_i (\partial u / \partial z + \partial w / \partial r) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Граничные условия на поверхности контакта ($z=0, r \leq r_0$) следующие:

$$(u_r)_1 = (u_r)_2, \quad (w_r)_1 = (w_r)_2, \quad (\sigma_z)_1 = (\sigma_z)_2, \quad (\sigma_{rz})_1 = (\sigma_{rz})_2 \quad (1.3)$$

¹ Заппаров К. И., Кукуджанов В. Н. Математическое моделирование задач импульсного деформирования, взаимодействия и разрушения упругопластических тел: Препринт № 280. М.: ИПМ АН СССР, 1986. 67 с.

Остальная внешняя поверхность считается свободной от напряжений. Начальные условия (при $t=0$) таковы:

$$\begin{aligned} u_1=0, \quad \partial u_1/\partial t=0, \quad w_1=0, \quad \partial w_1/\partial t=-V_0 \\ u_2=0, \quad \partial u_2/\partial t=0, \quad w_2=0, \quad \partial w_2/\partial t=0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Оценка напряжений в момент времени, близкий к начальному. Для начальных моментов времени предполагается, что

$$\frac{\partial w}{\partial z} \gg \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} \gg \frac{u}{r}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} \gg \frac{\partial u}{\partial r}$$

Тогда согласно (1.1)–(1.4) получим

$$\rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}, \quad z > 0 \quad (2.1)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}, \quad z < 0$$

$$w_1 = w_2 = 0, \quad \partial w_1/\partial t = -V_0, \quad \partial w_2/\partial t = 0 \quad (t=0) \quad (2.2)$$

$$w_1 = w_2, \quad (\lambda_1 + 2\mu_1) \partial w_1/\partial z = (\lambda_2 + 2\mu_2) \partial w_2/\partial z \quad (z=0) \quad (2.3)$$

Решение (2.1)–(2.3) имеет вид:

$$\begin{aligned} w_1 = \begin{cases} -V_0 t, & z > c_1 t \\ -V_0 t - V_0 (\lambda_2 + 2\mu_2) (z - c_1 t) / \Delta, & 0 < z < c_1 t \end{cases} \\ w_2 = \begin{cases} -V_0 (\lambda_1 + 2\mu_1) (z + c_2 t) / \Delta, & -c_2 t < z < 0 \\ 0, & z < -c_2 t \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Delta = c_2 (\lambda_1 + 2\mu_1) + c_1 (\lambda_2 + 2\mu_2), \quad c_i^2 = (\lambda_i + 2\mu_i) / \rho_i$$

Усилие F на поверхности контакта равно

$$F = (V_0/c_2) [\pi r_0^2 (\lambda_2 + 2\mu_2)] / [1 + c_1 (\lambda_2 + 2\mu_2) / c_2 (\lambda_1 + 2\mu_1)] \quad (2.5)$$

В частном случае, когда $c_1 = c_2 = c$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$:

$$F = 1/2 (V_0/c) \pi r_0^2 (\lambda + 2\mu) = 1/2 \rho c V_0 \pi r_0^2 \quad (2.6)$$

Для жесткого цилиндра ($c_1 \rightarrow \infty$):

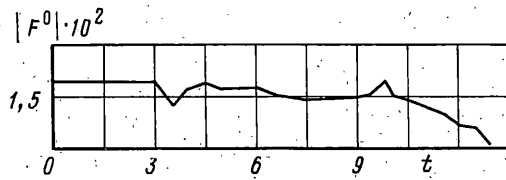
$$F = (V_0/c_2) \pi r_0^2 (\lambda_2 + 2\mu_2) = \rho_2 c_2 V_0 \pi r_0^2 \quad (2.7)$$

Следовательно, следует ожидать, что в начальный момент удара сила на поверхности контакта должна быть постоянной и определяться соотношением (2.5). В случае, когда поперечные размеры лежащего цилиндра имеют один порядок с толщиной, время, в течение которого сила остается близкой к константе, должно быть порядка h/c_2 .

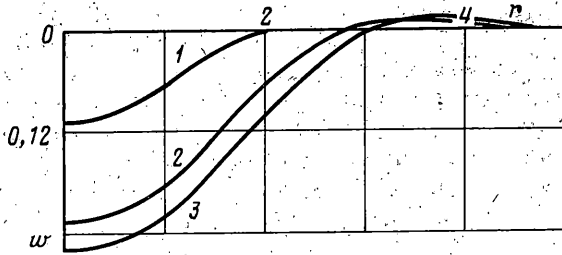
Посмотрим в какой степени это предположение подтверждается результатами численного расчета данной задачи. Примененная здесь численная методика основана на явной двухшаговой разностной схеме типа предиктор-корректор, имеющей второй порядок точности, и хорошо зарекомендовавшей себя при решении динамических задачи теории упругости [2, 3]. Применение явной схемы объясняется ее лучшей приспособленностью к архитектуре используемой вычислительной системы ЕС-1055М+МАМО типа SIMD. Счет производился при следующих значениях параметров: $l_0 = 3$ см, $r_0 = 1$ см, $V_0 = 40$ м/с, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $c_1 = c_2 = 5500$ м/с, $a_1 = a_2 = (\mu/\rho)^{1/2} = 2940$ м/с, $\rho_1 = \rho_2 = 2700$ кг/м³.

На фиг. 1 представлена полученная численно зависимость усилия на контактной поверхности $F^0 = |F| / (2\pi r_0^2 \rho c^2/9)$ от времени (в мкс). Как видно из графика, при $t \leq 3$ мкс сила на контакте остается практически постоянной. Время же двойного прохождения волны через пластину равно $t^0 = 2h/c \approx 3,6$ мкс.

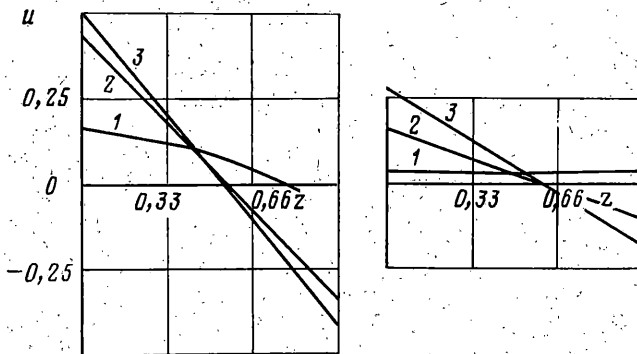
Сравним теперь значения усилий, полученные по приближенному и численному методам (теоретические результаты ниже будем обозначать индексом Т). Согласно (2.6): $F_T^0 = (\pi r_0^2 \rho c V_0/2) (2\pi r_0^2 \rho c^2/9)^{-1} = 9/4 V_0 c^{-1} \approx 1,64$, расчет дает $F^0 = 1,9$. Отклонение составляет 14%.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Отметим одну особенность решения (2.4). Непосредственно из формулы решения следует, что ускорение $\partial^2 w / \partial t^2$ всюду равно 0, за исключением границы фронта прохождения волны.

3. Оценка прогибов средней линии пластины. Для оценки прогибов срединной поверхности воспользуемся теорией пластин. Рассмотрим задачу о действии сосредоточенной силы на пластину. Уравнение для прогиба имеет вид ($p^2 = D/2\rho h$, D — жесткость ($D = Eh^3/12(1-\nu^2)$), h — толщина пластины; ρ — плотность материала):

$$\partial^2 w / \partial t^2 = -p^2 \Delta \Delta w. \quad (3.1)$$

Начальные условия: $w(r, 0) = 0$, $\partial w(r, 0) / \partial t = 0$.

Граничные условия:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} w(r, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial r} w(r, t) = 0.$$

Решение (3.1) при этих условиях имеет вид

$$w = \frac{1}{2} c t \left(-z^2 \int_z^\infty u^{-3} \sin u^2 du + \int_z^\infty u^{-1} \sin u^2 du \right) \quad (3.2)$$

$$z = \frac{1}{2} r (pt)^{1/2}, \quad c = Fp/\pi D$$

Согласно результатам численного счета (см. фиг. 1), сила F^0 во временном интервале $0 \leq t \leq 10,9$ мкс меняется слабо и приближенно равна $F^0 \approx 1,8$. Заменим действие ударника на преграду сосредоточенной силой.

Тогда из (3.2) прогиб в центре пластины $w(0, t) = w^0$ равен

$$w^0 = \frac{1}{8} F p D^{-1} t \quad (3.3)$$

Подставляя в (3.3) значение P , получим

$$w^0 = \frac{1}{36} \pi F^0 c^2 \rho t (r_0/h)^2 [12(1-\nu^2)/(E\rho)]^{1/2} \quad (3.4)$$

Взяв следующие параметры среды $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu) = (c^2 - 2a^2)/2(c^2 - a^2)$, $E = 2(1 + \nu)\mu$, и подставляя $c = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2} = 5500$ м/с и $a = (\mu/\rho)^{1/2} = 2940$ м/с, получим $\nu \approx 0,3$; $E/\rho = 2(1 + \nu)c^2$. Тогда из (3.4) при $t = 5,45$ мкс имеем: $w^0 = F^0 c t (r_0/h)^2 (c/a) [6(1 - \nu)]^{1/2} / 36 \approx 1,8 \cdot 10^{-4}$ м $\approx 0,18$ мм. Согласно же результатам численного счета (см. фиг. 2) $w(0, t) = 0,11$ мм (r в см). Однако заметим, что на пластину действовала не сосредоточенная нагрузка, а распределенная. Принимая это во внимание и считая эту нагрузку в первом приближении равномерно-распределенной, получим из (3.2) следующую формулу для прогиба в центре ($w^0 = F p t / 8 D$ — прогиб, соответствующий сосредоточенной силе, равной по величине распределенной):

$$w(0, t) = F p t \left\{ \int_0^{r_0} r dr \left[-r^2 (4 p t)^{-1} \int_{(r^2/4 p t)}^{\infty} x^{-2} \sin x dx + \int_{(r^2/4 p t)}^{\infty} x^{-1} \sin x dx \right] \right\} / (2 \pi D r_0^2) \quad (3.5)$$

$$w(0, t)/w^0 = [\pi - 2 \text{Si}(\beta) + (1 - \cos \beta)/\beta - \sin \beta + \beta \text{Ci}(\beta)] / \pi$$

$$\beta = r_0^2 (4 p t)^{-1}, \quad \text{Si}(\beta) = \int_0^{\beta} x^{-1} \sin x dx, \quad \text{Ci}(\beta) = - \int_{\beta}^{\infty} x^{-1} \cos x dx$$

При $t = 5,45$ мкс, $\beta = 0,32$ и из (3.5) получим, что $w(0, t)/w^0 = 0,69$. Следовательно $w(0, t) = 0,69 \cdot 1,8$ мм $= 0,12$ мм. Численный расчет, как уже отмечалось выше, дает прогиб в 0,11 мм. Отклонение составляет около 9%.

Рассмотрим теперь распределение прогиба по радиусу. Будем пользоваться формулой прогиба (3.2) для сосредоточенной силы. Для $r \geq r_0$ при этом погрешность не должна быть большой из-за распределенности нагрузки. Из (3.2) имеем

$$w(r, t)/w^0 = 2\pi^{-1} [1/2\pi - \text{Si}(\tau) - \sin \tau + \tau \text{Ci}(\tau)] \quad (\tau = r^2 (4 p t)^{-1})$$

Тогда при $t = 5,45$ мкс, $\tau = 0,32$ и $w(r_0, t)/w^0 = 0,48$. Расчетное же значение (см. фиг. 2) равно: $w(r_0, t)/w(0, t) = 17/27 \approx 0,63$. Принимая во внимание поправку на равномерность нагрузки, получим $w(r_0, t)/w(0, t) = 0,48/0,69 \approx 0,69$.

Для других значений τ ($r = 1,5$ см, $\tau = 0,72$) $w/w(0) = 0,2$, расчетное $w/w(0) = 7/27 \approx 0,26$. С учетом же поправки $w/w(0) = 0,2/0,69 \approx 0,29$. Следовательно, использование теории пластин дает неплохую оценку для прогиба. При $t = 10,9$ мкс, отношение прогиба для сосредоточенной нагрузки к прогибу для равномерно распределенной нагрузки из (3.5), полагая $\beta = 0,16$ (при $r = 0$), равно 0,81.

Полагая $F^0 = 1,6 \cdot 10^{-2}$, из (3.3) получим $w^0 = 0,32$ мм. С учетом поправки на распределенность нагрузки $w(0, t) = 0,26$ мм. Расчетное значение равно 0,23 мм.

Проведенные оценки для других значений радиуса для того же момента времени сведены в таблицу 1 (в 3-ем столбце приведены величины $w/w(0, t)$ с учетом поправки, в 4-ом — расчетные, в 5-ом — δN относительное отклонение в %).

4. Проверка гипотезы прямых нормалей. Согласно гипотезе прямых нормалей ($u(h/2, r)$, $u(-h/2, r)$ — радиальные смещения при $z = \pm h/2$:

$$u(h/2, r) - u(-h/2, r) = h \delta w / \delta t \quad (4.1)$$

Из (3.2) имеем

$$\delta w / \delta r = \frac{1}{4} c t z (p t)^{-1/2} \int_z^{\infty} u^{-2} \sin u du \quad (z = \frac{1}{2} r (p t)^{-1/2}) \quad (4.2)$$

Из (4.1), (4.2) получим

$$f(r) = [u(h/2, r) - u(-h/2, r)] (w^0)^{-1} = 2 h z [z^{-2} \sin z^2 - \text{Ci}(z^2)] [\pi (p t)^{1/2}]^{-1} \quad (4.3)$$

Таблица 1

r , см	w/w^0	$w/w(0, t)$	$w/w(0, t)$	δN
1	0,65	0,8	0,8	0
1,5	0,44	0,54	0,54	0
2	0,23	0,28	0,3	6,7
2,5	0,08	0,1	0,09	11,0

Таблица 2

r	f	f	f
2	0,37	0,46	0,36
3	0,15	0,19	0,12

Таблица 3

r	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
k	$17/25 \approx 0,486$	$15/30 = 0,5$	$13/26 = 0,5$	$11/23 \approx 0,478$	$9/18 = 0,5$	$6,5/14 \approx 0,464$	$5/11 \approx 0,455$
δN	2,8	0	0	4,4	0	7,2	9,0

При $t=5,45$ мкс, $r=2$ см, получим $(h/2)(pt)^{-1/2}=0,57$; $(r/2)(pt)^{-1/2}=1,14$; $(r^2/4) \cdot (pt)^{-1}=1,28$, а $f(2)=0,24$. Расчетное значение равно 0,21 (см. фиг. 3, на которой для трех моментов времени: $t=5,45$; 10,9; 12,8 мкс — кривые 1, 2, 3 соответственно, представлены графики зависимости радиальных переменных от z в см: в пластине для сечений, удаленных от оси на расстояния $r=2$ (а) и 3 (б) см). С учетом поправки отношение равняется 0,35 (и в мм). Для момента времени $t=10,9$ мкс имеем (см. таблицу 2. В 3-ем столбце приведены значения f с учетом поправок, в 4-ом — расчетные).

Таким образом, гипотеза прямых нормалей подтверждается плохо. Вместе с тем, линейность распределения радиальных перемещений, как функции z в целом подтверждается (см. фиг. 3).

5. Критерий подобия. В случае выполнения гипотезы теории пластин, принимая во внимание постоянство силы на временном отрезке $0 \leq t \leq 10,9$ мкс, должно выполняться согласно (3.2) следующее равенство

$$k = w(r; t=5,45) / w(\sqrt{2}r, t=10,9) = 0,5$$

Ниже в таблице 3 приведены расчетные значения k (см. фиг. 2) (в третьей строке приведены величины относительных отклонений δN в процентах).

6. Определение силы на поверхности контакта. До момента отражения волны от нижнего края пластины согласно (2.6), (2.4) имеем

$$F = \pi r_0^2 (\lambda_2 + 2\mu_2) [w_2(-h/2, t) - w_2(0, t)] (h/2)^{-1} \quad (6.1)$$

Для дальнейшего исследования процесса соударения примем следующие гипотезы:

1. Ударяющий цилиндр будем рассматривать как стержень;
2. Для преграды будем считать выполненными гипотезы теории пластин.

Введем обозначения: $w_1(z, t)$ — перемещения вдоль оси z в цилиндре, $w_2(r, t)$ — прогиб средней линии пластины, $F(t)$ — сила, действующая на контакте. Тогда система уравнений для определения этих величин примет вид:

$$\partial^2 w_1 / \partial t^2 = c_1^2 \partial^2 w_1 / \partial z^2 \quad (6.2)$$

$$\partial^2 w_2 / \partial t^2 = -p_2^2 \Delta \Delta w_2 - F(t) \delta(r) (\rho_2 h)^{-1} \quad (6.3)$$

Здесь $\delta(r)$ — дельта-функция, $p_2^2 = E_2 h^3 [12\rho_2 h(1-\nu^2)]^{-1}$ (действующую силу $F(t)$ ниже заменяем сосредоточенной нагрузкой). Введем также обозначения: $w_1(0, t) = w_3(t)$, $w_2(0, t) = w_4(t)$.

Согласно (3.2) $\partial w_2(0, t)/\partial t = -1/8 p_2 D_2^{-1} F(t)$, следовательно для w_1 имеем уравнение

$$dw_1/dt = -1/8 p_2 D_2^{-1} F \quad (6.4)$$

Решение (6.2) записывается в виде

$$w_1 = f(z - c_1 t) + f_1(z + c_1 t) \quad (6.5)$$

Для рассматриваемой задачи начальные условия

$$w_1(z, 0) = 0, \quad \partial w_1(z, 0)/\partial t = -V_0, \quad 0 < z < l \quad (6.6)$$

Граничные условия ($b_1 = \pi r_0^2 (\lambda_1 + 2\mu_1)$):

$$b_1 \partial w_1(0, t)/\partial z = -F(t), \quad \partial w_1(l, t)/\partial z = 0 \quad (6.7)$$

Из (6.5) — (6.6) имеем

$$f(z) + f_1(z) = 0, \quad -c_1 f'(z) + c_1 f_1'(z) = -V_0 \quad (6.8)$$

$$f'(z) = 1/2 V_0 c_1^{-1}, \quad f_1'(z) = -1/2 V_0 c_1^{-1}, \quad 0 < z < l \quad (6.9)$$

При $z = l$, принимая во внимание (6.7), имеем

$$f'(l - c_1 t) + f_1'(l + c_1 t) = 0 \quad (6.10)$$

Из (6.9) и (6.10) получим $f_1'(l + c_1 t) = -1/2 V_0 c_1^{-1}$, то есть

$$f_1'(z) = -1/2 V_0 c_1^{-1}, \quad l < z < 2l \quad (6.11)$$

При $z = 0$ из (6.7) получим

$$f'(-c_1 t) + f_1'(c_1 t) = -F(t) b_1^{-1} \quad (6.12)$$

Далее, из (6.11) — (6.12) следует

$$f'(-c_1 t) = -F(t) b_1^{-1} + 1/2 V_0 c_1^{-1} \quad (c_1 t < 2l) \quad (6.13)$$

Из определения w_3 следует

$$dw_3/dt = -c_1 f'(c_1 t) + c_1 f_1'(c_1 t) \quad (6.14)$$

Тогда согласно (6.11), (6.13), (6.14):

$$dw_3/dt = F(t) c_1 b_1^{-1} - V_0 \quad (0 < c_1 t < 2l) \quad (6.15)$$

Выражение для $F(t)$ примем в форме (6.1) ($b_2 = \pi r_0^2 (\lambda_2 + 2\mu_2)$):

$$F = b_2 (w_4 - w_3) (h/2)^{-1} \quad (6.16)$$

Система уравнений (6.4), (6.15), (6.16) служит для определения неизвестных w_3 , w_4 , F . Из (6.4), (6.15), (6.16) следует ($S = w_4 - w_3$):

$$dS/dt = -[1/8 p_2 D_2^{-1} + c_1 b_1^{-1}] b_2 S (h/2)^{-1} + V_0 \quad (6.17)$$

$$F = 2b_2 S h^{-1} \quad (6.18)$$

Для системы уравнений (6.17), (6.18) начальные условия определим из решения одномерной задачи (2.4). При $t = h/c_2$ имеем

$$S = S_0 = 1/2 V_0 h b_1 (b_1 c_2 + b_2 c_1)^{-1} \quad (6.19)$$

Решение уравнения (6.17) запишется в виде:

$$S = V_0/k + (S_0 - V_0/k) \exp[-k(t - h/c_2)] \quad (6.20)$$

$$k = 2b_2 h^{-1} (1/8 p_2 D_2^{-1} + c_1 b_1^{-1})$$

Выражение для k перепишем в виде

$$k = 2c_2 h^{-1} [\rho_2 c_2 (\rho_1 c_1)^{-1} + 1/8 \pi \sqrt{6(1-\nu_2)} c_2 r_0^2 (a_2 h^2)^{-1}] \quad (6.21)$$

Если $c_1=c_2=c$, $\rho_1=\rho_2=\rho$, $a_1=a_2=a=\sqrt{\mu/\rho}$, $r_0/h=1$, то $k=2ch^{-1}[1+^{+1/3}\pi\sqrt{6(1-\nu)}ca^{-1}]$.

При $t=h/c_2$ значение силы F равно

$$F_0=V_0b_1b_2(b_1c_2+b_2c_1)^{-1} \quad (6.22)$$

При $t \rightarrow \infty$ значение F стремится к F_1 , где

$$F_1=b_2c_2^{-1}[\rho_2c_2(\rho_1c_1)^{-1+^{+1/3}\pi\sqrt{6(1-\nu_2)}}c_2r_0^2(a_2h^2)^{-1}] \quad (6.23)$$

Однако, уравнения для f и f_1 были выведены для

$$f'(z) = \begin{cases} ^{1/2}V_0c_1^{-1}, & 0 < z < l \\ ^{1/2}V_0c_1^{-1} - F(-zc_1^{-1})b_1^{-1}, & -2l < z < 0 \end{cases}$$

$$f_1'(z) = -^{1/2}V_0c_1^{-1}, \quad 0 < z < 2l$$

При $z=l$ имеем $f'(l-c_1t) + f_1'(l+c_1t) = 0$, следовательно $f_1'(l+c_1t) = -f'(l-c_1t)$ и для $l < c_1t < 3l$ имеем $f_1'(l+c_1t) = -^{1/2}V_0c_1^{-1} + F(z-lc_1^{-1})b_1^{-1}$
или

$$f_1'(z) = -^{1/2}V_0c_1^{-1} + F(zc_2^{-1} - 2lc_1^{-1})b_1^{-1} \quad \text{при } 2l < z < 4l \quad (6.24)$$

При $z=0$ имеем $f'(-c_1t) + f_1'(c_1t) = -F(t)b_1^{-1}$. Подставляя в это соотношение (6.24), получим

$$f'(-c_1t) = ^{1/2}V_0c_1^{-1} - [F(t) + F(t-2lc_1^{-1})]b_1^{-1}$$

При $-4l < z < -2l$ получим

$$f'(z) = ^{1/2}V_0c_1^{-1} - [F(-zc_1^{-1}) + F(-zc_1^{-1} - 2lc_1^{-1})]b_1^{-1} \quad (6.25)$$

Тогда при $2l < c_1t < 4l$ имеем

$$dw_3/dt = -c_1f(-c_1t) + c_1f_1(c_1t) \quad (6.26)$$

Из (6.24) - (6.26) получим

$$dw_3/dt = -V_0 + c_1b_1^{-1}[2F(t-2lc_1^{-1}) + F(t)] \quad (6.27)$$

а из (6.4), (6.17), (6.18), (6.27) получим

$$dS/dt = V_0 - kS - 2c_1b_1^{-1}F(t-2lc_1^{-1}) \quad (6.28)$$

Рассмотрим конкретный случай: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$; $\mu_1=\mu_2=\mu$; $\rho_1=\rho_2=\rho$; $l=3r_0=3h$; $\nu=0,3$; $c=5500$ м/с, $a=2940$ м/с. Тогда из (6.21) имеем $k \approx 5c/h$ и

$$S = ^{1/20}V_0hc^{-1}\{4 + \exp[-5ch^{-1}(t-hc^{-1})]\}$$

Заметим, что за время порядка h/c величина S меняется примерно на 20%, по сравнению со значением при $t=h/c$, и при $t > 2h/c$ значение S меняется слабо. Этому изменению S соответствует изменение силы на контакте с величины $F_0 = ^{1/2}\pi r_0^2(\lambda+2\mu)V_0c^{-1}$ до значения $F_1 = ^{2/5}\pi r_0^2(\lambda+2\mu)V_0c^{-1}$.

Для качественного анализа будем считать, что значение F на отрезке $0 \leq ct \leq 2l$ всюду равно F_1 . При этом $ct=2l$ соответствует время $t_1=10,9$ мкс. Тогда при $ct > 2l$ из (6.28) имеем

$$dS/dt = ^{1/5}V_0 - 5ch^{-1}S \quad (6.29)$$

При $t=2l/c$, $S=V_0h/5c$ и решение (6.29) запишется в виде:

$$S = ^{1/25}V_0hc^{-1}\{1 + 4 \exp[-5ch^{-1}(t-2lc^{-1})]\}$$

Отметим, что S и соответственно сила F должны уменьшиться в пять раз за время порядка h/c .

Рассмотрим случай удара бесконечно длинного стержня по бесконечной пластине. Тогда из (6.20) при $t \rightarrow \infty$ имеем $S \rightarrow V_0/k$, т. е. поверхность контакта стержня и срединная поверхность пластины в пределе движутся с постоянной скоростью равной \dot{V}_* . Из (6.15)

$$V_* = V_0\{[1 + ^{1/3}\pi\rho_1c_1(\rho_2a_2)^{-1}(r_0h^{-1})^2\sqrt{6(1-\nu_2)}]^{-1} - 1\}$$

t	r	$w(r)/w(0)$	$w(r)/w(0)$	δN
5,45	1	0,73	0,63	15,9
	1,5	0,29	0,26	11,5
10,9	1	0,84	0,81	3,7
	1,5	0,52	0,56	7,1
	2	0,25	0,29	13,8
	2,5	0,08	0,09	11,1

Рассмотрим случай, когда $2l/c_1 \ll 1/k$, что соответствует в том числе и абсолютно жесткому ударнику. В этом случае уравнение движения ударника запишется в виде (M — масса ударника):

$$M \ddot{w}_3 / dt^2 = -F(t) \quad (6.30)$$

Из (6.4), (6.17) и (6.30) получим уравнение:

$$\begin{aligned} d^2 S / dt^2 + \alpha_1 c_2 h^{-1} dS / dt + \alpha_2 (c_2 h^{-1})^2 S = 0 \\ \alpha_1 = 1/4 \pi (r_0 h^{-1})^2 c_2 a_2^{-1} \sqrt{6(1-\nu_2)}, \quad \alpha_2 = 2 \rho \pi r_0^2 h M^{-1} \end{aligned}$$

Корни соответствующего характеристического уравнения (даются формулой $k_{1,2} = ch^{-1} [-1/2 \alpha_1 \pm (1/4 \alpha_1^2 - \alpha_2)^{1/2}]$).

Следует отметить, что существует значение массы осколка, при которой корни из действительных отрицательных превращаются в комплексные. Это значение массы обозначим M^0 :

$$M^0 = 8 \rho a_2 h^3 [c_2 \sqrt{6(1-\nu_2)}]^{-1}$$

Величина M^0 имеет порядок массы части пластины, лежащей под осколком. В рассматриваемом случае отскок возможен, если $M < M^0$, так как при этом S становится отрицательной. При $M > M^0$, при $t \rightarrow \infty$, $S \rightarrow 0$.

7. Квазистатическая аналогия. Прогиб пластины под действием постоянной силы определяется соотношением

$$w = 1/8 p F D^{-1} t \quad (7.1)$$

Прогиб пластины, защемленной по радиусу a определяется формулой $w = 1/16 a^2 F (\pi D)^{-1}$ (7.2)

То есть прогиб в центре пластины для динамической задачи, эквивалентен прогибу защемленной пластины, если радиус защемления изменяется по закону $a = (2\pi p t)^{1/2}$. Для пластины, защемленной по контуру $r = a$, под действием равномерно распределенной по контуру $r = r_0$ нагрузки суммарного значения F прогиб задается формулой

$$\begin{aligned} w = 1/16 F (\pi D)^{-1} \{ 4a^{-2} (a^2 - r_0^2)^2 - 2(r_0^2 - r^2) + 4r_0^2 a^{-2} (r_0^2 - r^2) + \\ + 8 \ln [ar_0^{-1} (r_0^2 - r^2)] - r_0^{-2} (r_0^4 - r^4) \}, \quad 0 < r < r_0 \\ w = 1/16 F (\pi D)^{-1} \{ a^{-2} (a^2 - r^2) (a^2 - r_0^2) - 2 \ln [ar^{-1} (r^2 - r_0^2)] \}, \quad r_0 < r < a \end{aligned}$$

В качестве единицы измерения прогиба примем величину $w_+ = 1/16 a^2 F (\pi D)^{-1}$. Выше в таблице 4 для двух моментов времени приведены значения отношений прогибов пластины для различных r к прогибу в центре пластины (в 3-ем столбце приведены значения $w(r)/w(0)$ по статической оценке, в 4-ом — расчетные, в 5-ом — δN — относительные отклонения в процентах).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Андрианкин Э. И., Андрущенко В. А., Холин Н. Н. Волнообразование и разрушение в упруговязких и упругопластических материалах при мгновенном нагреве локальной области // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 120—123.
- Андрианкин Э. И., Андрущенко В. А., Холин Н. Н. Численное решение задач волновой динамики с использованием матричного процессора ЕС — 1055 М // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 8. С. 1203—1211.
- Андрианкин Э. И., Андрущенко В. А., Холин Н. Н. Численная методика решения трехмерных нестационарных задач динамики упругопластических сред // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 11. С. 1711—1718.

Москва

Поступила в редакцию
20.VI.1989