МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1990

УДК 539.3

Е. Д. СВИЯЖЕНИНОВ, В. М. ФРИДМАН

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО ТЕЛА СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Предлагается способ решения задачи о гармонических колебаниях упругого тела сложной геометрической формы с помощью видоизмененной процедуры Бубнова – Галеркина – Ритца, связанной со смешанным вариационным принципом Рейсснера. Напряженное состояние и перемещения аппроксимируются одновременно и независимо. В качестве координатных функций используются формы свободных колебаний тела простой геометрической формы, включающего в себя исходное. Эти формы свободных колебаний (формы перемещений и напряженного состояния) могут быть найдены существенно проще, чем собственные формы исходного тела. Для выполнения условий на границе исходного тела последовательность координатных функций дополняется функциями, терпящими на ней разрыв первого рода. В процессе решения удается воспользоваться ортогональностью форм свободных колебаний тела простой геометрической формы. Это позволяет получить результирующую систему линейных алгебраических уравнений, порядок которой не зависит от числа удерживаемых форм свободных колебаний.

1. Постановка задачи о колебаниях упругого тела сложной геометрической формы при сложных граничных условиях. Задача о гармонических колебаниях упругого тела (трехмерного, оболочки, стержня), занимающего область Ω, приводит к системе дифференциальных уравнений, которая в операторной форме может быть записана в виде [1]:

$$Dx-\lambda^2Ry=f,\quad D^*y-Bx=e \tag{1.1}$$

На границе тела Γ задаются условия

$$X+KY=F\ (\Gamma_1),\quad Y+GX=E\ (\Gamma_2),\quad \Gamma_1+\Gamma_2=\Gamma \tag{1.2}$$

Здесь x, y – амплитудные значения напряженного состояния и перемещения в области; $X=Nx$, $Y=Ty$, куда входят граничные значения x и y, N и T – линейные операторы; f, F – объемная и поверхностная внешние силы; e, E – заданные деформация и перемещения граничных точек тела; λ – частота колебаний; D, D^* – дифференциальные операторы, сопряженные в смысле Лагранжа

$$\int\limits_\Omega Dxyd\Omega=\int\limits_\Omega xD^*yd\Omega-\int\limits_\Gamma XYd\Gamma \tag{1.3}$$

R, B – алгебраические операторы, характеризующие инерционные и упругие свойства тела, самосопряженные, положительные

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega Ry_1y_2d\Omega=\int\limits_\Omega y_1Ry_2d\Omega;\quad \int\limits_\Omega Ryyd\Omega>0,\quad y\neq0\\ \int\limits_\Omega x_1Bx_2d\Omega=\int\limits_\Omega Bx_1x_2d\Omega;\quad \int\limits_\Omega xBxd\Omega>0,\quad x\neq0\end{gathered} \tag{1.4}$$

$K=K(\lambda)$, $G=G(\lambda)$ – алгебраические операторы, характеризующие инерционно-упругие свойства прилегающей к границе тела внешней среды.

Отметим, что сложные граничные условия (1.2) включают в себя случай, когда на части границы могут быть заданы и простые однородные условия $X=0$ $(\Gamma_1^0 \in \Gamma_1)$, $Y=0$ $(\Gamma_2^0 \in \Gamma_2)$.

В [2] рассматриваются задачи, основная сложность которых заключается в выполнении граничных условий вида (1.2). Решения таких задач предлагается строить с использованием форм и частот свободных колебаний упругого тела при простых однородных граничных условиях. Однако зачастую трудоемкость решения задач о колебаниях упругого тела (1.1), (1.2) бывает обусловлена не столько сложностью уравнений (1.1) или граничных условий (1.2), сколько сложностью геометрической формы области Ω. Рассмотрению задач такого класса и посвящена настоящая работа.

2. Использование спектральных характеристик охватывающего тела простой геометрической формы. Особенность предлагаемого способа решения задачи (1.1), (1.2) заключается в том, что при его построении используются формы и частоты свободных колебаний тела более простой конфигурации, чем в исходной задаче. Предположим, что можно указать такую форму области Ω°, охватывающей исходную область Ω, при которой легко решается задача определения форм x_i, y_i и частот λ_i свободных колебаний (спектральная задача). Область $\Omega^\circ-\Omega$, дополняющую исходную область сложной конфигурации Ω до области простой конфигурации Ω°, по аналогии с [3], назовем фиктивной.

Будем считать, что уравнения (1.1) справедливы в расширенной области Ω°, содержащей область Ω исходного тела. Вне области Ω объемная сила f и заданная деформация e полагаются равными нулю. Граница Γ полностью или частично окажется внутри Ω°. Граничные условия (1.2) на Γ остаются прежними и в случае совпадения части границы исходной области Ω и охватывающей ее Ω°. Основное внимание уделим выполнению граничных условий для исходной области в точках, которые стали внутренними по отношению к Ω°. Поэтому для простоты будем полагать, что на границе Γ° области Ω° заданы простые однородные условия

$$X=0 \ (\Gamma_1^\circ), \quad Y=0 \ (\Gamma_2^\circ), \quad \Gamma_1^\circ+\Gamma_2^\circ=\Gamma^\circ \tag{2.1}$$

Часть границы Γ, проходящей внутри Ω° (не совпадающей с Γ°), обозначим через S. Вместо (1.2) сформулируем условия

$$\begin{gathered} X+KY=F \ (S_1-0), \ Y+GX=E \ (S_2-0), \ S_1+S_2=S \\ X+KY=F+F^\vee \ (S_1+0), \ Y+GX=E+E^\vee \ (S_2+0) \end{gathered} \tag{2.2}$$

где -0 означает предел при приближении к S по нормали из исходной области Ω, а $+0$ – из фиктивной $\Omega^\circ-\Omega$; $F^\vee$, $E^\vee$ – фиктивные силы и перемещения, приложенные к фиктивной области на ее границе.

Исходную задачу (1.1), (1.2) будем решать в трансформированной постановке (1.1), (2.1), (2.2). Решение ищем в виде

$$x=x^\circ+x^\vee, \quad y=y^\circ+y^\vee \tag{2.3}$$

где x°, y° – непрерывны в Ω°, удовлетворяют простым однородным условиям (2.1) на ее границе Γ° и представляются отрезками рядов

$$x^\circ=\sum_{i=1}^{I}\alpha_i x_i, \quad y^\circ=\sum_{i=1}^{I}\beta_i y_i \tag{2.4}$$

$x^\vee$, $y^\vee$ – терпят разрыв на границе S и служат для удовлетворения условий (2.2)

$$x^\vee=\sum_{j=1}^{J}a_j x_j^\vee, \quad y^\vee=\sum_{j=1}^{J}b_j y_j^\vee \tag{2.5}$$

$$x_j^\vee=\begin{cases}0, & \Omega+S\\ x_j, & \Omega^\circ-\Omega-S\end{cases},\quad y_j^\vee=\begin{cases}0, & \Omega+S\\ y_j, & \Omega^\circ-\Omega-S\end{cases} \tag{2.6}$$

Входящие в (2.4), (2.5) функции x_i, y_i — нормированные формы свободных колебаний тела простой конфигурации Ω° при простых однородных граничных условиях (2.1), обладающие свойством ортогональности

$$\int\limits_{\Omega^\circ} Ry_iy_jd\Omega=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases},\quad \int\limits_{\Omega^\circ} x_iBx_jd\Omega=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \lambda_i^2, & i=j\end{cases} \tag{2.7}$$

Фиктивные силы $F^\vee$ и перемещения $E^\vee$ служат для выполнения условия разрыва напряжений и перемещений на S и выбираются такими

$$X^\vee+KY^\vee=F^\vee\ (S_1+0),\quad Y^\vee+GX^\vee=E^\vee\ (S_2+0) \tag{2.8}$$

Решение трансформированной задачи (1.1), (2.1), (2.2) в области $\Omega\in\Omega^\circ$ совпадает с решением исходной задачи (1.1), (1.2) и, в силу (2.6), имеет вид

$$x=x^\circ,\quad y=y^\circ \tag{2.9}$$

Таким образом, задача сводится к определению коэффициентов аппроксимации α_i, β_i, $i=1,\ldots,I$. Для их нахождения воспользуемся проекционными условиями видоизмененного метода Бубнова — Галеркина — Ритца [1]:

$$\int\limits_{\Omega^\circ}(Dx-\lambda^2Ry-f)\,y_i\,d\Omega+\int\limits_{S_1+0}(X+KY-F-F^\vee)\,Y_id\Gamma-\int\limits_{S_1-0}(X+KY-F)\,Y_id\Gamma=0$$

$$\int\limits_{\Omega^\circ}x_i(D^*y-Bx-e)\,d\Omega-\int\limits_{S_2+0}X_i(Y+GX-E-E^\vee)\,d\Gamma+\int\limits_{S_2-0}X_i(Y+GX-E)\,d\Gamma=0 \tag{2.10}$$

$$(i=1,\ldots,I)$$

$$\int\limits_{\Omega^\circ}(Dx-\lambda^2Ry-f)\,y_j^\vee d\Omega+\int\limits_{S_1+0}(X+KY-F-F^\vee)\,Y_j^\vee d\Gamma-\int\limits_{S_1-0}(X+KY-F)\,Y_j^\vee d\Gamma=0$$

$$\int\limits_{\Omega^\circ}x_j^\vee(D^*y-Bx-e)\,d\Omega-\int\limits_{S_2+0}X_j^\vee(Y+GX-E-E^\vee)\,d\Gamma+\int\limits_{S_2-0}X_j^\vee(Y+GX-E)\,d\Gamma=0 \tag{2.11}$$

$$(j=1,\ldots,J)$$

Поверхностные интегралы по границе Γ°, в силу однородности условий (2.1), равны нулю.

Вследствие (2.6), (2.8) уравнения (2.10), (2.11) упрощаются

$$\int\limits_{\Omega^\circ}(Dx-\lambda^2Ry)\,y_id\Omega=f_i,\quad \int\limits_{\Omega^\circ}x_i(D^*y-Bx)\,d\Omega=e_i\quad (i=1,\ldots,I) \tag{2.12}$$

$$\int\limits_{\Omega^\circ-\Omega}(Dx-\lambda^2Ry)\,y_jd\Omega+\int\limits_{S_1}(X^\circ+KY^\circ)\,Y_jd\Gamma=F_j\quad (j=1,\ldots,J)$$

$$\int\limits_{\Omega^\circ-\Omega}x_j(D^*y-Bx)\,d\Omega-\int\limits_{S_2}X_j(Y^\circ+GX^\circ)\,d\Gamma=-E_j \tag{2.13}$$

$$f_i=\int\limits_{\Omega}fy_id\Omega,\quad e_i=\int\limits_{\Omega}x_ied\Omega,\quad F_j=\int\limits_{S_1}FY_jd\Gamma,\quad E_j=\int\limits_{S_2}X_jEd\Gamma$$

Подставляя в (2.12), (2.13) вместо x, y их представления (2.3)—(2.6), меняя порядок интегрирования и суммирования, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно аппроксимирующих коэффициентов

$$\lambda_i^2\alpha_i-\lambda^2\beta_i+\sum_{j=1}^{J}\lambda_j^2R_i^ja_j-\sum_{j=1}^{J}\lambda^2R_i^jb_j=f_i \quad (i=1,\dots,I)$$

$$-\lambda_i^2\alpha_i+\lambda_i^2\beta_i-\sum_{j=1}^{J}B_j^ia_j+\sum_{j=1}^{J}B_j^ib_j=e_i \tag{2.14}$$

$$\sum_{i=1}^{I}(\lambda_i^2R_j^i+\Gamma_{1j}^i)\alpha_i-\sum_{i=1}^{I}(\lambda^2R_j^i-K_j^i)\beta_i+$$

$$+\sum_{l=1}^{J}\lambda_l^2R_j^la_l-\sum_{l=1}^{J}\lambda^2R_j^lb_l=F_j \quad (j=1,\dots,J) \tag{2.15}$$

$$-\sum_{i=1}^{I}(B_i^j+G_i^j)\alpha_i+\sum_{i=1}^{I}(B_i^j-\Gamma_{2i}^j)\beta_i-\sum_{l=1}^{J}B_l^ja_l+\sum_{l=1}^{J}B_l^jb_l=-E_j$$

$$R_j^i=\int\limits_{\Omega^\circ-\Omega}Ry_iy_jd\Omega,\quad B_i^j=\int\limits_{\Omega^\circ-\Omega}x_jBx_i\,d\Omega,\quad \Gamma_{1j}^i=\int\limits_{S_1}X_iY_jd\Gamma$$

$$\Gamma_{2i}^j=\int\limits_{S_2}X_jY_id\Gamma,\quad K_j^i=\int\limits_{S_1}KY_iY_jd\Gamma,\quad G_i^j=\int\limits_{S_2}X_jGX_id\Gamma$$

При вычислении R_j^i, B_j^i объемное интегрирование по фиктивной области $\Omega^\circ-\Omega$ заменяется поверхностным интегрированием по S.

Действительно, из свойства сопряженности операторов D, D^* по Лагранжу (1.3) следуют равенства

$$B_j^i=\lambda_i^2R_j^i+\Gamma_j^i,\quad B_i^j=\lambda_j^2R_i^j+\Gamma_i^j \tag{2.16}$$

$$\Gamma_j^i=\int\limits_S X_iY_jd\Gamma,\quad \Gamma_i^j=\int\limits_S X_jY_id\Gamma$$

В силу самосопряженности операторов R, B (1.4) индексы у R_j^i, B_j^i переставимы

$$R_j^i=R_i^j,\quad B_j^i=B_i^j \tag{2.17}$$

Решая (2.16), (2.17) относительно R_j^i, B_j^i, получаем

$$R_j^i=\frac{\Gamma_j^i-\Gamma_i^j}{\lambda_j^2-\lambda_i^2},\quad B_j^i=\frac{\lambda_j^2\Gamma_j^i-\lambda_i^2\Gamma_i^j}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}$$

что и требовалось доказать.

Благодаря свойству ортогональности форм свободных колебаний (2.7) все коэффициенты α_i, β_i, $i=1,\dots,I$ в (2.14) легко выражаются через a_j, b_j, $j=1,\dots,J$:

$$\alpha_i=A_i+\sum_{j=1}^{J}AA_j^ia_j+\sum_{j=1}^{J}AB_j^ib_j \qquad \beta_i=B_i+\sum_{j=1}^{J}BA_j^ia_j+\sum_{j=1}^{J}BB_j^ib_j \tag{2.18}$$

$$A_i=(f_i+\delta_ie_i)/\Delta_i,\ AA_j^i=(-\Delta_jR_j^i+\delta_i\Gamma_j^i)/\Delta_i,\ AB_j^i=-\delta_i\Gamma_j^i/\Delta_i$$

$$B_i=(f_i+e_i)/\Delta_i,\ BA_j^i=\Gamma_i^j/\Delta_i,\ BB_j^i=(-\Delta_jR_j^i-\Gamma_i^j)/\Delta_i$$

$$\Delta_i=\lambda_i^2-\lambda^2;\quad \delta_i=\lambda^2/\lambda_i^2$$

Предполагается, что $\lambda\neq\lambda_i$. При $\lambda=\lambda_i$ система (2.14) относительно α_i, β_i становится неопределенной, однако при сколь угодно малом отличии

λ от λ_i коэффициенты α_i, β_i выражаются через a_j, b_j, и притом единственным образом.

Подставляя (2.18) в (2.15), получаем систему $2J$ линейных алгебраических уравнений относительно a_j, b_j, $j=1,\ldots,J$ независимо от числа I удерживаемых форм свободных колебаний тела простой конфигурации

$$\sum_{l=1}^{J} FA_l^j a_l + \sum_{l=1}^{J} FB_l^j b_l = FF_j, \quad \sum_{l=1}^{J} EA_l^j a_l + \sum_{l=1}^{J} EB_l^j b_l = EE_j \quad (j=1,\ldots,J) \tag{2.19}$$

$$FA_l^j = \lambda_l^2 R_l^j + \sum_{i=1}^{I} [(\lambda_i^2 R_j^i + \Gamma_{1j}^i) AA_l^i + (-\lambda^2 R_j^i + K_j^i) BA_l^i]$$

$$FB_l^j = -\lambda^2 R_l^j + \sum_{i=1}^{I} [(\lambda_i^2 R_j^i + \Gamma_{1j}^i) AB_l^i + (-\lambda^2 R_j^i + K_j^i) BB_l^i]$$

$$FF_j = F_j - \sum_{i=1}^{I} [(\lambda_i^2 R_j^i + \Gamma_{1j}^i) A_i + (-\lambda^2 R_j^i + K_j^i) B_i]$$

$$EA_l^j = -B_l^j + \sum_{i=1}^{I} [(-B_j^i - G_i^j) AA_l^i + (B_j^i - \Gamma_{2i}^j) BA_l^i]$$

$$EB_l^j = B_l^j + \sum_{i=1}^{I} [(-B_j^i - G_i^j) AB_l^i + (B_j^i - \Gamma_{2i}^j) BB_l^i]$$

$$EE_j = -E_j - \sum_{i=1}^{I} [(-B_j^i - G_i^j) A_i + (B_j^i - \Gamma_{2i}^j) B_i]$$

Определяя из (2.19) a_j, b_j, $j=1,\ldots,J$, по (2.18) находим α_i, β_i, $i=1,\ldots,I$ и, окончательно, решение (2.9).

Вышеприведенные выражения значительно упрощаются в частном случае, когда аппроксимирующие коэффициенты для напряженного состояния и перемещений совпадают. Как видно из (2.12), (2.13), это имеет место при $e=0$, $S_2=0$. Уравнения (2.14), (2.15) принимают вид

$$\Delta_i \beta_i + \sum_{j=1}^{J} \Delta_j R_j^i b_j = f_i, \quad \alpha_i = \beta_i \quad (i=1,\ldots,I)$$

$$\sum_{i=1}^{I} (\Delta_i R_j^i + \Gamma_{1j}^i + K_j^i) \beta_i + \sum_{l=1}^{J} \Delta_l R_l^j b_l = F_j, \quad a_j = b_j \quad (j=1,\ldots,J)$$

Вместо (2.18) имеем

$$\beta_i = \frac{1}{\Delta_i}\left(f_i - \sum_{j=1}^{J} \Delta_j R_j^i b_j\right) \tag{2.20}$$

и (2.19) переходит в систему J уравнений

$$\sum_{l=1}^{J} \Delta_l \left(R_l^j - \sum_{i=1}^{I} T_j^i R_l^i\right) b_l = F_j - \sum_{i=1}^{I} T_j^i f_i \quad (j=1,\ldots,J)$$

$$T_j^i = R_j^i + (\Gamma_{1j}^i + K_j^i)/\Delta_i \tag{2.21}$$

3. Применение спектрального метода фиктивных областей и оценка сходимости. Приведем решение указанным способом задачи о плоских колебаниях толстостенного цилиндра с инерционно-упругим внутренним слоем и свободной внешней поверхностью. Уравнения колебаний и граничные условия имеют вид

$$Dx-\lambda^2Ry=f, \quad D^*y-Bx=0 \quad \Omega=\{\rho_1\leqslant\rho\leqslant1,\ 0\leqslant\theta<2\pi\} \tag{3.1}$$

$$X+KY|_{\rho=\rho_1}=F, \quad X|_{\rho=1}=0 \tag{3.2}$$

где $\rho=r/r_0$ — относительная радиальная координата, r — текущий, r_0 — наружный радиус цилиндра.

Для решения задачи (3.1), (3.2) используем формы x_i, y_i и частоты λ_i свободных колебаний цилиндра без отверстия, то есть решения однородной задачи

$$Dx_i-\lambda_i^2Ry_i=0, \quad D^*y_i-Bx_i=0 \quad \Omega^\circ=\{0\leqslant\rho\leqslant1,\ 0\leqslant\theta<2\pi\}$$

$$|Y_i|_{\rho=0}<\infty, \quad X_i|_{\rho=1}=0$$

Решение исходной задачи будет иметь вид

$$x=\sum_{i=1}^{I}\beta_ix_i, \quad y=\sum_{i=1}^{I}\beta_iy_i \quad \text{в} \quad \Omega$$

где коэффициенты β_i вычисляются согласно (2.20), (2.21). При этом

$$f_i=\int_{\rho_1}^{1}\int_0^{2\pi} fy_i\rho d\theta\, d\rho, \quad F_j=\frac{1}{r_0}\int_0^{2\pi}FY_j\rho|_{\rho=\rho_1}d\theta$$

$$R_j^i=\int_0^{\rho_1}\int_0^{2\pi} Ry_iy_j\rho d\theta d\rho, \quad \Gamma_{ij}^i=\frac{1}{r_0}\int_0^{2\pi}X_iY_j\rho|_{\rho=\rho_1}d\theta$$

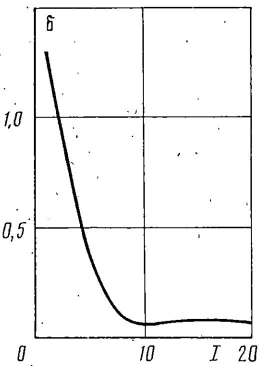
$$\Delta_i=\lambda_i^2-\lambda^2, \quad K_j^i=\frac{1}{r_0}\int_0^{2\pi}KY_iY_j\rho|_{\rho=\rho_1}d\theta$$

В разложениях (2.5) число слагаемых $J=2$ по числу выполняемых граничных условий на внутренней поверхности цилиндра, в частном случае осесимметричных колебаний $J=1$. Таким образом, задача сводится к результирующей системе всего двух линейных алгебраических уравнений (2.21), в осесимметричном случае — к одному уравнению. Увеличение же числа I членов рядов по формам свободных колебаний цилиндра без отверстия не увеличивает числа уравнения системы (2.21).

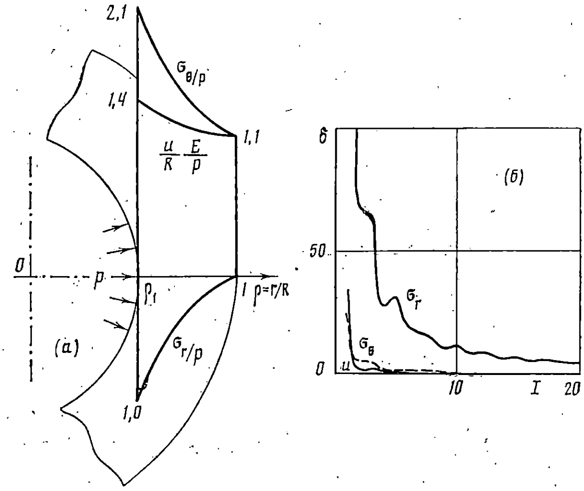
Для определения частот свободных колебаний цилиндра с отверстием по известным спектральным характеристикам цилиндра без отверстия достаточно найти нули определителя системы (2.21).

Численную оценку точности построенного решения установим для случая свободных колебаний тонкой цилиндрической оболочки, который получается из уравнений колебаний цилиндра с отверстием путем предельного перехода $\rho_1\to1$. Можно ожидать, что оценка погрешности в этом случае будет представительной, поскольку используются формы и частоты свободных колебаний цилиндра без отверстия, а задача решается для тонкой оболочки, то есть цилиндра с очень большим отверстием. Для цилиндра с внутренним радиусом $\rho_1=0{,}95$ вычислено значение низшей частоты свободных осесимметричных колебаний λ и сравнено с точным значением собственной частоты осесимметричных колебаний оболочки λ_0 [4]. Зависимость относительной погрешности вычисления собственной частоты оболочки $\delta=(\lambda-\lambda_0)/\lambda_0$ от числа I удерживаемых форм и частот свободных колебаний сплошного цилиндра изображена на фиг. 1. Видно, что удержание только трех форм и частот гарантирует погрешность менее 1%.

Для оценки сходимости метода при определении напряженного состояния и перемещений в упругом теле решена задача о статическом нагружении полого цилиндра внутренним давлением, допускающая точное ре-



Фиг. 1



Фиг. 2

шение [4]. На фиг. 2а, б построены эпюры напряжений и перемещений в стенках цилиндра и зависимости относительных погрешностей их вычислений $\delta=\|y-y_0\|/\|y_0\|$ (y — приближенное, y_0 — точное решения; норма принимается среднеквадратичной) от числа I удерживаемых собственных форм и частот сплошного цилиндра для случая $\rho_1=0{,}6$. Лучшая сходимость обеспечивается для радиального перемещения u и тангенциального напряжения σ_θ, поскольку граничное условие при $\rho=\rho_1$ эти компоненты не содержат. Для всех других значений ρ_1 результаты решения тестовой задачи аналогичны. Таким образом, установлено, что для любого значения внутреннего радиуса полого цилиндра $0<\rho_1<1$ использование форм и частот сплошного цилиндра обеспечивает быструю сходимость всех компонент усилий и перемещений.

В заключение перечислим достоинства предложенного метода.

Формы и частоты свободных колебаний тела простой геометрической формы вычисляются значительно проще и точнее, чем соответствующие спектральные характеристики исходного тела.

В результате использования свойства ортогональности собственных форм тела простой конфигурации задача приводится к системе линейных алгебраических уравнений фиксированного порядка независимо от числа удерживаемых форм. Увеличение числа членов аппроксимирующего ряда лишь увеличивает число слагаемых, входящих в элементы матрицы этой системы, поэтому повышение точности решения за счет удержания дополнительных членов не приводит к существенному увеличению объема вычислений.

Вычисленные один раз формы и частоты свободных колебаний тела простой геометрической формы могут быть использованы для решения целого ряда задач, отличающихся видоизменениями конфигурации тела и граничных условий.

Коэффициенты результирующей линейной алгебраической системы содержат лишь поверхностные интегралы.

Слагаемые $x^{\vee}$, $y^{\vee}$ (2.5), служащие для удовлетворения исходных граничных условий, носят вспомогательный промежуточный характер и в вид окончательного решения (2.9) не входят.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фридман В. М., Чернина В. С.* Видоизменение метода Бубнова – Галеркина – Ритца, связанное со смешанным вариационным принципом в теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 1. С. 64–78.
2. *Богданов Б. А., Фридман В. М., Штукин Л. В.* Об одном методе решения задачи о колебаниях упругого тела при сложных граничных условиях // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 111–119.
3. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.
4. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник. В 3-х т./Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1. 831 с.; Т. 2. 463 с.; Т. 3.

Ленинград

Поступила в редакцию
6.V.1987