

УДК 539.3

© 1990 г.

С. Р. БРУДНЫЙ, Е. И. ШИФРИН

## ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Рассматриваются задачи кручения, поперечных колебаний и устойчивости неоднородных стержней. Для кусочно-однородных стержней односвязного сечения и неоднородных стержней многосвязного сечения получены изопериметрические оценки жесткости при кручении сверху. Для неоднородной балки с условиями шарнирного опирания на концах построены оценки частоты основного тона поперечных колебаний и первой критической силы.

**1. Введение.** Методика использующая операции симметризации линий уровня функции (см. [1]), позволила построить изопериметрические оценки интегральных характеристик решений ряда задач математической физики через соответствующие характеристики решения задачи в круговой или кольцевой области той же площади. Рассмотренным в [1] задачам соответствуют дифференциальные уравнения определенного типа с постоянными коэффициентами. С помощью небольших уточнений эта методика может быть обобщена на некоторые классы уравнений с переменными коэффициентами в младших членах [2–4]. Постановки механических задач в [2–4] являются упрощенными: рассматриваемым типам неоднородности в младших членах дифференциальных уравнений отвечает неоднородность только плотности материала. При этом его упругие характеристики принимаются однородными.

Подход, используемый в [1–4], неприменим в задачах для неоднородных тел, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами при старших производных. Причины этого изложены в [5]. Заметим, что в неоднородных задачах имеются уже две возможности оценки интересующей характеристики решения — как путем изменения формы области, так и путем распределения неоднородности при данной форме области.

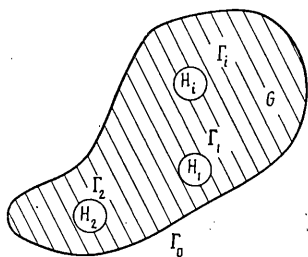
В [5] введена новая операция  $SE$  — симметризации, с помощью которой построены изопериметрические оценки решений некоторых дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при старших производных. В частности, получена изопериметрическая оценка жесткости при кручении стержня односвязного сечения с модулем сдвига, являющимся непрерывной функцией координат. Ниже получены изопериметрические оценки решений некоторых других классов задач теории упругости неоднородных стержней.

**2. Кручение неоднородного стержня многосвязного сечения.** В терминах функции напряжений  $\Phi$  эта задача описывается следующим образом [6]:

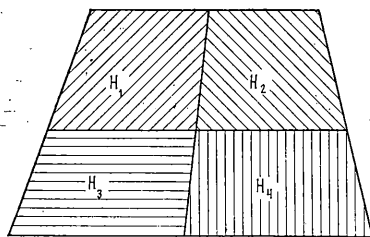
$$\nabla(v(x) \nabla \Phi(x)) = -2, \quad x \in G \quad (2.1)$$

$$\Phi|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi|_{\Gamma_l} = C_l, \quad (l=1, \dots, n) \quad (2.2)$$

Здесь  $v(x) = \mu^{-1}(x)$ , где  $\mu(x)$  — непрерывная функция, определенная в многосвязной области  $G$  и характеризующая распределение модуля сдвига. Область  $G$  отвечает сечению стержня (фиг. 1). Граница области  $G$   $\partial G = \cup \Gamma_l$  ( $l=0, \dots, n$ ), причем контур  $\Gamma_0$  содержит внутри себя все контуры  $\Gamma_l$ ,  $l=1, \dots, n$ . Неизвестные постоянные  $C_l$  определяются из теоремы



Фиг. 1



Фиг. 2

о циркуляции сдвиговых деформаций [6]:

$$\int_{\Gamma_l} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 2S_l \quad (l=1, \dots, n) \quad (2.3)$$

Здесь  $S_l$  — площади подобластей  $H_l$ , ограниченных контурами  $\Gamma_l$ .

Пусть  $C(\mathbf{v}, G)$  обозначает жесткость при кручении рассматриваемого стержня. Согласно [7]:

$$C(\mathbf{v}, G) = 2 \int_G \Phi(\mathbf{x}) dx + 2C_l S_l \quad (2.4)$$

По повторяющимся индексам производится суммирование.

Обозначим через  $E_G$  класс непрерывных функций, определенных в многосвязной области  $G$ , обращающихся в ноль на внешней границе  $\Gamma_0$  и принимающих постоянное значение на внутренних контурах  $\Gamma_l$  ( $l=1, \dots, n$ ). Стандартной процедурой [6, 7] из принципа минимума дополнительной работы легко получить, что решение  $\Phi$  краевой задачи (2.1) — (2.3) обладает следующим свойством

$$\min J(\varphi, G, \mathbf{v}) = J(\Phi, G, \mathbf{v}) = -C(\mathbf{v}, G)/2, \quad \varphi \in E_G.$$

$$J(\varphi, G, \mathbf{v}) = 1/2 \left[ \int_G \mathbf{v} |\nabla \varphi|^2 dx - 4 \int_G \varphi dx - 4b_l S_l \right], \quad b_l = \varphi|_{\Gamma_l}$$

*Теорема 1.* Обозначим через  $L$  кольцо, имеющее ту же площадь, что и область  $G$ , у которого площадь внутреннего круга равна  $\sum S_l$  ( $l=1, \dots, n$ ). Пусть функция  $v_L(\mathbf{x})$  определена в кольце  $L$ , осесимметрична, равноизмерима с  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  и не возрастает с ростом радиуса. Тогда  $C(\mathbf{v}, G) \leq C(v_L, L)$ .

Теорема 1 является естественным обобщением известного изопериметрического неравенства для однородных стержней многосвязного сечения [8].

*Доказательство.* Обозначим через  $Q$  односвязную область  $G \cup H_l$  ( $l=1, \dots, n$ ). Каждую функцию  $\varphi \in E_G$  продолжим на  $Q$  следующим образом

$$\varphi_*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in G \\ b_l, & \mathbf{x} \in H_l \quad (l=1, \dots, n) \end{cases}$$

Очевидно, что  $\varphi_*(\mathbf{x})$  — непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция в  $Q$ , причем

$$\nabla \varphi_*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \nabla \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in G \\ 0, & \mathbf{x} \in H_l \quad (l=1, \dots, n) \end{cases}$$

Класс таких функций будем обозначать через  $E_G^*$ . Функцию  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  также продолжим на  $Q$ . Положим

$$\mathbf{v}_*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in G \\ v_{\max}, & \mathbf{x} \in H_l, \quad l=1, \dots, n \end{cases}$$

$$v_{\max} = \max_{x \in G} v(x), \quad x \in G$$

Рассмотрим на  $E_G^*$  функционал

$$J_*(\varphi_*, Q, v_*) = 1/2 \left[ \int_Q v_* |\nabla \varphi_*|^2 dx - 4 \int_Q \varphi_* dx \right] \quad (2.5)$$

Легко видеть, что

$$J_*(\varphi_*, Q, v_*) = J(\varphi, G, v), \quad (2.6)$$

$$-C(v, G)/2 = J(\varphi, G, v) = J_*(\varphi_*, Q, v_*) = \min J(\varphi_*, Q, v_*), \quad \varphi_* \in E_G^*$$

Выражение для жесткости (2.4) представляется через функцию  $\Phi_*$  в виде

$$C(v, G) = 2 \int_G \Phi_*(x) dx$$

Применим к функции  $\Phi_*$  операцию  $SE$  — симметризации [5]. Напомним, что результатом применения  $SE$  — симметризации к функции  $B(x)$ , определенной в односвязной двумерной области  $\Omega$ , обладающей в  $\Omega$  суммируемым модулем градиента и обращающейся в ноль на  $\partial\Omega$ , является функция  $SE(B)(x)$ , которая: определена в круге  $K$ , площадь которого равна площади  $\Omega$ ;  $SE(B)(x) = 0$  на  $\partial\Omega$ ; функция  $|\nabla SE(B)(x)|$  равноизмерима с  $|\nabla B(x)|$ , осесимметрична и не убывает с ростом радиуса. В [5] доказано, что

$$\int_{\Omega} B(x) dx \leq \int_K SE(B)(x) dx \quad (2.7)$$

Обозначим  $SE(\Phi_*) = V(x)$ ,  $K$  — круг, площадь которого равна площади  $Q$ . Пусть  $v_*^{\sim}(x)$  — функция, определенная в  $K$ , равноизмеримая с  $v_*(x)$ , осесимметричная и невозрастающая с ростом радиуса, т. е.  $v_*^{\sim}(x)$  — противоположна с  $|\nabla V(x)|$  [4]. По известному свойству равноизмеримых противоположенных функций [4]

$$\int_Q v_*(x) |\nabla \Phi_*(x)|^2 dx \geq \int_K v_*^{\sim}(x) |\nabla V(x)|^2 dx \quad (2.8)$$

Из (2.5) — (2.8) следует, что

$$-C(v, G)/2 = J_*(\varphi_*, Q, v_*) \geq \left[ \int_K v_*^{\sim}(x) |\nabla V(x)|^2 dx - \right. \quad (2.9)$$

$$\left. -4 \int_K V(x) dx \right] / 2 = J_*(V, K, v_*^{\sim})$$

Так как функция  $|\nabla V(x)|$  равноизмерима с  $|\nabla \Phi_*(x)|$ , осесимметрична и не убывает с ростом радиуса, то  $|\nabla V(x)| = 0$  в круге  $K_0$  радиуса  $r_0$ , площадь которого равна сумме площадей подобластей  $H_i$ , на которых  $\Phi_*(x) = \text{const}$  ( $\nabla \Phi_*(x) = 0$ ), т. е.  $V(x) = \text{const}$  на  $K_0$  и, учитывая, что  $V(x)$  обращается в ноль на  $\partial K$ , получаем  $V \in E_L^*$ , где  $L = K \setminus K_0$ . Заметим, что по построению  $v_*^{\sim}(x) = v_{\max}$  на  $K_0$  и равноизмерима с  $v(x)$  в кольце  $L$ . Очевидно, что площадь кольца  $L$  совпадает с площадью области  $G$ .

Обозначим через  $v_L^{\sim}(x)$  функцию, определенную в  $L$  и совпадающую на  $L$  с  $v_*^{\sim}(x)$ . Используя связь между классами функций  $E_L^*$  и  $E_L$ , аналогично (2.6), получим

$$J_*(V, K, v_*^{\sim}) \geq \min J_*(\varphi_*, K, v_*^{\sim}) = \min J(\varphi, L, v_L^{\sim}) = -C(v_L^{\sim}, L)/2 \quad (2.10)$$

$$(\varphi_* \in E_L^*, \quad \varphi \in E_L)$$

Последнее равенство в (2.10) определяет жесткость неоднородного стержня, имеющего сечением кольцо  $L$ , у которого функция  $v_L^{\sim}(x)$ , ха-

рактически характеризующая распределение модуля сдвига по сечению стержня, осесимметрична, равноизмерима с  $v(x)$  и не возрастает с ростом радиуса.

Из (2.9) и (2.10) следует, что  $C(v, G) \leq C(\check{v}_L, L)$ , что и завершает доказательство теоремы 1.

**3. Кручение составного стержня.** Для простоты сперва предположим, что сечению стержня отвечает область  $Q$  (фиг. 1), причем в области  $G$  модуль сдвига равен  $\mu^0$ , а в подобластях  $H_l - \mu^l$ , где  $\mu^l$  — константы ( $l = 1, \dots, n$ ). Область  $G$  в дальнейшем для единообразия будем обозначать  $H_0$ . На границах раздела  $\Gamma_l$  ( $l = 1, \dots, n$ ) принимаются условия жесткого сцепления. Соответствующая краевая задача в терминах функций напряжений имеет вид [9]:

$$\begin{aligned} \nabla(v^l \nabla \Phi^l(x)) &= -2, \quad x \in H_l, \quad v^l = 1/\mu^l, \\ \Phi^0|_{\Gamma_0} &= 0 \\ (\Phi^0 - \Phi^l)|_{\Gamma_l} &= C_l \\ [v^l \partial \Phi^l / \partial n - v^0 \partial \Phi^0 / \partial n]|_{\Gamma_l} &= 0 \quad (l=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Через  $\Phi^l(x)$  обозначены непрерывные функции, определенные в областях  $H_l$  ( $l=0, \dots, n$ ). Первое равенство в (3.1) обеспечивает непрерывность нормальных усилий, а второе — непрерывность перемещений в области  $Q$ .

Определим в области  $Q = \cup H_l$  ( $l=0, \dots, n$ ) кусочно непрерывные функции  $v(x)$  и  $\Phi(x)$  следующим образом:  $v(x) = v^l$ ,  $\Phi(x) = \Phi^l(x)$ ,  $x \in H_l$  ( $l=0, \dots, n$ ). Как и в предыдущем случае легко показать, что жесткость при кручении рассматриваемого стержня выражается в виде [9]:

$$C(v, G) = 2 \int_Q \Phi(x) dx + 2C_l S_l, \quad \text{а решение задачи } \Phi_0(x) \text{ доставляет ми-}$$

нимум функционалу [9]:

$$J(\varphi, Q, v) = \left[ \int_Q v |\nabla \varphi(x)|^2 dx - 4 \int_Q \varphi(x) dx - 4b_l S_l \right] / 2$$

на множестве кусочно-непрерывных функций  $\varphi(x)$ , определенных в  $Q$ , обращающихся в ноль на  $\Gamma_0$  и имеющих на  $\Gamma_l$  конечные разрывы  $b_l$  ( $l=1, \dots, n$ ). Множество таких функций будем обозначать через  $B_Q$ . При этом  $J(\Phi_0, Q, v) = -C(v, Q)/2$ .

Пусть кусочно-непрерывная функция  $v_*(x)$  определена в круге  $K$ , имеющем ту же площадь, что и область  $Q$ , осесимметрична, равноизмерима с  $v(x)$  и не возрастает с ростом радиуса. Тогда справедлива следующая теорема.

*Теорема 2.*  $C(v, Q) \leq C(v_*, K)$ .

*Доказательство.* Каждой функции  $\varphi(x) \in B_Q$  поставим в соответствие непрерывную функцию  $\varphi_*(x)$  следующим образом

$$\varphi_*(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in H_0 \\ \varphi(x) + b_l, & x \in H_l \quad (l=1, \dots, n) \end{cases}$$

На множестве непрерывных функций  $\varphi_*(x)$  рассмотрим функционал

$$J_*(\varphi_*, Q, v) = 1/2 \left[ \int_Q v |\nabla \varphi_*(x)|^2 dx - 4 \int_Q \varphi_*(x) dx \right]$$

Очевидно, что  $J(\varphi, Q, v) = J_*(\varphi_*, Q, v)$  и аналогично (2.6):

$$\min J(\varphi_*, Q, v) = J_*(\Phi_*, Q, v) = -C(v, Q)/2, \quad \varphi_* \in H_1^0(Q),$$

$$C(v, Q) = 2 \int_Q \Phi_*(x) dx$$

где непрерывная функция  $\Phi_*(x)$  связана с решением исходной задачи

$\Phi_0(x)$  следующим образом:

$$\Phi_*(x) = \begin{cases} \Phi_0(x), & x \in H_0 \\ \Phi_0(x) + C_l, & x \in H_l \quad (l=1, \dots, n) \end{cases}$$

Далее, используя  $SE$  — симметризацию, таким же образом, как и при доказательстве теоремы 1, придем к утверждению теоремы 2. Заметим, что иные случаи взаимного расположения однородных областей, см. на пример фиг. 2, рассматриваются аналогично.

Теперь можно сформулировать наиболее общее утверждение.

**Теорема 3.** Жесткость при кручении неоднородного стержня произвольного сечения не превосходит жесткости при кручении стержня кругового сечения той же площади, с функцией распределения модуля сдвига равноизмеримой исходной, осесимметричной и не убывающей при приближении к контуру сечения. Исходная функция распределения модуля сдвига может быть как непрерывной, так и кусочно-непрерывной с условием жесткого сцепления на границах скачкообразного изменения, причем полости рассматриваются как области с нулевым модулем сдвига.

В этой общей форме утверждение содержит теорему Поля о кручении однородного стержня односвязного сечения, результат [8] для случая однородного стержня многосвязного сечения и результат [5] для стержня односвязного сечения с непрерывной функцией изменения модуля сдвига.

**4. Поперечные колебания неоднородного шарнирно-опертого стержня.** Предварительно сделаем несколько замечаний.

**Замечание 1.** Рассмотрим краевую задачу вида

$$-p(x)(q(x)y(x))'' = g(x), \quad y(l) = y(-l) = 0 \quad (4.1)$$

где функции  $p(x), q(x) > 0$  на  $[-l, l]$ . Обозначим оператор в левой части (4.1) через  $A$ , а обратный к нему оператор через  $A^{-1}$ . Легко видеть, что оператор  $A^{-1}$  является положительным, т. е. если  $g(x) \geq 0$ , то функция  $v(x) = A^{-1}g(x)$ , являющаяся решением краевой задачи (4.1), также неотрицательна,  $v(x) \geq 0$ . Действительно, если  $g(x) \geq 0$ , то очевидно, что  $-r''(x) = g(x)/p(x) \geq 0$ ,  $r(\pm l) = 0$ ;  $r(x) = q(x)v(x)$ . Отсюда, в силу принципа максимума следует, что  $r(x) \geq 0$ . Следовательно и  $v(x) = r(x)/q(x) \geq 0$ .

**Замечание 2.** Из результатов [10] вытекает, что если  $A^{-1}$  — положительный, вполне непрерывный оператор, то существует неотрицательная собственная функция  $v$  ( $Av = \lambda v$ ), отвечающая минимальному собственному значению.

**Замечание 3.** Рассмотрим две краевые задачи

$$-y''(x) = f(x), \quad y(\pm l) = 0 \quad (4.2)$$

$$-v''(x) = S(f)(x), \quad v(\pm l) = 0 \quad (4.3)$$

где функция  $f(x) \geq 0$  на  $[-l, l]$ , а функция  $S(f)(x)$  является результатом применения операции симметризации Шварца к функции  $f(x)$ . Напомним, что в силу свойств операции симметризации Шварца [1],  $S(f)(x) \geq 0$ , симметрична относительно середины отрезка  $[-l, l]$  и не возрастает при движении от середины отрезка к его концам. Частным случаем результатов [11] является неравенство  $S(y)(x) \leq v(x)$ ,  $x \in [-l, l]$ , где  $y(x)$  и  $v(x)$  — решения соответственно задач (4.2) и (4.3).

Пусть распределение изгибной жесткости вдоль стержня длины  $2l$  характеризуется функцией  $D(x)$ , а распределение погонной плотности — функцией  $\rho(x)$ . Область определения этих функций — отрезок  $[-l, l]$ . Наряду с функциями  $D(x)$  и  $\rho(x)$  рассмотрим функции  $D_+(x), D_-(x)$  и  $\rho_+(x), \rho_-(x)$ , которые равноизмеримы соответственно с  $D(x)$  и  $\rho(x)$ , симметричны относительно середины отрезка  $[-l, l]$ , причем функции с индексом плюс не убывают, а с индексом минус не возрастают при движении от центра отрезка к его концам.

Обозначим частоту основного тона (минимальную частоту) собственных поперечных колебаний неоднородного шарнирно-опертого стержня через  $\omega(D, \rho)$  и пусть  $\lambda(D, \rho) = \omega^2(D, \rho)$ .

*Теорема 4.* Справедлива оценка  $\omega(D, \rho) \geq \omega(D_+, \rho_-)$ .

*Доказательство.* Краевая задача, описывающая собственные поперечные колебания неоднородного шарнирно-опертого стержня, имеет вид [12]:

$$-\rho^{-1}(x)(-D(x)y''(x))'' = \lambda y(x), \quad y''(\pm l) = y(\pm l) = 0 \quad (4.4)$$

а квадрат частоты основного тона  $\lambda(D, \rho)$  является минимальным значением функционала [12]:

$$\lambda(D, \rho) = \min \frac{\langle D(x) | w''(x) |^2 \rangle}{\langle \rho(x) w^2(x) \rangle} \quad (4.5)$$

$$w(\pm l) = w''(\pm l) = 0$$

Двойные угловые скобки обозначают интегрирование на отрезке  $[-l, l]$ . Покажем, что обратный оператор этой задачи  $B^{-1}$  ( $B$  — оператор левой части уравнения (4.4)) является положительным. Для этого представим уравнение  $Bu(x) = g(x) \geq 0$  в форме

$$-D(x)y''(x) = z(x), \quad y(\pm l) = 0 \quad (4.6)$$

$$-\rho^{-1}(x)z''(x) = g(x), \quad z(\pm l) = 0 \quad (4.7)$$

и последовательно применим замечание 1 сначала к (4.7), а затем к (4.6). При этом

$$z(x), y(x), -y''(x) \geq 0, \quad x \in [-l, l] \quad (4.8)$$

В силу замечания 2 существует функция  $v(x) \geq 0$ , отвечающая  $\lambda(D, \rho)$ ,  $Bv(x) = \lambda(D, \rho)v(x)$ . Обозначим  $-v''(x) = f(x)$ . Из (4.8) вытекает, что  $f(x) \geq 0$ .

По известному свойству равноизмеримых со- и противонаправленных функций [4]:

$$\langle D(x) f^2(x) \rangle \geq \langle D_+(x) [S(f)(x)]^2 \rangle \quad (4.9)$$

$$\langle \rho(x) v^2(x) \rangle \leq \langle \rho_-(x) [S(v)(x)]^2 \rangle \quad (4.10)$$

Обозначим через  $v_*(x)$  решение уравнения  $-y''(x) = S(f)(x)$ ,  $y(\pm l) = 0$ . В силу замечания 3  $v_*(x) \geq S(v)(x)$ . Следовательно

$$\langle \rho_-(x) [S(v)(x)]^2 \rangle \leq \langle \rho_-(x) v_*^2(x) \rangle \quad (4.11)$$

Учитывая (4.5), (4.9) — (4.11), имеем

$$\begin{aligned} \lambda(D, \rho) &= \frac{\langle D(x) | v''(x) |^2 \rangle}{\langle \rho(x) v^2(x) \rangle} \geq \frac{\langle D_+(x) | v_*''(x) |^2 \rangle}{\langle \rho_-(x) v_*^2(x) \rangle} \geq \\ &\geq \min \frac{\langle D_+(x) | w''(x) |^2 \rangle}{\langle \rho_-(x) w^2(x) \rangle} = \lambda(D_+, \rho_-), \quad w(\pm l) = w''(\pm l) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\omega(D, \rho) \geq \omega(D_+, \rho_-)$ . Теорема 4 доказана.

**5. Устойчивость неоднородного шарнирно-опертого стержня.** Обозначим через  $P(D)$  первую критическую силу неоднородного шарнирно-опертого стержня.

*Теорема 5.* Справедлива оценка  $P(D) \geq P(D_+)$ .

*Доказательство.* Краевая задача, отвечающая рассматриваемой задаче устойчивости неоднородного стержня, имеет вид [13]:

$$(-D(x)y''(x))'' = Py''(x), \quad y''(\pm l) = y(\pm l) = 0 \quad (5.1)$$

Первая критическая сила  $P(D)$  является минимальным значением функционала [13]:

$$P(D) = \min \frac{\langle D(x) | w''(x) |^2 \rangle}{\langle |w'(x)|^2 \rangle}, \quad w(\pm l) = w''(\pm l) \quad (5.2)$$

Знаменатель в (5.2), учитывая граничные условия и интегрируя по частям, можно записать в форме  $\langle |w'(x)|^2 \rangle = \langle -w(x)w''(x) \rangle$ . Краевую

задачу (5.1) представим в виде

$$-(D(x)z(x))'' = Pz(x), z(\pm l) = 0 \quad (5.3)$$

$$-(-y(x))'' = z(x), y(\pm l) = 0 \quad (5.4)$$

В силу замечаний 1 и 2 существует функция  $f(x) \geq 0$ , отвечающая минимальному собственному числу в задаче (5.3). В силу замечания 1 также  $-v(x) \geq 0$ , где  $v(x)$  — решение краевой задачи (5.4) при  $z(x) = f(x)$ . Так как функции  $S(-v)(x)$  и  $S(f)(x)$  сонаправлены по определению, то из известного свойства равноизмеримых сонаправленных функций [1] и в силу замечания 3 следует соответственно

$$\begin{aligned} \langle -v(x)f(x) \rangle &\leq \langle S(-v)(x)S(f)(x) \rangle \\ \langle S(-v)(x)S(f)(x) \rangle &\leq \langle -v_*(x)S(f)(x) \rangle \end{aligned} \quad (5.5)$$

где  $v_*(x)$  — решение уравнения  $-(-y(x))'' = S(f)(x)$ ,  $y(\pm l) = 0$ .

Таким образом, учитывая (4.9) и (5.5), получаем

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{\langle D(x)f^2(x) \rangle}{\langle -v(x)f(x) \rangle} \geq \frac{\langle D_+(x)[S(f)(x)]^2 \rangle}{\langle -v_*(x)S(f)(x) \rangle} \geq \\ &\geq \min \frac{\langle D_+(x)[w''(x)]^2 \rangle}{\langle [w'(x)]^2 \rangle} = P(D_+), \quad w(\pm l) = w''(\pm l) = 0 \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы 5.

*Теорема 6.* Справедлива оценка  $P(D) \leq P(D_-)$ .

*Доказательство.* Обозначим в (5.3)  $D(x)z(x)$  через  $\zeta(x)$ . Тогда рассматриваемую краевую задачу (5.3) можно представить в виде

$$-\zeta''(x) = Pd(x)\zeta(x), \zeta(\pm l) = 0 \quad (5.6)$$

где  $d(x) = 1/D(x)$ . Из этого представления можно получить, что

$$P(D) = \min \langle [w'(x)]^2 \rangle / \langle d(x)w^2(x) \rangle, \quad w(\pm l) = 0 \quad (5.7)$$

Аналогично предыдущему, функция  $\xi(x)$ , соответствующая наименьшему собственному числу  $P(D)$  задачи (5.6), обладает следующими свойствами

$$\xi(x), -\xi''(x) \geq 0; x \in [-l, l] \quad (5.8)$$

Пусть  $\xi_*(x)$  является собственной функцией задачи (5.6), соответствующей минимальному собственному числу

$$\begin{aligned} P(D_-) &= \langle [\xi_*'(x)]^2 \rangle / \langle d_+(x)\xi_*^2(x) \rangle, \\ d_+(x) &= 1/D_-(x) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Так как функция  $D_-(x)$  симметрична по определению, то в силу очевидной симметричности  $d_+(x)$ , из (5.6) вытекает симметричность функции  $\xi_*(x)$ . Отсюда, с учетом граничных условий, выпуклости и неотрицательности функции  $\xi_*(x)$  (см. (5.8)), следует, что  $\xi_*(x)$  симметрична относительно центра отрезка  $[-l, l]$  и не возрастает при движении от центра отрезка к его концам. Учитывая определение функции  $D_-(x)$ , получаем, что функции  $\xi_*(x)$  и  $d_+(x)$  противоположны. Очередной раз используя свойство равноизмеримых противоположенных функций [1], получим

$$\langle d_+(x)\xi_*^2(x) \rangle \leq \langle d(x)\xi_*^2(x) \rangle \quad (5.10)$$

Из (5.7), (5.9), (5.10) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} P(D_-) &= \langle [\xi_*'(x)]^2 \rangle / \langle d_+(x)\xi_*^2(x) \rangle \geq \langle [\xi_*'(x)]^2 \rangle / \langle d(x)\xi_*^2(x) \rangle \geq \\ &\geq \min \frac{\langle [w'(x)]^2 \rangle}{\langle d(x)w^2(x) \rangle} = P(D), \quad w(\pm l) = 0 \end{aligned}$$

Теорема 6 доказана.

Замечание 4. В теории однородных стержней известен способ [13], позволяющий, используя знание о форме упругой линии, соответствующей первой критической силе шарнирно-опертого стержня, получать значение первой критической силы для некоторых других условий закрепления стержня. Этот способ может быть применен и для неоднородных стержней. Так, например, можно показать, что первая критическая сила для неоднородного стержня длины  $l$ , у которого левый конец свободен, а правый жестко зашпелен и распределение изгибной жесткости характеризуется функцией  $D_0(x)$ ,  $x \in [-l, 0]$ , совпадает с первой критической силой для шарнирно-опертого стержня длины  $2l$ , функция распределения изгибной жесткости которого  $D(x)$ ,  $x \in [-l, l]$ , симметрична относительно центра стержня и  $D_0(x) = D(x)$ ,  $x \in [-l, 0]$ . Это позволяет полученные изопериметрические оценки распространить и на некоторые другие условия закрепления стержней.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полюа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
2. Beesack P. R., Schwarz B. On the zeros of solutions of second-order linear differential equations. // *Canad. J. Math.* 1956. V. 8. No. 4. P. 504-515.
3. Schwarz B. Bounds for the principal frequency of the non-homogeneous membrane and the generalized Dirichlet integral. // *Pacif. J. Math.* 1957. V. 7. No. 4. P. 1653-1676.
4. Beesack P. R. Isoperimetric inequalities for the nonhomogeneous clamped rod and plate. // *J. Math. and Mech.* 1959. V. 8. No. 4. P. 471-482.
5. Брудный С. Р., Шифрин Е. И. Об одном способе симметризации функций и его применении к некоторым задачам теории упругости неоднородных тел. // *ПММ.* 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 486-492.
6. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
7. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
8. Polya G., Weinstein A. On the torsional rigidity of multiply connected cross sections. // *Ann. Math.*, 1950. V. 52. P. 154-163.
9. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
10. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 394 с.
11. Lions P.-L. Quelques remarques sur la symmetrization de Schwartz. // *Nonlinear partial differential equations and their applications.* Boston: Pitman, 1981. V. 1. P. 308-319.
12. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебания и удара. Л.: Машиностроение, 1976. 320 с.
13. Феодосьев В. И. Соппротивление материалов. М.: Наука, 1963. 539 с.

Москва

Поступила в редакцию  
9.III.1989