МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1990

УДК 539.3

С. А. НАЗАРОВ

УПРУГИЕ ЕМКОСТЬ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДЕФЕКТА В УПРУГОМ СЛОЕ

Исследуются интегральные характеристики напряженно-деформированного состояния тела, совпадающего со слоем вне конечного множества. Если поверхность полностью свободна, то возникает симметрическая 6×6-матрица упругой поляризации, а если конечная часть поверхности жестко защемлена, то – 4×4-матрица упругой винеровской емкости. Эти матрицы, имеющие тензорный характер, являются обобщениями классических характеристик плоских областей – логарифмической емкости [1] и тензора поляризации [2–4]. Причины введения указанных объектов поясняются на примере задачи об изгибе тонкой трехмерной пластины.

1. Постановка задачи. Пусть Π — слой $\mathbf{R}^2\times(-{}^1/_2, {}^1/_2)$ и Ω — изотропное упругое тело, совпадающее вне шара $B_\rho=\{x\in\mathbf{R}^3: |x|<\rho\}$ со слоем Π. Предположим, что конечная часть Γ поверхности $\partial\Omega$ жестко защемлена, а к остальной части приложена финитная нагрузка p (не исключается случай $\Gamma=\varnothing$). В отсутствии массовых сил вектор смещений u является решением краевой задачи

$$\mu\nabla\cdot\nabla u(x)+(\lambda+\mu)\nabla\cdot\nabla u(x)=0,\quad x\in\Omega \tag{1.1}$$

$$\sigma^{(n)}(u;x)=p(x),\ x\in\partial\Omega\setminus\Gamma;\ u(x)=0,\ x\in\Gamma \tag{1.2}$$

Здесь λ, μ – константы Ламе, $\sigma(u)$ – тензор напряжений, $\sigma^{(n)}=\sigma n$, n – единичный вектор внешней нормали.

Подобные (1.1), (1.2) задачи возникают как предельные при исследовании деформации тонких пластин, имеющих изолированные дефекты, размеры которых сравнимы с толщиной пластины. В качестве дефектов могут выступать трещины, вмятины, бугры-припои, инородные вкрапления и т. п. Во всех случаях после введения безразмерных координат получается предельная область описанного типа. (При наличии включений необходимо, конечно же, изменить систему уравнений (1.1) и ввести дополнительно условия контакта; однако благодаря финитности неоднородностей исследование этой задачи проводится по существу так же, как и задачи (1.1), (1.2), а для упрощения изложения здесь рассматривается однородное тело.)

Во многих вопросах механики и физики для описания локальных изменений среды используются различные интегральные характеристики, например, электростатическая емкость, матрица присоединенной массы [1], тензоры упругих емкостей и поляризации [2—4] и т. д. В настоящей статье вводятся аналоги названных характеристик для задачи (1.1), (1.2).

Сначала укажем асимптотическую структуру решения на бесконечности. Подчеркнем, что алгорифм [5] построения формальной асимптотики во многом повторяет известную процедуру изучения задач в тонких областях [6—9].

Пусть (r,φ,z) – (безразмерные) цилиндрические координаты и $y=(x_1,x_2)$. Рассмотрим полиномиально зависящие от $\ln r$ решения $\Psi'(y)=(\Psi_1(y),\ \Psi_2(y))=r^\Lambda(\psi_1(\varphi,\ln r),\ \psi_2(\varphi,\ln r))$ и $\Psi_3(y)=r^{\Lambda+1}\psi_3(\varphi,\ln r)$ однородных модельных задач

$$\mu\Delta_y\Psi'(y)+\mu(3\lambda+2\mu)(\lambda+2\mu)^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div}\Psi'(y)=0,\quad y\in\mathbf{R}^2\setminus O \tag{1.3}$$

$${}^1/_3\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)^{-1}\Delta_y{}^2\Psi_3(y)=0,\quad y\in\mathbf{R}^2\setminus O \tag{1.4}$$

Здесь div и grad — векторные операции на плоскости, $\Delta_y = \operatorname{div}\operatorname{grad}$. Система (1.3) отвечает обобщенному плосконапряженному состоянию, а (1.4) — уравнение изгиба пластины Кирхгофа. Можно перечислить все решения указанного типа. Обозначим через $V_{k'} = (V_1^k, V_2^k)$ и V_3^k какие-нибудь однородные полиномы степени k, удовлетворяющие уравнениям (1.3), (1.4). Введем еще фундаментальные решения этих уравнений

$$T^{(j)} = (T_1^{(j)}, T_2^{(j)}), \quad T_k^{(j)}(y) = -[16\pi\mu(\lambda+\mu)]^{-1}(2(2\lambda+ +3\mu)\delta_{j,k}\ln|y| - (3\lambda+2\mu)y_jy_k|y|^{-2}) \quad (j,k=1,2)$$
$$T_3(y) = 3[8\pi\mu(\lambda+\mu)]^{-1}(\lambda+2\mu)|y|^2\ln|y| \tag{1.5}$$

Следующие вектор и функция имеют нужный вид и удовлетворяют уравнениям (1.3), (1.4):

$$\Psi'(y) = V_1^k(\operatorname{grad})T^{(1)}(y) + V_2^k(\operatorname{grad})T^{(2)}(y),$$
$$\Psi_3(y) = V_3^k(\operatorname{grad})T_3 \tag{1.6}$$

Согласно [10, 11] после перебора всевозможных полиномов $V^{k\prime}$ и V_3^k и отвечающих им решений (1.6) будут получены все линейно независимые решения уравнений (1.3), (1.4), обладающие не более чем степенным ростом на бесконечности или в точке $y=0$.

Пусть v' или v_3 — одно из перечисленных решений системы (1.3) или уравнения (1.4); сопоставим v' и v_3 векторы $X(v')$ и $Y(v_3)$ с компонентами

$$X_3(v'; x) = -\lambda(\lambda+2\mu)^{-1}z\operatorname{div}v'(y), \quad X_j(v'; x) = v_j'(y)$$
$$Y_3(v_3; x) = v_3(y) + {}^1/_{24}(\lambda(\lambda+2\mu)^{-1}(12z^2-1)\Delta_y v_3(y)$$
$$Y_j(v_3; x) = z\{[24(\lambda+2\mu)]^{-1}[4(3\lambda+4\mu)z^2 - -11\lambda-12\mu]\Delta_y - 1\}(\partial v_3/\partial y_j)(y) \quad (j=1,2) \tag{1.7}$$

Можно проверить, что векторы $X(v')$ и $Y(v_3)$ оставляют в однородных уравнениях (1.1), (1.2) невязки порядков r^{m-2}, r^{m-1} и r^{n-4}, r^{n-3} соответственно; здесь m и n — степени однородности функций v_1, v_2 и v_3. В асимптотические представления решений при $r\to\infty$ (или при $|x|\to\infty$) входят линейные комбинации выражений (1.7), в которых v', v_3 — различные степенные решения системы (1.3), (1.4). При помощи модификации алгорифма [5—9] можно построить и следующие члены асимптотики, содержащие производные функций v_k более высокого порядка, чем в (1.7). Однако для целей данной работы нужны лишь главные члены разложений.

2. Разрешимость задачи. Согласно стандартной схеме, исследования формально самосопряженных эллиптических краевых задач [12, 13], использующей теорему Рисса о представлении непрерывного функционала, необходимо проверить, что соответствующая квадратичная форма образует скалярное произведение в некотором гильбертовом пространстве. Для задачи (1.1), (1.2) такой формой является функционал упругой энергии

$$E(u, u; \Omega) = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} (2\mu\varepsilon_{jk}(u)\varepsilon_{jk}(u) + \lambda\varepsilon_{jj}(u)\varepsilon_{kk}(u))\,dx$$

Докажем одно неравенство, которое следует считать весовым неравенством Корна. Именно, для вектор-функции $u\in C_0^\infty(\overline{\Pi}\setminus\{x : |y|\leqslant R\}$ справедлива оценка

$$c(R)E(u, u; \Pi) \geqslant \|d^{-1}u'; L_2(\Pi)\|^2 + \|r^{-1}d^{-1}u_3; L_2(\Pi)\|^2 \tag{2.1}$$

Здесь $d = r\ln r$, $u' = (u_1, u_2)$ постоянная $c(R)$ зависит от R, но не от u, $\varepsilon(u)$ — тензор деформаций.

Из двумерного неравенства Корна, которое получается при помощи преобразования Фурье по переменным y, и из неравенства Харди выводим (после интегрирования по $z\in(-{}^1/_2, {}^1/_2)$):

$$\int_\Pi \sum_{j,k=1}^{2} |\varepsilon_{jk}(u)|^2\,dx \geqslant c_1 \int_\Pi \sum_{j,k=1}^{2} \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right|^2 dx \geqslant c_2 \int_\Pi d^{-2}|u'|^2 dx$$

Пусть χ – срезающая функция из $C_0^\infty(-1/2, 1/2)$. Имеем

$$\int_\Pi d^{-2}\chi^2\left|\frac{\partial u_3}{\partial x_j}\right|^2 dx \leqslant 2\int_\Pi d^{-2}\chi^2\varepsilon_{j3}(u)\frac{\partial u_3}{\partial x_j}dx - \int_\Pi d^{-2}\chi^2\frac{\partial u_3}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_3}dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_\Pi d^{-2}\chi^2\left|\frac{\partial u_3}{\partial x_j}\right|^2 dx + c\int_\Pi d^{-2}(|\varepsilon_{j3}(u)|^2+|u_j|^2)dx + \int_\Pi d^{-2}\left(\left|\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right|^2+\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right|^2\right)dx$$

Следовательно, $d^{-1}\chi \operatorname{grad} u_3 \in L_2(\Pi)$ и по неравенству Харди $r^{-1}d^{-1}\chi u_3 \in L_2(\Pi)$; кроме того, величина $\|r^{-1}d^{-1}u_3(\cdot, 0); L_2(\mathbf{R}^2)\|^2$ не превосходит левой части формулы (2.1). Теперь искомая оценка третьей компоненты, а с учетом (2.2) и вся оценка (2.1), получается после интегрирования по Π соотношений

$$u_3(x)^2 = \left(\int_0^{x_3}\frac{\partial u_3}{\partial z}(y, z)\,dz - u_3(y, 0)\right)^2 \leqslant 2\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\partial u_3}{\partial z}(y, z)^2 dz + 2u_3(y, 0)^2$$

Обозначим через H пространство вектор-функций, снабженное нормой $(E(u, u; \Omega)+\|(d+1)^{-1}u'; L_2(\Omega)\|^2+\|(d+1)^{-1}(r+1)^{-1}u_3; L_2(\Omega)\|^2)^{1/2}$. Переходя в (2.1) к замыканию C_0^∞ по норме H и используя неравенство Корна [14] для компактного множества $\{x\in\overline{\Omega} : |x|\leqslant 2\rho\}$, заключаем, что $E(u, u; \Omega)^{1/2}$ – норма в $\{u\in H : u=0$ на $\Gamma\}$. Заметим еще, что в пространстве H содержится линеал $\mathbf{U}^0$ жестких смещений $u^0(x)=(a_1-b_1z, a_2-b_2z, a_3+b_1y_1+b_2y_2)$ (a_j и b_k – произвольные постоянные). Наконец, поворот $(-y_2, y_1, 0)$ в H не попадает. В силу перечисленных фактов справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. Пусть dp_1, $dp_2\in L_2(\partial\Omega\backslash\Gamma)$, $drp_3\in L_2(\partial\Omega\backslash\Gamma)$ и $\operatorname{mes}_2(\Gamma)\neq 0$. Тогда существует единственное (обобщенное) решение $u\in H$ задачи (1.1), (1.2)

Предложение 2. Если при $\Gamma=\varnothing$ в дополнение к условиям предложения 1 $\int p\cdot u^0 ds_x=0$ для любого $u^0\in\mathbf{U}^0$, то существует (обобщенное) решение $u\in H$ задачи (1.1), (1.2). Это решение определено с точностью до слагаемого из $\mathbf{U}^0$.

3. Матрица поляризации. В этом разделе считается, что $\Gamma=\phi$. Рассмотрим удовлетворяющие (1.3), (1.4) векторные полиномы V^m и построенные по формулам (1.7) решения Ξ^m однородной задачи теории упругости в слое Π

$$V^j(x)=x_je^j, \quad V^3(x)=2^{-1/2}(x_2e^1+x_1e^2)$$
$$V^{3+j}(x)=2^{-1/2}x_j^2e^3, \quad V^6(x)=x_1x_2e^3 \quad (j=1, 2) \tag{3.1}$$
$$\Xi^k(x)=X(V^{k\prime}; x), \quad \Xi^{3+k}(x)=Y(V_3^k; x) \quad (k=1, 2, 3)$$

(3.2)

$$\Xi^j(x)=y_je^j-\frac{\lambda z}{\lambda+2\mu}e^3, \quad \Xi^{3+j}(x)=2^{-1/2}\left(y_j^2+\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{1}{24}\right)\right)e^3-2^{1/2}y_jze^j$$

$$\Xi^3(x)=2^{-1/2}(y_2e^1+y_1e^2), \quad \Xi^6(x)=y_1y_2$$

Здесь e^j – орты в $\mathbf{R}^3$. Для векторов (3.1) верны равенства

$$V^j(\nabla)\cdot V^k(x)=\delta_{j,k} \quad (j, k=1, \ldots, 6) \tag{3.3}$$

Поскольку поля (3.2) обращают функционал энергии в бесконечность, существуют «неэнергетические» решения $\zeta^j=\Xi^j+\Upsilon^j$ однородной ($p=0$) задачи (1.1), (1.2); здесь $\Upsilon^j\in H$ – решение задачи (1.1), (1.2), в которой $p\equiv p^j=-\sigma^{(n)}(\Xi^j)$, $j=1,\ldots,6$. (Подчеркнем, что нагрузка $\sigma^{(n)}(\Xi)$ на $\partial\Omega$ имеет компактный носитель и подчинена условиям предложения 2.) Решения Υ^j допускают следующие разложения на бесконечности:

$$\Upsilon^j\sim u^{j0}+\sum_{k=1}^{3}\{M_{jk}X(V_1^k(\operatorname{grad})T^{(1)}+V_2^k(\operatorname{grad})T^{(2)})-M_{jk+3}Y(V_3^{k+3}(\operatorname{grad})T_3)\} \tag{3.4}$$

Оценки остатков в формуле (3.4) суть $O(r^{-2})$ для первых двух компонент и $O(r^{-1})$ для третьей. Жесткое смещение $u^{j0}\in\mathbf{U}^0$ произвольно, и его можно выбрать равным нулю. Матрицу M размеров 6×6 с элементами M_{jk} назовем матрицей упругой поляризации для области Ω.

Предложение 3. Матрица M симметрическая.

Доказательство. Применим формулу Бетти для векторов ζ^j и Υ^k в области $\Omega_R=\{x\in\Omega\colon |y|<R\}$; границу $\partial\Omega_R\backslash\partial\Omega$ обозначим Γ_R. С учетом уравнений, которым удовлетворяют ζ^j и Υ^k, имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega}\sigma^{(n)}(\Xi^j)\cdot\Xi^k\,ds_x-\int\limits_{\partial\Omega}\sigma^{(n)}(\Upsilon^j)\cdot\Upsilon^k\,ds_x=-\int\limits_{\partial\Omega}p^j\cdot\zeta^k\,ds_x=$$
$$=\int\limits_{\Gamma_R}(\sigma^{(r)}(\Upsilon^j)\cdot\zeta^k-\sigma^{(r)}(\zeta^k)\cdot\Upsilon^j)\,ds_x \qquad (3.5)$$

Положим $G_+=\Omega\backslash\Pi$ и $G_-=\Pi\backslash\Omega$. Еще раз используя формулу Бетти, находим, что интегралы I_1 и I_2 из левой части (3.5) вычисляются при помощи равенств

$$I_1=2E(\Upsilon^j,\Upsilon^k;\Omega),\quad I_2=2E(\Xi^j,\Xi^k;G_+)-2E(\Xi^j,\Xi^k;G_-) \qquad (3.6)$$

Рассмотрим последний интеграл $I(R)$ в (3.5). Принимая во внимание равенства (3.2), (1.7) и асимптотические разложения (3.4), получаем

$$\zeta^k=\Xi^k+\ldots,\quad \Upsilon^j=X(\Sigma^{j\prime})+Y(\Sigma_3{}^j)+\ldots \qquad (3.7)$$
$$\sigma^{(r)}(\zeta^k)=(\tau^{(r)}(V^{k\prime}-z\,\mathrm{grad}\,V_3{}^k),0)+\ldots,\quad \sigma^{(r)}(\Upsilon^j)=(\tau^{(r)}(\Sigma^{j\prime}-z\,\mathrm{grad}\,\Sigma_3{}^j),$$
$${}^1\!/_2\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)^{-1}(4z^2-1)\,\partial\Delta_y\Sigma_3{}^j/\partial r)+\ldots$$
$$\Sigma^{j\prime}=\sum_{h=1}^{3}M_{jh}(V_1{}^h(\mathrm{grad})T^{(1)}+V_2{}^h(\mathrm{grad})T^{(2)}),\qquad \Sigma_3{}^j=-\sum_{h=4}^{6}M_{jh}V_3{}^h(\mathrm{grad})T_3$$

Здесь многоточием обозначены несущественные для дальнейших выкладок члены, τ — двумерный тензор напряжений, отвечающий обобщенному плосконапряженному состоянию. Используя (3.7), заключаем, что при $R\to\infty$ верно соотношение

$$I(R)=\int\limits_{-1/2}^{1/2}dz\int\limits_{\{|y|=R\}}(\tau^{(r)}(\Sigma^{j\prime})\cdot V^{k\prime}-\tau^{(r)}(V^{k\prime})\cdot\Sigma^{j\prime})\,ds_y+$$
$$+\int\limits_{-1/2}^{1/2}z^2\,dz\int\limits_{\{|y|=R\}}(\tau^{(r)}(\mathrm{grad}\,\Sigma_3{}^j)\cdot\mathrm{grad}\,V_3{}^k-\tau^{(r)}(\mathrm{grad}\,V_3{}^k)\cdot\mathrm{grad}\,\Sigma_3{}^j)\,ds_y-$$
$$-2\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(z^2-\frac{1}{4}\right)dz\int\limits_{\{|y|=R\}}V_3{}^k\frac{\partial}{\partial r}\Delta_y\Sigma_3{}^j\,ds_y+o(1) \qquad (3.8)$$

Операторы системы (1.3) и уравнения (1.4) обозначим $L'(\mathrm{grad})$ и $L_3(\mathrm{grad})$ соответственно. Интегрируя в (3.8) по частям и используя равенства $L'T^{(j)}+\delta e^j=0$, $j=1,2$, $L_3T_3=\delta$, где δ — функция Дирака, с учетом (3.3) находим, что

$$I(R)=\int\limits_{\{|y|<R\}}(V^{k\prime}\cdot L'(\mathrm{grad})\Sigma^{j\prime}-\Sigma^{j\prime}\cdot L'(\mathrm{grad})V^{k\prime})\,dy-$$
$$-\int\limits_{\{|y|<R\}}(V_3{}^kL_3(\mathrm{grad})\Sigma_3{}^j-\Sigma_3{}^jL_3(\mathrm{grad})V_3{}^k)\,dy+o(1)=$$
$$=-\int\limits_{\{|y|<R\}}\left(V^{k\prime}(y)\cdot\sum_{h=1}^{3}M_{jh}V^{h\prime}(\mathrm{grad})\delta(y)-V_3{}^k(y)\sum_{h=4}^{6}M_{jh}V_3{}^h(\mathrm{grad})\delta(y)\right)dy+$$
$$+o(1)=M_{jk}+o(1) \qquad (3.9)$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$ и собирая (3.5), (3.6), (3.9), получаем следующее равенство, заканчивающее доказательство предложения 3:

$${}^1\!/_2M_{jk}=-E(\Upsilon^j,\Upsilon^k;\Omega)+E(\Xi^j,\Xi^k;G_+)-E(\Xi^j,\Xi^k;G_-) \qquad (3.10)$$

Заметим, что согласно (3.2) $E(\Xi^j, \Xi^k; G_\pm)=\Lambda_{jk}\operatorname{mes}_3 G_\pm$, где Λ — положительно определенная блочная матрица размеров 6×6, $\Lambda=\mu\operatorname{diag}(2\Lambda', 1, {}^2/_3\Lambda', {}^1/_3)$, Λ' — 2×2-матрица с элементами $\Lambda_{11}'=\Lambda_{22}'=2(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)^{-1}$, $\Lambda_{12}'=\Lambda_{21}'=\lambda(\lambda+2\mu)^{-1}$. Матрица с элементами $E(\Upsilon^j, \Upsilon^k; \Omega)$ является матрицей Грама. Поэтому из (3.10) вытекает, что M отрицательно определена при $\operatorname{mes}_3 G_-\geqslant\operatorname{mes}_3 G_+$.

4. Упругая винеровская емкость. В этом разделе считается, что $\Gamma\neq\phi$ и $\operatorname{mes}_2\Gamma>0$. Следующие пять векторов имеют недопустимый в пространстве H рост на бесконечности:

$$Z^0=Y(T_3),\quad Z^j=X(T^{(j)}),\quad Z^{2+j}=Y(\partial T_3/\partial y_j)\quad (j=1,\ 2) \tag{4.1}$$

Поэтому найдутся «неэнергетические» решения $\eta^0,\ldots,\eta^4$ однородной задачи (1.1), (1.2) с асимптотиками

$$\eta^k(x)=Z^k(x)+W_{k0}e^3+\sum_{j=1}^{2}(W_{kj}e^j-W_{kj+2}(e^3x_j-e^jx_3))+O(|x|^{-1}) \tag{4.2}$$

Матрицу W с элементами W_{kj} $(k, j=1,\ldots,4)$ назовем матрицей упругой винеровской емкости, а 5×5 — матрицу W^0, составленную из всех коэффициентов в (4.2), — расширенной матрицей упругой винеровской емкости. Далее речь пойдет лишь о матрице W, хотя W^0 обладает аналогичными свойствами.

Предложение 4. Матрица W симметрическая.

Доказательство. Положим $\eta^k(x)=\chi(r)Z^k(x)+\xi^k(x)$, где $\chi\in C^\infty(\mathbf{R})$ — срезающая функция, $\chi(r)=1$ при $r>2R$, $\chi(r)=0$ при $r<R$. Воспользуемся формулой Бетти

$$\int\limits_{\partial\Omega_R\cap\partial\Omega}\eta^k\cdot\sigma^{(n)}(\xi^j)\,ds_x-\int\limits_{\Omega_R}\eta^k\cdot\mathbf{L}\xi^j\,dx=\int\limits_{\Gamma_R}(\xi^j\cdot\sigma^{(n)}(\eta^k)-\eta^k\cdot\sigma^{(n)}(\xi^j))\,ds_x \tag{4.3}$$

Здесь $\mathbf{L}$ — трехмерный оператор Ламе. После подстановки в правую часть $I(R)$ равенства (4.3) асимптотических представлений (4.2) при помощи аналогичных (3.7), (3.8) преобразований получаем, что при $R\to\infty$

$$I(R)=\int\limits_{\{|y|=R\}}\tau^{(r)}(\Theta^{k'})\cdot\Sigma^{j'}ds_y+\frac{1}{12}\int\limits_{\{|y|=R\}}\tau^{(r)}(\operatorname{grad}\Theta_3{}^k)\cdot\operatorname{grad}\Sigma_3{}^j ds_y-$$

$$-\frac{\mu(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\int\limits_{\{|y|=R\}}\Sigma_3{}^j\frac{\partial}{\partial r}\Delta_y\Theta_3{}^k\,ds_y+o(1) \tag{4.4}$$

Здесь $\Sigma^k(y)$ — выделенная в (4.2) сумма (по $j=1, 2$), в которой нужно положить $x_3=0$; $\Theta^h=T^{(h)}$, $\Theta^{2+h}=\partial T_3/\partial y_h$, $h=1, 2$. Теперь, переходя в (4.4) к интегралу по кругу $\{|y|<R\}$ и используя определение фундаментальных решений (1.5), получаем, как и в (3.9), соотношения

$$I(R)=\int\limits_{\{|y|<R\}}\Sigma^{j'}\cdot L'(\operatorname{grad})\Theta^{k'}\,dy-\int\limits_{\{|y|<R\}}\Sigma_3{}^jL_3(\operatorname{grad})\Theta_3{}^h\,dy+o(1)=-W_{jk}+o(1) \tag{4.5}$$

Рассмотрим левую часть (4.3), которую согласно формуле Бетти можно представить в виде

$$\int\limits_{\Omega_R}\chi Z^k\cdot\mathbf{L}(\chi Z^j)\,dx-\int\limits_{\partial\Omega_R\cap\partial\Omega}\chi Z^k\cdot\sigma^{(n)}(\chi Z^j)\,ds_x+2E(\xi^j,\xi^k;\Omega)+o(1) \tag{4.6}$$

Выражение (4.5), равное (4.6), имеет предел при $R\to\infty$. Поэтому конечным пределом обладает и разность интегралов в (4.6). Эта разность при помощи формулы Бетти приводится к сумме величины $-2E(\chi Z^j, \chi Z^k; \Omega)$ и интеграла по Γ_R, который отличен от нуля лишь при $k=j$ (сравни с (3.8)). Следовательно, $W_{jk}=W_{kj}$, что и требовалось доказать.

5. Асимптотические формулы для частот собственных колебаний. Пусть G — область на плоскости $\mathbf{R}^2$, ограниченная простым гладким контуром ∂G и содержащая начало координат $y=0$. Обозначим через Q_h пластину $G\times(-{}^1/_2h,\ {}^1/_2h)$ малой относительной толщины h (все координаты безразмерные). Будем считать, что край $\Gamma_h=\partial G\times(-{}^1/_2h,\ {}^1/_2h)$ жестко защемлен, а основания $\Sigma_\pm=G\times\{\pm{}^1/_2h\}$ свободны от напряжений. Известно, что две первые серии частот собственных колебаний пластины представимы в виде $\omega_j^{(1)}(h)=h\omega_j^{(1)}+O(h^2)$, $\omega_j^{(2)}(h)=\omega_j^{(2)}+O(h)$, где $\omega_j^{(1)}$ и $\omega_j^{(2)}$ — соответственно частоты собственных колебаний двумерного тела

$$L_3(\mathrm{grad})w_3(y)-\rho\omega^2w_3(y)=0;\quad y\in G;\quad w_3(y)=(\partial w_3/\partial n')(y)=0,\quad y\in\partial G \tag{5.1}$$

$$L'(\mathrm{grad})w'(y)+\rho\omega^2w'(y)=0,\quad y\in G;\quad w'(y)=0,\quad y\in\partial G \tag{5.2}$$

Здесь ρ — плотность материала, n' — вектор внешней нормали к ∂G.

Предположим, что в малой, размеров $O(h)$, окрестности точки $x=0$ часть поверхности пластины жестко защемлена. Это возмущение краевого условия фиксируем так, чтобы после растяжения в h^{-1} раз задача для пластины трансформировалась в задачу (1.1), (1.2) для области Ω при $\Gamma\neq\varnothing$. Известно, что при закреплении даже малого участка первые собственные частоты претерпевают существенные изменения. Это обстоятельство соответствует тому факту, что предельной задачей для описания $\omega_j^{(1)}(h)$ служит задача Соболева: в дополнение к уравнениям (5.1) ставится условие в точке O (условие закрепления в точке)

$$w_3(0)=0 \tag{5.3}$$

Однако и после такой модификации предельной задачи относительная погрешность $O(h\ln h^{-1})$ в асимптотической формуле $\omega_j^{(1)}(h)\sim h\omega_j^{(1)}$ остается значительной. Отметим также, что задача (5.2) с условиями закрепления $w'(0)=0$ некорректна.

Для того чтобы построить асимптотику собственных частот с достаточной точностью, модифицируем алгорифм [15, 16] применительно к тонким областям с малым возмущением границы. Сначала рассмотрим «продольные» колебания пластины. Пусть $\Lambda_0=\omega^2$ простое собственное число задачи (5.2), а $w^{0\prime}$ — соответствующий собственный вектор. Пограничный слой, описывающий собственную вектор-функцию u трехмерной задачи, ищем в виде

$$u(x;h)\sim\sum_{j,k=1}^{2}\gamma_{jk}'(\ln h)\,w_j^0(0)\,\eta^k(h^{-1}x)\qquad(|x|<h^{1/2}) \tag{5.4}$$

Согласно (4.2), (4.1) первые две компоненты вектора из правой части (5.4) равны при $|x|>h^{1/2}$:

$$\sum_{j,k=1}^{2}\gamma_{jk}'(\ln h)\,w_j^0(0)\Big(T^{(k)}(y)+\sum_{i=1}^{2}(\delta_{k,i}\beta\ln h+W_{ki})\Big)+\ldots \tag{5.5}$$

$$\beta=[8\pi\mu(\lambda+\mu)]^{-1}(2\lambda+3\mu)$$

Если в качестве 2×2-матрицы $\gamma'(\ln h)$ выбрать обратную к (неособенной при малом h) матрице $\beta\ln h\mathbf{1}+W'$, где $\mathbf{1}$ — единичная 2×2-матрица, W' — верхний 2×2-блок матрицы W винеровской емкости, то сумма (5.5) примет вид

$$w^{0\prime}(0)+\sum_{j,k=1}^{2}\gamma_{jk}'(\ln h)\,w_j^0(0)\,T^{(k)}(y) \tag{5.6}$$

Теперь, как и в [15, 16], учитывая условия сращивания, заключаем, что приближение $\Lambda_0+\Lambda_1(\ln h)$ к собственному числу $\Lambda(h)$ и приближение $w^{0\prime}(y)+w'(y;\ \ln h)$ (вне малой окрестности точки O) к первым двум компонентам собственного вектора $u(x,\ h)$ трехмерной задачи следует искать из системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&L'(\mathrm{grad})w'(y;\ \ln h)+\rho\Lambda_0 w'(y;\ \ln h)+F'(y;\ \ln h)=0, \quad y\in G\\
&w'(y;\ \ln h)=0, \quad y\in\partial G
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

$$
F'(y;\ln h)=\rho\Lambda_1(\ln h)\,(w^{0\prime}(y)+w'(y;\ln h))+\sum_{k=1}^{2}\gamma_{jk}{}'(\ln h)\,w_j{}^0(0)\,e^k\delta(y)
$$

В силу (5.4) — (5.6) поправку $w'(y;\ \ln h)$ нужно подчинить также асимптотическим условиям в точке O, которые интерпретируются как условия защемления для регулярной части вектор-функции w':

$$
w'(y;\ln h)=\sum_{j,k=1}^{2}\gamma_{jk}{}'(\ln h)\,w_j{}^0(0)\,T^{(k)}(y)+O(|y|) \qquad (|y|\to 0) \tag{5.8}
$$

Условием разрешимости задачи (5.7), (5.8) служит ортогональность в $L_2(G)$ векторов F' и $w^{0\prime}$. Это условие записывается следующим образом:

$$
\Lambda_1(\ln h)=-\rho^{-1}(\langle w^{0\prime},w^{0\prime}\rangle+\langle w',w^{0\prime}\rangle)^{-1}\sum_{j,k=1}^{2}\gamma_{jk}{}'(\ln h)\,w_j{}^0(0)\,w_k{}^0(0) \tag{5.9}
$$

Здесь $\langle\,,\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(G)$. Подставляя (5.9) в (5.7), получаем нелинейную краевую задачу для определения $w'(y;\ \ln h)$. Рассуждая так же, как и в [15], можно проверить, что задача (5.7), (5.8) имеет малое решение, голоморфно зависящее от $|\ln h|^{-1}$. Это решение и вычисленная по формуле (5.9) величина $\Lambda_1(\ln h)$ образуют поправки к главным членам Λ_0 и w^0 асимптотики решения трехмерной спектральной задачи, причем оценки остатков составляют $O(h)$. Выражение (5.9) можно разложить в сходящийся ряд по обратным степеням $\ln h$. В частности, верно соотношение

$$
\Lambda_1(\ln h)=-\rho^{-1}\langle w^{0\prime},w^{0\prime}\rangle^{-1}\sum_{j,k=1}^{2}\gamma_{jk}{}'(\ln h)\,w_j{}^0(0)\,w_k{}^0(0)+O(|\ln h|^{-2}) \tag{5.10}
$$

Для собственных частот выведенное асимптотическое представление имеет вид $\omega^{(2)}(h)=\omega^0+(2\omega^0)^{-1}\Lambda_1(\ln h)+O(h)$, где $\omega^0=\Lambda_0{}^{1/2}$. Отметим, что матрица $\gamma'(\ln h)=(\beta\ln h\mathbf{1}+W')^{-1}$ отрицательно определена при достаточно малом h, а значит, величина (5.9) положительна, т. е. собственные частоты, найденные из задачи (5.2), приближают собственные частоты трехмерной пластины с недостатком.

При переходе к изучению «поперечных» колебаний пластины алгорифм претерпевает незначительные изменения. Поэтому приведем лишь основные формулы.

Пусть $\Lambda_0=(\omega^0)^2$ — простое собственное число, а $w_3{}^0$ — отвечающая ему собственная функция задачи (5.1), (5.3). Соотношения (5.4), (5.5) в этом случае приобретают вид

$$
u(x;h)\sim h\sum_{j,k=1}^{2}\gamma_{jk}(\ln h)\frac{\partial w_3{}^0}{\partial y_j}(0)\,\eta^{k+2}(h^{-1}x) \qquad (|x|<h^{1/2}) \tag{5.11}
$$

$$
y\cdot\mathrm{grad}\,w_3{}^0(0)+\mathrm{grad}\,w_3{}^0(0)\cdot\gamma(\ln h)\,\mathrm{grad}\,T_3(y) \tag{5.12}
$$

В (5.12) указана главная часть представления третьей компоненты вектора (5.11), $\gamma(\ln h)$ — 2×2-матрица, обратная к $-W''-\beta\ln h\mathbf{1}$, где W'' — 2×2-блок $\|W_{j+2k+2}\|$ матрицы упругой винеровской емкости и согласно (1.5) $\beta=3[8\pi\mu(\lambda+\mu)]^{-1}(\lambda+2\mu)$. Поправки в асимптотические приближения $h^2(\Lambda_0+\Lambda_1(\ln h))$ и $u_3(x;\ h)\sim w_3{}^0(y)+w_3(y;\ \ln h)$ к решению трехмерной спектральной задачи определяются при решении задачи (сравни с

(5.7)–(5.9)):

$$L_3(\mathrm{grad})w_3(y;\ \ln h)-\rho\Lambda_0 w_3(y;\ \ln h)-F_3(y;\ \ln h)=0,\quad y\in G$$

$$w_3(y;\ \ln h)=(\partial w_3/\partial n')(y;\ \ln h)=0,\quad y\in\partial G \tag{5.13}$$

$$w_3(y;\ \ln h)=\mathrm{grad}\, w_3{}^0(0)\cdot\gamma(\ln h)\,\mathrm{grad}\, T_3(y)+O(|y|^2|\ln|y||)\quad (|y|\to 0)$$

$$F_3(y;\ \ln h)=\rho\Lambda_1(\ln h)(w_3{}^0(y)+w_3(y;\ \ln h))+\mathrm{grad}\, w_3{}^0(0)\cdot\gamma(\ln h)\,\mathrm{grad}\, w_3{}^0(0)$$

$$\Lambda_1(\ln h)=\rho^{-1}(\langle w_3{}^0,\ w_3{}^0\rangle+\langle w_3,\ w_3{}^0\rangle)^{-1}\mathrm{grad}\, w_3{}^0(0)\cdot\gamma(\ln h)\,\mathrm{grad}\, w_3{}^0(0) \tag{5.14}$$

Для задачи (5.13) справедливо все сказанное ранее о задаче (5.7), (5.8). В частности, поправка (5.14) в асимптотической формуле $\omega^{(1)}(h)=$ $=h\omega^0+h(2\omega^0)^{-1}\Lambda_1(\ln h)+O(h^2)$ положительна при малом h, а аналогичное (5.10) представление имеет вид

$$\Lambda_1(\ln h)=\rho^{-1}\langle w_3{}^0,\ w_3{}^0\rangle^{-1}\mathrm{grad}\, w_3{}^0(0)\cdot\gamma(\ln h)\,\mathrm{grad}\, w_3{}^0(0)+O(|\ln h|^{-2})$$

Приведенные асимптотические формулы касаются возмущения простого собственного числа. Если число кратное, то разложение претерпевает ту же модификацию, что и в работах [16–18], где рассмотрены похожие задачи.

Матрицы $\gamma'(\ln h)$ и $\gamma(\ln h)$, присутствующие в (5.9) и в (5.14), являются диагональными 2×2-блоками матрицы упругой винеровской емкости. Внедиагональные блоки принимаются во внимание при определении следующих членов приближения, составляющих $O(h)$. Однако возмущение, вызванное краевым эффектом, имеет тот же порядок малости и требует учета при вычислении вторых поправок. Соответствующие формулы весьма громоздки и здесь не приводятся. Сказанное в равной мере относится и к матрице упругой поляризации – интегральные характеристики дефекта (без жесткого защемления) в упругой пластине участвуют при вычислении младших членов асимптотики.

Укажем еще асимптотические формулы для потенциальной энергии пластины $\Pi=U-A=-{}^1/_2A$; здесь A – работа внешних сил, U – упругая энергия. Предположим, как и в начале раздела, что малый участок пластины жестко защемлен; пусть еще массовые силы отсутствуют и к основаниям $\Sigma_\pm$ приложены либо нагрузки $({}^1/_2p_1(y),\ {}^1/_2p_2(y),\ 0)$ (обобщенное плосконапряженное состояние), либо нагрузки $(0,\ 0,\ {}^1/_2p_3(y))$ («чистый» изгиб). В предположении, что p_i – достаточно гладкие функции, с точностью $O(|\ln h|^{-1})$ напряженно-деформированное состояние пластины описывается решениями $w^{0\prime}$ и $w_3{}^0$ задач (5.2) и (5.1), (5.3), в которых члены $\rho\omega^2w'$ и $\rho\omega^2w_3$ заменены на p' и $h^{-3}p_3$. Обозначим соответствующие работы внешних сил A_0' и $h^{-3}A_0$. Пограничные слои строятся по аналогичным (5.4) и (5.11) формулам (разве лишь множитель h в (5.11) заменяется множителем h^{-2}). Для поправочных членов в асимптотике решений трехмерных задач получаются соотношения (5.7), (5.8) и (5.13), где следует положить $\Lambda_0=0$. Модифицируя процедуру [19] построения асимптотики функционалов энергии, приходим к соотношениям

$$\Pi'=A_0'-{}^1/_2w^{0\prime}(0)\cdot\gamma'(\ln h)\ w^{0\prime}(0)+O(h) \tag{5.15}$$

$$\Pi=h^{-3}(A_0+{}^1/_2\,\mathrm{grad}\ w_3(0)\cdot\gamma(\ln h)\ \mathrm{grad}\ w_3(0)+O(h)) \tag{5.16}$$

Отметим, что поправки в асимптотических формулах (5.15), (5.16) положительны при малом h благодаря свойствам матриц $\gamma'(\ln h)$ и $\gamma(\ln h)$. Это соответствует возрастанию минимума функционала энергии при введении дополнительных условий защемления (при сужении множества, на котором ищется минимум). Подчеркнем, что в (5.16) такое увеличение потенциальной энергии проявляется и в главном члене асимптотики (за счет соблюдения условия (5.3)), а в (5.15) – лишь в поправочном слагаемом.

Наконец, если вместо матриц γ' и γ писать матрицы $8\pi\mu(\lambda+\mu)(2\lambda+3\mu)^{-1}(\ln h)^{-1}1$ и $-{}^8/_3\pi\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)^{-1}(\ln h)^{-1}1$ соответственно, то оценка остатка $O(h)$ в соотношениях (5.15) и (5.16) примет вид $O(|\ln h|^{-2})$, а представления (5.10) и (5.15) поправок к собственным частотам не изменятся. Подчеркнем, что полученные таким способом формулы не требуют дополнительных вычислений, связанных с нахождением матрицы винеровской емкости, но и они являются более точными, чем классические.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
2. *Зорин И. С., Назаров С. А.* О напряженно-деформированном состоянии упругого пространства с тонким тороидальным включением // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 79–86.
3. *Бабич В. М., Иванов М. И.* Длинноволновая асимптотика в задачах рассеяния упругих волн // Записки науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1986. Т. 156. С. 6–19.
4. *Зорин И. С., Мовчан А. Б., Назаров С. А.* Об использовании тензора упругой поляризации в задачах механики трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 128–134.

5. *Назаров С. А.* Асимптотика решений систем Ламе и Стокса в секторе слоя или вблизи точки касания гладких поверхностей // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42. № 4. С. 147.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 27. Вып. 4. С. 593–608.
7. *Зино И. Е., Тропп Э. А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводимости и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
8. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 117 с.
9. *Леора С. Н., Назаров С. А., Проскура А. В.* Вывод предельных уравнений для эллиптических задач в тонких областях при помощи ЭВМ // Ж. вычисл. математики и матем. физики. 1986. Т. 26. № 7. С. 1032–1048.
10. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
11. *Pazy A.* Asymptotic expansion of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rat. Mech. Analysis. 1967. V. 24. № 3. P. 193–218.
12. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
13. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
14. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
15. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
16. *Назаров С. А.* Асимптотические разложения собственных чисел. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 109 с.
17. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
18. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Об особенностях решений задачи Дирихле во внешности тонкого конуса // Мат. сб. 1983. Т. 122. № 4. С. 435–457.
19. *Мазья В. Г., Назаров С. А.* Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях границы вблизи угловых и конических точек //Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. Т. 50. С. 79–129.

Ленинград

Поступила в редакцию
30.XII.1988
