МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1990

УДК 539.3

И. М. НЕСАТЫЙ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается многосвязная область D, контур L которой состоит из простых непересекающихся замкнутых кривых L_j $(j=1, 2\ldots m+1)$. Контур L_{m+1} содержит внутри все остальные. На непересекающихся дугах $a_k^{(j)} b_k^{(j)}$ $(k=1,2\ldots m^{(j)})$ контуров L_j заданы внешние усилия, а на промежуточных дугах $b_k^{(j)} a_{k+1}^{(j)}$ — смещения. Граничные интегральные уравнения для этого случая получены в [1] с использованием комплексных потенциалов (библиографию работ в этом направлении можно найти и в [2]). В отличие от указанных, в настоящей статье дан вывод интегральных уравнений задачи прямым методом и показана их безусловная разрешимость в классе разрывных функций. Для определения постоянных, фигурирующих в граничных условиях, получены в явном виде простые соотношения, связывающие постоянные со значениями заданных и искомых функций в концевых точках дуг. Как частный случай, получены интегральные уравнения двумерных задач теории упругости при заданных на границе только усилиях или только смещениях.

1. Будем исходить из граничных условий на дугах $a_k^{(j)}b_k^{(j)}$ и $b_k^{(j)}a_{k+1}^{(j)}$ соответственно в виде [3]:

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+C_{jk}' \quad (t\in L') \tag{1.1}$$

$$\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=f(t) \quad (t\in L'') \tag{1.2}$$

$$f(t)=i\int\limits_{a_k^{(j)}}^{t}(X_n+iY_n)\,ds, \quad t\in L'=\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=1}^{m^{(j)}}a_k^{(j)}b_k^{(j)}$$

$$f(t)=2\mu(u+iv), \quad t\in L''=\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=1}^{m^{(j)}}b_k^{(j)}a_{k+1}^{(j)}$$

Рассматриваемая задача теории упругости будет решена, если удастся определить перемещения u, v точек, принадлежащих дугам $a_k^{(j)}b_k^{(j)}$ и распределение усилий по дугам $b_k^{(j)}a_{k+1}^{(j)}$. Поэтому, введем в качестве искомых следующие функции (C_{jk}', C_{jk}'' — неизвестные постоянные):

$$\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=\omega(t) \quad (t\in L') \tag{1.3}$$

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=\omega(t)+C_{jk}'' \quad (t\in L'') \tag{1.4}$$

$$\omega(t)=2\mu(u+iv) \quad (t\in L')$$

$$\omega(t)=i\int\limits_{b_k^{(j)}}^{t}(X_n+iY_n)\,ds \quad (t\in L'')$$

В случае многосвязной области и не равных нулю главных векторах усилий, приложенных к контурам, функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ являются многозначными:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(z-z_j)+\varphi_0(z) \tag{1.5}$$

$$\psi(z)=-\frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(z-z_j)+\psi_0(z) \qquad (1.6)$$

$\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — однозначные аналитические функции; точки z_j находятся внутри контуров L_j, $A_j=X_j+iY_j$; $(X_j,\ Y_j)$ — главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру L_j. Величины A_j заранее неизвестны и должны быть найдены в ходе решения задачи.

Подстановка (1.5) и (1.6) при $z=t$ в (1.1)÷(1.4) приводит к соотношениям:

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}+\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(t-z_j)+\frac{t}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}\frac{\bar{A}_j}{\bar{t}-\bar{z}_j}-$$

$$-\frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(\bar{t}-\bar{z}_j)=\begin{cases}f(t)+C_{jk}'\ (t\in L')\\ \omega(t)+C_{jk}''\ (t\in L'')\end{cases} \qquad (1.7)$$

$$\varkappa\varphi_0(t)-t\varphi_0'(t)-\psi_0(t)+\frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(t-z_j)-$$

$$-\frac{t}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}\frac{\bar{A}_j}{\bar{t}-\bar{z}_j}+\frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(\bar{t}-\bar{z}_j)=\begin{cases}\omega(t)\ (t\in L')\\ f(t)\ (t\in L'')\end{cases} \qquad (1.8)$$

Из (1.7) и (1.8) соответственно при $t\in L'$ и $t\in L''$ найдем:

$$(1+\varkappa)\varphi_0(t)=\omega(t)+f(t)+C_{jk}'-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(t-z_j) \qquad (1.9)$$

$$(1+\varkappa)\psi_0(t)=-\overline{\omega(t)}-\bar{t}\omega'(t)+\varkappa\overline{f(t)}-\bar{t}f'(t)+\varkappa\overline{C_{jk}'}+\frac{\varkappa}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\bar{A}_j\ln(t-z_j)$$

$$(1.10)$$

$$(1+\varkappa)\varphi_0(t)=\omega(t)+f(t)+C_{jk}''-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(t-z_j) \qquad (1.11)$$

$$(1.12)$$

$$(1+\varkappa)\psi_0(t)=\varkappa\overline{\omega(t)}-\bar{t}\omega'(t)-\overline{f(t)}-\bar{t}f'(t)+\varkappa\overline{C_{jk}''}+\frac{\varkappa}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\bar{A}_j\ln(t-z_j)$$

Функции $\omega(t)$ и $f(t)$ непрерывны на дугах $a_k^{(j)}b_k^{(j)}$ и $b_k^{(j)}a_{k+1}^{(j)}$, но в точках $a_k^{(j)}$ и $b_k^{(j)}$ имеют разрывы 1-го рода. В отличие от этого, перемещения непрерывно продолжимы из области D на все точки контура L, т. е.:

$$\omega(a_k^{(j)}+0)=f(a_k^{(j)}-0);\quad \omega(b_k^{(j)}-0)=f(b_k^{(j)}+0) \qquad (1.13)$$

Будем считать непрерывно продолжимой из области D на L и функцию $\varphi_0(z)+z\overline{\varphi_0'(z)}+\overline{\psi_0(z)}$ (или функцию $\varphi_0(z)$), как это может быть принято при постановке основных двумерных задач теории упругости [3]. Исходя из условий непрерывности функции $\varphi(z)$ в точках $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$ контура, с учетом (1.13) придем к следующим зависимостям:

$$C'_{j,k+1}-C_{jk}''=\omega(a_{k+1}^{(j)}-0)$$

$$(1.14)$$

$$C_{jk}''-C_{jk}'=f(b_k^{(j)}-0)\quad (k=1,2\ldots m^{(j)}),\qquad a_{m^{(j)}+1}^{(j)}=a_1^{(j)}$$

При выводе (1.14) учтено также:

$$f(a_k^{(j)}+0)=\omega(b_k^{(j)}+0)=0 \qquad (1.15)$$

Зависимости (1.14), включающие неизвестные $\omega(a_{k+1}^{(j)}-0)$, следует рассматривать совместно с полученным ниже интегральным уравнением для определения функции $\omega(t)$. Они позволяют достаточно просто определить постоянные, фигурирующие в граничных условиях. Другой способ [4] определения этих постоянных требует нахождения собственных функций союзного однородного уравнения, что сопряжено со значительными трудностями.

Найдем по интегральной формуле Коши $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ граничные значения которых даются зависимостями (1.9)—(1.12) (зависимость для $\psi_0(z)$ не приводится):

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\left\{\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-z}+\int_L\frac{f(t)\,dt}{t-z}-2i\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(z-z_j)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=1}^{m^{(j)}}\left[C'_{jk}\ln\frac{b_k^{(j)}-z}{a_k^{(j)}-z}+C''_{jk}\ln\frac{a_{k+1}^{(j)}-z}{b_k^{(j)}-z}\right]\right\}\tag{1.16}$$

Зависимость для $\varphi_0'(z)$ получим, дифференцируя (1.9) и (1.11) и применяя затем интегральную формулу Коши:

$$\varphi_0'(z)=\frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\left[\int_L\frac{\omega'(t)\,dt}{t-z}+\int_L\frac{f'(t)\,dt}{t-z}-i\sum_{j=1}^{m}\frac{A_j}{z-z_j}\right]\tag{1.17}$$

Интегралы типа Коши, входящие в (1.16) и (1.17) имеют логарифмические особенности в точках $a_k^{(j)}$ и $b_k^{(j)}$, где функции $\omega(t)$ и $f(t)$ и их производные имеют разрывы 1-го рода. Условие отсутствия таких особенностей у самой функции $\varphi_0(z)$ (или функции $\varphi_0(z)+z\overline{\varphi_0'(z)}+\overline{\psi_0(z)}$) также приводит к соотношениям (1.14).

Будем считать, что функции $\omega(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют условию H_0 на L, а их производные — функции $\omega'(t)$, $f'(t)$ условию H^* [4] (примем также, что кривизна контура L удовлетворяет условию H (1)). Перейдем в (1.16) и (1.17) к пределу при $z\to t_0$ ($t_0\in L$) по формулам Сохоцкого — Племея (выражения для $\varphi_0'(t_0)$ и $\psi_0(t_0)$ не приводятся):

$$\varphi_0(t_0)=\frac{1}{2(1+\varkappa)}\left\{\omega(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(t_0-z_j)+\frac{1}{\pi i}\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=1}^{m^{(j)}}\left[C'_{jk}\ln\frac{b_k^{(j)}-t_0}{a_k^{(j)}-t_0}+C''_{jk}\ln\frac{a_{k+1}^{(j)}-t_0}{b_k^{(j)}-t_0}\right]\right\}\tag{1.18}$$

Сопоставляя (1.18) с (1.9) и (1.11) найдем:

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=1}^{m^{(j)}}\left[C'_{jk}\ln\frac{b_k^{(j)}-t_0}{a_k^{(j)}-t_0}+C''_{jk}\ln\frac{a_{k+1}^{(j)}-t_0}{b_k^{(j)}-t_0}\right]=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(t_0-z_j)+$$
$$+\frac{\omega(t_0)}{2}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{f(t_0)}{2}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}+\begin{cases}C'_{jk}\,(t_0\in L')\\ C''_{jk}\,(t_0\in L'')\end{cases}\tag{1.19}$$

Соотношение (1.19) позволяет исключить логарифмические особенности в точках $a_k^{(j)}$ и $b_k^{(j)}$ из приводимого ниже интегрального уравнения.

Подставим (1.18), а также предельные значения $\varphi_0'(z)$ и $\psi_0(z)$ (последние различны при $t_0\in L'$ и $t_0\in L''$) в (1.7) или (1.8). В результате после преобразований, включающих в том числе интегрирование по частям и использование зависимостей (1.13), (1.19) придем к следующему интегральному уравнению ($t_0\in L$):

$$A(t_0)\,\omega(t_0)+\frac{(1+\varkappa)}{2\pi i}\int_{L'}\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\omega(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+$$

$$+\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_{L''}\omega(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=1}^{m(j)}\frac{a_k^{(j)}-t_0}{\overline{a_k^{(j)}}-\bar t_0}\,\overline{\omega(a_k^{(j)}-0)}-\frac{t_0}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\frac{\bar A_j}{\bar t_0-\bar z_j}-$$

$$-\frac{\varkappa}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln\frac{t_0-z_j}{\bar t_0-\bar z_0}+\frac{\varkappa}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=1}^{m(j)}\left\{C'_{jk}\left[\ln\frac{b_k^{(j)}-t_0}{\overline{b_k^{(j)}}-\bar t_0}+\ln\frac{\overline{a_k^{(j)}}-\bar t_0}{a_k^{(j)}-t_0}\right]+\right.$$

$$\left.+C''_{jk}\left[\ln\frac{a_{k+1}^{(j)}-t_0}{\overline{a_{k+1}^{(j)}}-t_0}+\ln\frac{\overline{b_k^{(j)}}-\bar t_0}{b_k^{(j)}-t_0}\right]\right\}-2\varkappa C(t_0)=B(t_0)f(t_0)-$$

$$-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_{L'}f(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{(1+\varkappa)}{2\pi i}\int\limits_{L''}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\overline{f(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L''}f(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=1}^{m(j)}\frac{b_k^{(j)}-t_0}{\overline{b_k^{(j)}}-\bar t_0}\,\overline{f(b_k^{(j)}-0)};\qquad(1.20)$$

$$A(t_0)=(1-\varkappa)/2,\quad B(t_0)=\varkappa,\quad C(t_0)=C_{jk}',\quad t_0\in L'$$
$$A(t_0)=-\varkappa,\quad B(t_0)=-(1-\varkappa)/z,\quad C(t_0)=C_{jk}'',\quad t_0\in L''$$

$$A_j=-i\sum_{k=1}^{m(j)}[\omega(a_k^{(j)}-0)+f(b_k^{(j)}-0)]\qquad(1.21)$$

Уравнение (1.20) совместно с соотношениями (1.14) и (1.21) образуют систему из интегральных и линейных алгебраических уравнений для определения неизвестной функции $\omega(t)$ и неизвестных величин C_{jk}', C_{jk}'', A_j[1].

Решение системы ищется в классе функций, ограниченных на концах дуг $a_k^{(j)}b_k^{(j)}$ и $b_k^{(j)}a_{k+1}^{(j)}$. Однако, определение по известным [2] формулам величины индекса задачи показывает, что он равен нулю.

Покажем также, что однородная система уравнений (1.14), (1.20), (1.21) не имеет решений отличных от нулевых, откуда будет следовать ее безусловная разрешимость [4]. Обозначим $\varphi_0^*(z)$, $\psi_0^*(z)$, $\omega_0(t)$ — функции, соответствующие решению однородного уравнения. Из теоремы единственности решения смешанной задачи следует: $\varphi_0^*(z)=\psi_0^*(z)=0$, а из (1.9)÷(1.12) $-A_j=0$, т. к. в левой части этих равенств постоянная величина (ноль). Тогда из (1.9) и (1.11) найдем: $\omega_0(t)=-C_{jk}'$ $(t\in L')$, $\omega_0(t)=-C_{jk}''$ $(t\in L'')$. Подстановка этих значений в (1.14) дает: $C_{jk}'=$ $=C_{jk}''=0$ и, следовательно, $\omega_0(t)=0$.

2. Рассмотрим различные частные случаи, которые могут встретиться при решении смешанной задачи. Если на некотором контуре с номером $j=j^*$ заданы только смещения или только усилия, то в обоих случаях в левой части (1.20) во второй двойной сумме будет отсутствовать член с номером $j=j^*$. Кроме того, в первом случае будет отсутствовать соответствующий член двойной суммы в правой части (1.20), а во втором — член с номером $j=j^*$ первой двойной суммы в левой части (1.20). В первом и втором случае следует также соответственно положить:

$$\begin{array}{llll} C'_{j^*k}=0, & C''_{j^*k}=C_{j^*}'', & A_j=-i\omega(a^{(j^*)}-0), & a_k^{(j^*)}=a^{(j^*)} \\ C'_{j^*k}=C_{j^*}', & C''_{j^*k}=0, & A_j=-if(b^{(j^*)}-0), & b_k^{(j^*)}=b^{(j^*)} \end{array}\qquad(2.1)$$

где $a^{(j^*)}$, $b^{(j^*)}$ — произвольные точки на контуре L_j^* (точки начала отсчета при интегрировании по контуру). Величины C_{j^*}' и C_{j^*}'' при этом необходимо заменить их значениями из (1.19), в котором будет отсутствовать

[1] Равенство (1.21) можно внести в (1.20) и исключить A_j из системы.

член двойной суммы с номером $j=j^*$. Для этого значения j не используются и соотношения (1.14).

Из уравнения (1.20) можно получить и уравнения двумерных задач теории упругости при заданных на границе только усилиях или только смещениях. Для этого, указанные выше изменения, необходимо распространить на все контуры L_j. В результате, соответственно, будем иметь:

$$\frac{(1+\varkappa)}{2}\omega(t_0)+\frac{(1-\varkappa)}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\omega(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}=\frac{\varkappa}{\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L f(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{f(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+\frac{t_0}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\frac{\bar A_j}{\bar t_0-\bar z_j}-\frac{\varkappa}{\pi}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln|t_0-z_j|-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m+1}\bar A_j\frac{b_j-t_0}{\bar b_j-\bar t_0}\tag{2.2}$$

$$\frac{\varkappa}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L\omega(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-$$
$$-\frac{t_0}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\frac{\omega(a_j^*-0)}{\bar t_0-\bar z_j}-\frac{\varkappa}{\pi i}\sum_{j=1}^{m}\omega(a_j^*-0)\ln|t_0-z_j|+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\overline{\omega(a_j^*-0)}\,\frac{a_j-t_0}{\bar a_j-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\,\overline{\omega(a_{m+1}-0)}\,\frac{a_{m+1}-t_0}{\bar a_{m+1}-\bar t_0}=\frac{(1+\varkappa)}{2}f(t_0)+$$
$$+\frac{(1-\varkappa)}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L f(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{f(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}\tag{2.3}$$

Заметим, что уравнение (2.2) и (2.3) могут быть получены одно из другого (с учетом 2.1) заменой в левых частях этих уравнений $\omega(t)$ на $f(t)$, а в правых — $f(t)$ на $\omega(t)$.

Уравнение (2.2) имеет собственную функцию: $\omega_0(t)=i\alpha t+\beta$ (α — действительная, β — комплексная постоянная), соответствующую перемещениям тела как жесткого целого. Ее легко устранить, положив в некоторой точке t^* контура:

$$\omega(t^*)=0,\quad \operatorname{Im}\omega'(t^*)=0\tag{2.4}$$

что можно сделать, не меняя напряженного состояния. Условия (2.4) выражают факт закрепления тела в точке t^* от переноса и поворота. Из (2.4) следует $\alpha=\beta=\omega_0(t)=0$ и, следовательно, уравнение (2.2), совместно с условиями (2.4) всегда разрешимо.

Можно получить всегда разрешимое уравнение (2.2) и другим путем, вводя в уравнение (и в функцию $\psi(z)$ следующие добавки:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{m+1}}\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{z}{2\pi i}\int_{L_{m+1}}\left(\frac{\omega(t)\,dt}{t^2}+\frac{\overline{\omega(t)\,d\bar t}}{\bar t^2}\right)\tag{2.5}$$

Непосредственная проверка показывает, что однородное уравнение (2.2) с добавками (2.5) не имеет решений, отличных от нулевых.

Эти добавки по виду напоминают добавки, введенные Д. И. Шерманом [3], но отличаются от них тем, что интегрирование в (2.5) происходит не по всем контурам, а только по наружному. Последнее обстоятельство (или использований условий (2.4)) определяет преимущество уравнения (2.2) по сравнению с уравнением [3]. Однако, уравнение (2.2) является сингулярным и имеет более сложную правую часть, но при этом ядра интегральных членов правой части уравнения (2.2) не отличаются от соответствующих ядер левой части этого уравнения. Поэтому, указанное усложнение не приводит к заметному возрастанию объема вычислений.

Кроме того, решением уравнения (2.2) фактически является комплексное перемещение точек контура тела. Это дает возможность просто определить и представляющие наибольший интерес граничные значения комплексных потенциалов $\varphi(z)$, $\psi(z)$. При использовании уравнения [3] это приходится делать по формулам Сохоцкого – Племеля, т. е. вычислять сингулярные интегралы (с известной плотностью).

В случае, если наружный контур L_{m+1} отсутствует (неограниченная плоскость с отверстиями) уравнение (2.2) разрешимо при произвольной правой части и без условий (2.4) или добавок (2.5). Уравнение (2.3) всегда разрешимо.

Интегральные уравнения двумерных задач теории упругости при заданных на границе усилиях обычно выводятся для случая, когда главный вектор усилий, приложенных к контурам отверстий равен нулю. Переход от общего случая к частному осуществляется при помощи известного [4] преобразования граничных условий. При использовании уравнения (2.2) такое преобразование не требуется, а если главный вектор усилий действительно равен нулю, в (2.2) следует положить $A_j=0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шерман Д. И.* Двумерная смешанная задача статической теории упругости // Развитие теории контактных задач в СССР./Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. С. 169–175.
2. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962 599 с.

Москва

Поступила в редакцию 10.IV.1989