

УДК 531.8

© 1990 г.

В. В. БЕЛЕЦКИЙ, М. Д. ГОЛУБИЦКАЯ

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ И ЭНЕРГЕТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ

Многочисленные исследования динамики двуногой ходьбы часто оперируют плоскими моделями (ноги и корпус при ходьбе колеблются в одной плоскости). Пространственные колебания при ходьбе рассматриваются реже, причем в аналитическом исследовании обычно ограничиваются линейными моделями [1]. Между тем пространственная структура следовой дорожки (ноги ставятся не на одну линию) неизбежно генерирует пространственность колебаний системы при ходьбе. Человек при ходьбе заметнее раскачивается поперек курса, чем вдоль. То же относится к ходьбе двуногих механических устройств.

В публикуемой работе¹ предлагается одна из возможных моделей ходьбы с поперечными раскачиваниями. Рассмотрена ходьба с чисто поперечными колебаниями центра масс системы, при которой поперечные колебания не зависят от продольного движения. Такая модель в значительной степени поддается аналитическому исследованию, так как она описывается автономным интегрируемым уравнением. Исследование проводится методом фазовой плоскости и численными расчетами. Производится анализ энергетики движения. Отмечается, что при определенных условиях пространственная ходьба оказывается выгоднее плоской.

1. Будем предполагать, что шагающий аппарат состоит из корпуса и двух многозвенных ног, подвешенных в одной точке O корпуса (фиг. 1). В частности, ноги могут быть невесомыми, а корпус моделироваться материальной точкой на невесомом стержне («математический маятник, снабженный невесомыми ногами»). Как в этом частном случае, так и в общем, будем предполагать, что контакт ноги с опорной поверхностью — точечный и в точке опоры приложена сила реакции R_0 .

Отметим, что в рамках динамики материальной точки можно строить различные модели ходьбы [2], адекватность которых определяется наложенными связями. Связи, используемые в настоящей работе, вполне отражают специфику шагающих механизмов.

Введем неподвижную систему координат $NXYZ$ (фиг. 1). Пусть NXY — опорная горизонтальная плоскость, и аппарат в любой момент времени опирается на нее только одной ногой («одноопорная ходьба» [1]). Пусть R_{0x} , R_{0y} , R_{0z} — компоненты силы R_0 опорной реакции. Уравнения движения центра масс $C(X, Y, Z)$ системы имеют вид (M — масса аппарата):

$$X'' = R_{0x}/M, \quad Y'' = R_{0y}/M, \quad Z'' = R_{0z}/M - g \quad (1.1)$$

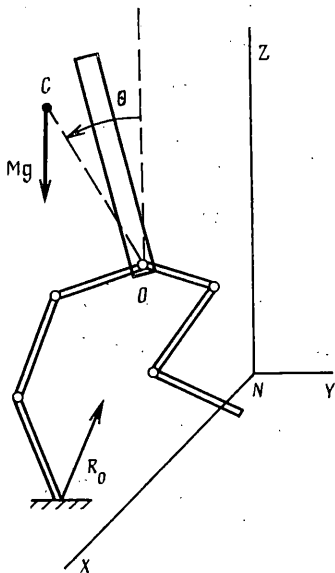
Предположим, что вектор опорной реакции R_0 всегда направлен в центр масс системы

$$R_0 = R_0 r_0 / r_0 \quad (1.2)$$

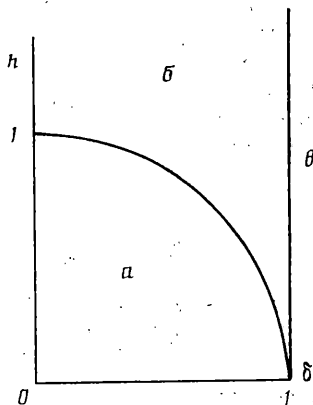
В (1.2) $r_0 = \{X - X_v, Y - Y_v, Z - Z_v\}$ — радиус-вектор центра масс аппарата, проведенный из опорной точки (X_v, Y_v, Z_v) , $r_0 = [(X - X_v)^2 + (Y - Y_v)^2 + (Z - Z_v)^2]^{1/2}$ — модуль этого радиус-вектора, $R_0 = [R_{0x}^2 + R_{0y}^2 + R_{0z}^2]^{1/2}$ — модуль силы реакции.

Условие (1.2) автоматически выполняется для модели «математический маятник на невесомых ногах». Для общей модели это условие является специально наложенной связью (реализация этой связи обеспечива-

¹ См. также: Белецкий В. В., Голубицкая М. Д. Модельная задача динамики пространственной двуногой ходьбы: Препринт № 194. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР. 1982. 23 с.



Фиг. 1



Фиг. 2

ются межзвенными управляющими моментами и некоторыми добавочными условиями, которые будут указаны ниже).

В дальнейшем будут рассмотрены регулярные походки, такие что

$$X_v = X_{v-1} + L, Y_v = (-1)^{v-1} d, Z_v = 0, X_0 = -L \quad (v=1, 2, \dots) \quad (1.3)$$

Здесь L — длина шага, $2d$ — ширина следовой дорожки. Смена опоры $r_v(X_v, Y_v, 0) \rightarrow r_{v+1}(X_{v+1}, Y_{v+1}, 0)$ происходит, по предположению, с периодом t_k длительности одиночного шага.

В силу (1.2) уравнения (1.1) принимают вид

$$X'' = (R_0/r_0)(X - X_v), Y'' = (R_0/r_0)(Y - Y_v), Z'' = (R_0/r_0)(Z - Z_v) - g \quad (1.4)$$

Наложим на движение связь

$$Y = -\rho \sin \theta, Z = H + \rho \cos \theta, \rho = \text{const} \quad (1.5)$$

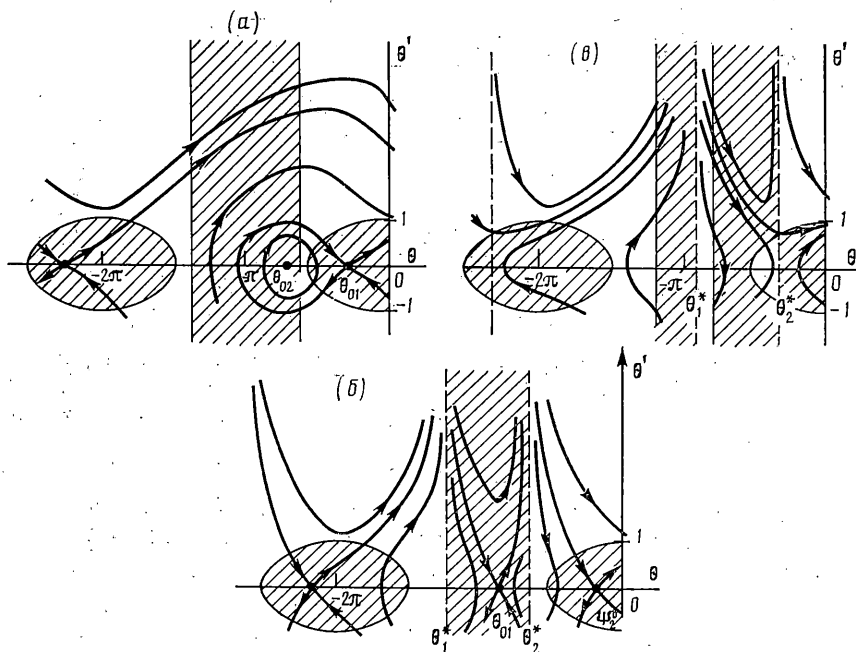
Здесь $H = \text{const}$, $H > 0$ — расстояние от точки O подвеса ног до опорной плоскости NXY (параметр походки), $\rho = OC$ — расстояние от этой точки до центра масс C , θ — угол между осью OC и вертикалью, отсчитываемый от вертикали (фиг. 1). В условиях (1.5) точка подвеса ног аппарата может двигаться только в плоскости NXZ на высоте H от опорной плоскости NXY , а центр масс — в плоскости, перпендикулярной оси NX , по дуге окружности радиуса ρ .

В силу уравнений связи (1.5) уравнения (1.4) после некоторых преобразований приобретают вид

$$\begin{aligned} R/r &= \cos \theta - \theta'^2 / \Phi(\theta), x'' = R(x - x_v) / r \\ \Phi(\theta) \theta'' + d\Phi(\theta) / d\theta \theta'^2 &= y_v + \sin \theta \\ \Phi(\theta) &= 1 + h \cos \theta + y_v \sin \theta \\ x &= X/\rho, x_v = X_v/\rho, y_v = Y_v/\rho, h = H/\rho \\ \tau &= \sqrt{g/\rho} t, R = R_0/Mg, r = r_0/\rho \end{aligned} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.6) в совокупности с (1.5) описывают движение центра масс системы на v -м шаге (точка опоры — $x_v, y_v, 0$). Модель (1.6) пространственного движения аппарата в значительной степени поддается аналитическому исследованию, так как третье уравнение (1.6) поперечных колебаний центра масс не зависит от второго, описывающего продольное движение и, к тому же, является автономным (и интегрируемым в квадратурах).

Сделаем следующее разъяснение. Для системы математический маятник на невесомых ногах условие (1.2) выполнено автоматически и не является наложенной связью. На три степени свободы движения центра масс системы в этом случае наложена одна связь (1.5) и описание движения сводится к двум уравнениям второго порядка — второму и третьему системы (1.6). В случае произвольной конструкции аппарата надо, вообще говоря, иметь в виду не только движение центра масс, но и движение системы относительно ее центра масс. Условие (1.2) эквивалентно условию равенства нулю главного момента внешних сил, следовательно, кинетический момент системы в ее движении относительно центра масс постоянен. Это дает три скалярных условия на относительное движение



Фиг. 3

системы, которые следует рассматривать как наложенные связи. Но на систему наложено еще две связи. Действительно, в силу (1.5) фиксированная точка аппарата (точка подвеса ног) в своем движении относительно центра масс всегда находится в вертикальной плоскости, проходящей через центр масс системы (первая связь) и, кроме того, в этой плоскости движется по дуге окружности (вторая связь). Всего на относительное движение системы наложено пять связей, следовательно, в своем движении относительно центра масс аппарат должен обладать не менее чем пятью степенями свободы, чтобы движение можно было реализовать. Например, модель аппарата, состоящая из твердого тела на невесомых ногах, имеет в относительном движении только три степени свободы. Попытка для такой модели реализовать движение (1.6) приводит к добавочным условиям на параметры модели, в силу которых модель вырождается в уже знакомый математический маятник на невесомых ногах. Таким образом для реализации движения (1.6) центра масс «не маятниковой» модели необходимо, чтобы модель содержала более, чем одно твердое тело.

2. Проведем анализ уравнения поперечных колебаний. В [3] рассматривалось уравнение типа третьего уравнения (1.6) и был указан его первый интеграл. В рассматриваемом здесь случае этот интеграл имеет вид

$$\theta' = \pm \frac{(F(\theta) + c)^{1/2}}{\Phi(\theta)}, \quad F(\theta) = 2 \int_0^\theta \Phi(\theta) (y_0 + \sin \theta) d\theta, \quad c = \text{const} \quad (2.1)$$

Приведем явное выражение функции $F(\theta)$:

$$F(\theta) = 3y_v \theta - 2 \cos \theta + 2y_v (h \sin \theta - y_v \cos \theta) - \frac{1}{2} (h \cos 2\theta + y_v \sin 2\theta)$$

Интеграл (2.1) позволяет при $y_v = \text{const}$ провести полный анализ фазовых траекторий $\theta'(c, \theta)$. (Для системы твердое тело на невесомых ногах такое исследование было выполнено в [3, 4].)

Положим $\theta \in [-2\pi; 0]$, $y_v = \delta > 0$. В зависимости от значений параметров δ , h , где δ — горизонтальный сдвиг точки опоры подвеса ног относительно точки опоры, h — расстояние от точки подвеса ног до опорной плоскости, получим различные типы фазовых портретов третьего уравнения (1.6). Отметим их главные свойства.

При $\delta \leq 1$ уравнение имеет стационарное решение $\sin \theta_0 = -\delta$. Нижнее положение равновесия $\theta = \theta_{01}$ ($\cos \theta_{01} < 0$) устойчиво, если $(\delta^2 + h^2)^{1/2} < 1$, и неустойчиво в противном случае, а верхнее положение равновесия $\theta = \theta_{02}$ ($\cos \theta_{02} > 0$) всегда неустойчиво.

Далее, если $(\delta^2 + h^2)^{1/2} \geq 1$, то знаменатель в (2.1) обращается в нуль при $\theta = \theta^*$, где θ^* определяется из уравнения $\Phi(\theta^*) = 1 + h \cos \theta^* + \delta \sin \theta^* = 0$. Последнее уравнение имеет два решения $\theta_{1,2}^* \in [-3\pi/2; -\pi/2]$ и $\theta_{2,2}^* \in [-\pi; 0]$, определяемых формулами $\sin \theta_{1,2}^* = (-\delta + h(\delta^2 + h^2 - 1)^{1/2}) / (\delta^2 + h^2)$, $\cos \theta_{1,2}^* = (-h \mp \delta(\delta^2 + h^2 - 1)^{1/2}) / (\delta^2 + h^2)$. В точках разрыва модуль $|\theta'|$ угловой скорости (2.1) и модуль опорной реакции (1.6) неограниченно велики. Между тем в случае $\delta > 1$ существует такое значение константы $c = c_*$, при котором значение угловой скорости в точке разрыва $\theta_{2,2}^*$ конечно: $\theta'(c_*, \theta_{2,2}^*) = \pm (\cos \theta_{2,2}^*)^{1/2}$. Соответствующая фазовая кривая должна быть непрерывна при $\theta = \theta_{2,2}^*$.

Точки θ_0 , θ^* определяют вид фазовых траекторий. Плоскость параметров (δ, h) разбивается на три области (1, 2, 3), каждой из которых соответствует качественно новый вид фазового портрета. Это разбиение представлено на фиг. 2. На фиг. 3 представлены фазовые портреты, отвечающие соответствующим областям.

На фиг. 3, а $(\delta^2 + h^2)^{1/2} < 1$. Существуют две стационарные точки: устойчивая θ_{01} и неустойчивая θ_{02} ; устойчивая точка соответствует положению центра масс ниже опорной поверхности.

На фиг. 3, б $(\delta^2 + h^2)^{1/2} \geq 1$, $\delta \leq 1$. Две неустойчивые стационарные точки и две точки разрыва.

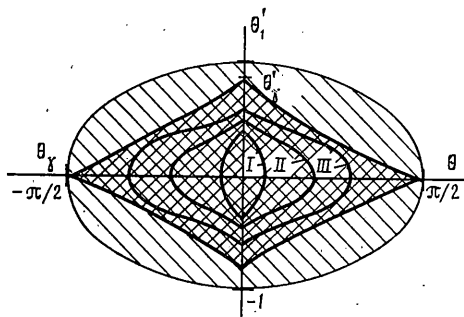
На фиг. 3, в $(\delta^2 + h^2)^{1/2} > 1$, $\delta > 1$. Две точки разрыва, стационарных точек нет. Существует кривая, непрерывная при $\theta = \theta_{2,2}^*$.

Заметим, что в действительном движении вертикальная составляющая реакции должна быть положительна: $R_z = (R/r)(h + \cos \theta) > 0$. Это означает, что аппарат испытывает лишь отталкивающее действие поверхности (не снабжен «присосками»). Центр масс аппарата должен двигаться выше поверхности опоры: $h + \cos \theta > 0$. С учетом последнего условия и первого выражения (1.6) выделим на фазовой плоскости области безотрывного движения

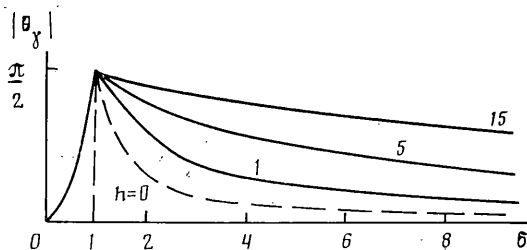
$$(\cos \theta - \theta'^2) / \Phi(\theta) > 0, h + \cos \theta > 0 \quad (2.2)$$

Области (2.2) заштрихованы на фиг. 3, а–в. Только эти области отвечают действительному движению. Ни одна фазовая траектория (фиг. 3) не содержится целиком в (2.2). Аппарат не может неограниченно долго стоять на одной ноге, так как за конечное время вертикальная составляющая реакции становится отрицательной (опорная нога отрывается от поверхности и аппарат должен упасть). Чтобы этого не случилось, нужно вовремя сменить точку опоры, т. е. организовать собственно процесс ходьбы (а не стояния).

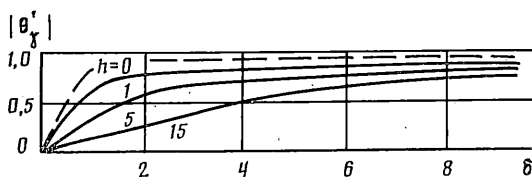
3. Опишем, как строятся непрерывные периодические колебания центра масс при ходьбе на месте. Предположим, что аппарат переминается с ноги на ногу, не продвигаясь вдоль оси ОХ. В частности, в формулах (1.3), определяющих следуюшую дорожку, положим, что длина шага L равна нулю, а ширина $2d$ отлична от нуля. В безразмерных переменных следовая дорожка будет определяться формулами $x_v = 0$, $y_v = (-1)^{v-1} \delta$, $z_v = 0$ ($v = 1, 2, \dots$). Здесь $\delta > 0$, $2\delta = \text{const}$ — безразмерная ширина дорожки.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Фазовые портреты поперечного движения центра масс при $y_v = \delta$ (аппарат стоит на левой ноге) изображены на фиг. 3, *a-c*. При $y_v = -\delta$ (опора на правую ногу) фазовые портреты симметричны приведенным на фиг. 3 относительно оси $\theta = 0$. Представим фазовые портреты склеенного следующим образом движения: при $y_v = \delta$, $\theta \in [-\pi/2; 0]$, при $y_v = -\delta$ $\theta \in [0; \pi/2]$. Из фиг. 3 видно, что на всех трех типах склеенных портретов будут существовать замкнутые фазовые траектории — траектории периодических колебаний центра масс около верхнего вертикального положения $\theta = 0$. Примеры таких траекторий для $\delta = 1$, $h = 1$ приведены на фиг. 4.

Можно показать, что при любых δ , h траектории колебаний принадлежат области (2.2) безотрывного движения. Это означает, что в течение первого шага ($y_1 = \delta$) аппарат безотрывно опирается на левую ногу. Заданное положение ноги обеспечивается межзвенными управлениями и вызывает компенсирующее движение, при котором центр масс, совершив наклон влево ($\theta \in [-\pi/2; 0]$), возвращается в исходное ($\theta = 0$) положение. При $\theta = 0$ аппарат меняет опорную ногу. В течение второго шага ($y_2 = -\delta$) центр масс совершает симметричный наклон вправо ($\theta \in [0; \pi/2]$), далее движение повторяется. Смена опорной ноги при $\theta = 0$ осуществляется за счет мгновенного переключения управлений.

4. Область склеенной фазовой плоскости, внутри которой строятся периодические колебания, назовем областью управляемости. Если аппарат получает толчок, приводящий к возмущениям θ и θ' , то он имеет возможность снова выйти на периодический режим с верхним положением центра масс в том, и только том случае, когда новые (возмущенные) значения угла $\theta + d\theta$ и угловой скорости $\theta' + d\theta'$ лежат внутри области управляемости. На фиг. 4 область управляемости отмечена двойной штриховкой. Подчеркнем, что она всегда принадлежит области безотрывного движения $R_z > 0$.

Введем обозначение $\theta_1 \in [-\pi/2; 0]$, где θ_1 (в зависимости от ширины дорожки) — либо особая точка, либо точка разрыва:

$$\begin{aligned} \theta_1 = \theta_{02} &= -\arcsin \delta \text{ при } \delta \leq 1 \\ \theta_1 = \theta_2^* &= -\arcsin \frac{\delta + h(\delta^2 + h^2 - 1)^{1/2}}{\delta^2 + h^2} \text{ при } \delta > 1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Границей области управляемости служит замкнутая траектория $\pm\theta'(\pm c_1, \theta)$, проходящая через точку $(\pm\theta_1, 0)$. Размеры области зависят от ширины следовой дорожки 2δ , высоты h и характеризуются величинами $|\theta_1|$, $|\theta_1'| = |\theta'(c_1, 0)|$.

Зависимость $|\theta_1(\delta, h)|$ приведена на фиг. 5. Из (4.1) следует, что $|\theta_1| \leq \pi/2$ при любых δ, h . Особое значение имеет $\delta=1$, при котором область управляемости имеет максимальный (один и тот же для любых h) размер по допустимому угловому отклонению: $|\theta_1| = \pi/2$ (фиг. 5). Значению $\delta=1$ соответствует равенство $\rho=d$, т. е. расстояние от точки подвеса ног аппарата до его центра масс равно полуширине следовой дорожки. Заметим, что для «среднестатистического» человека и нормальной его ходьбы $\rho \approx 0,1$ м, $d \approx 0,1$ м, так что $\delta \approx 1$. Это позволяет предположить, что ширину следовой дорожки в нормальном режиме ходьбы человек выбирает так, чтобы обеспечить максимальный размер области управляемости по поперечному смещению центра масс.

Назовем следовые дорожки, для которых $\delta \leq 1$ — узкими, а для которых $\delta > 1$ — широкими. Из (4.1) следует, что на очень узких ($\delta \rightarrow 0$) и очень широких ($\delta \rightarrow \infty$) дорожках максимальная амплитуда колебания центра масс мала: при $\delta \rightarrow 0$ или $\delta \rightarrow \infty$ имеем $\theta_1 \rightarrow 0$ (фиг. 5). На узких следовых дорожках слишком большие отклонения центра масс $d\theta$, $|\theta + d\theta| > |\theta_1|$ приводят к раскрутке центра масс, что в свою очередь ведет к отрыву опорной ноги от поверхности, на широких — к попаданию центра масс в критическое положение $\pm\theta_2^*$ и отрыву опорной ноги. Если дорожка широкая, увеличение высоты h при неизменном δ позволяет увеличить амплитуду колебаний (фиг. 5).

На фиг. 6 приведена зависимость $|\theta_1'(\delta, h)|$. Значения δ_1' получены из (2.1), где постоянная c_1 определена из условия $\theta' = 0$ при $\theta = \theta_1$:

$$\theta_1' = \pm (-F(\theta_1))^{1/2} / \Phi(0) \quad (4.2)$$

Из (4.2) следует, что $|\theta_1'| < 1$. Из (4.1), (4.2) получим, что при $\delta \rightarrow \infty$ $|\theta_1| \rightarrow 1$ — область управляемости по угловой скорости имеет максимальную ширину лишь при бесконечно большом значении δ (фиг. 6). Иначе говоря, чтобы компенсировать большие поперечные импульсные толчки, нужно ставить ноги как можно шире. Импульсы $d\theta'$, $|\theta' + d\theta'| > 1$ вообще некомпенсируемы: аппарат, получив такой толчок идти не сможет — упадет. Критической величине $|\theta'| = 1$ отвечает при $\rho = 10$ см размерное значение $|d\theta/dt| = 10$ рад/с, т. е. допустимые возмущения по угловой скорости довольно велики.

5. В силу того что в рассматриваемой модели поперечное движение аппарата не зависит от продольного, замкнутые фазовые траектории изображают колебания центра масс не только при ходьбе аппарата на месте (топтании), но и при обычной поступательной ходьбе. Напомним, что одно поперечное колебание, отвечающее замкнутой траектории на склеенной фазовой плоскости совершается в течение двух шагов.

Обозначим τ_k — время одного шага. Зададим амплитуду колебаний $|\theta_n|$, $\theta_1 < \theta_n < 0$. Из (2.1) получим формулу для периода колебаний:

$$2\tau_k = 4 \int_0^{\theta_n} \Phi(\theta) / (F(\theta) - F(\theta_n))^{1/2} d\theta \quad (5.1)$$

Из (5.1), (2.1) следует, что период — монотонно возрастающая функция амплитуды — построенные колебания неизохронны (при малых амплитудах τ_k зависит от θ_n линейно).

Заметим, что для узких следовых дорожек период колебаний — неограниченная функция θ_n : при $\theta_n \rightarrow \theta_\gamma$, где $\theta_\gamma = \theta_{02}$ — стационарная точка, из (5.1) получим $\tau_k \rightarrow \infty$. Если дорожка широкая, то аппарат может стоять на одной ноге строго ограниченное время.

На фиг. 4 приведены примеры фазовых траекторий периодических движений для $\delta=1$, $h=1$. Траекториям I, II, III соответствуют разные значения параметров колебаний: I траектории — значения $|\theta_n|=0,32$, $2\tau_k=4,98$; II траектории — $|\theta_n|=0,78$, $2\tau_k=9,76$; III — $|\theta_n|=1,10$, $2\tau_k=14,32$. Безразмерные периоды связаны с размерными формулой $t_k = (\rho/g)^{1/2} \tau_k$. Если в качестве оценочных значений положить $\rho=0,1$ м, $g \approx 10$ м/с², то значения $2\tau_k$ после деления на 10 дадут период $2t_k$ двойного шага в с.

6. Опишем процесс организации пространственной ходьбы аппарата в направлении оси OX . Зададим следовую дорожку безразмерными формулами, отвечающими размерным (1.3): $x_v = x_{v-1} + l$, $y_v = (-1)^{v-1} \delta$, $z_v = 0$, $x_0 = -l$ ($v=1, 2, \dots$). Здесь $l > 0$, $l = \text{const}$ — безразмерная длина шага ($l = L/\rho$). Поскольку уравнение (1.6) продольного движения зависит от уравнения поперечных колебаний, для построения движения необходимо знать закон $\theta(\tau)$.

Пусть задана амплитуда колебаний $|\theta_n|$, $\theta_\gamma < \theta_n < 0$, движение начинается в момент $\tau=0$, период колебаний $2\tau_k$ вычисляется по формуле (5.1). Чтобы получить закон поперечного движения при $\tau \in [0; 2\tau_k]$, достаточно проинтегрировать третье уравнение (1.6) на интервале $[\tau_k/2; \tau_k]$ с начальными условиями $\theta(\tau_k/2) = \theta_n$, $\theta'(\tau_k/2) = 0$ и продолжить решение на интервал $[0; 2\tau_k]$ с учетом симметрии фазовых траекторий.

Для построения продольного движения надо, вообще говоря, решить для второго уравнения (1.6) на интервале $[0; \tau_k]$ задачу с краевыми условиями $x(\tau_k) = x(0) + l$, $x'(0) = x'(\tau_k)$ и продолжить решение на интервал $[0; (v+1)\tau_k]$, учитывая, что

$$x(\tau + v\tau_k) = x(\tau) + vl, \quad \tau \in [0; \tau_k], \quad v=1, 2, \dots \quad (6.1)$$

Однако, наличие в уравнении (1.6) при x коэффициента, являющегося четной функцией относительно $\tau_k/2$, позволяет заменить краевую задачу задачей Коши на интервале $[\tau_k/2; \tau_k]$ с начальными условиями: $x(0) = 0$, $x'(0) = v_n$, где $v_n = \text{const}$ — продольная скорость центра масс в середине шага. Решение задачи Коши нужно продолжить на интервал $[0; \tau_k]$ с учетом условия $x(\tau) = -x(\tau_k - \tau)$, а затем с учетом (6.1) на любые v шагов ходьбы ($v=1, 2, \dots$).

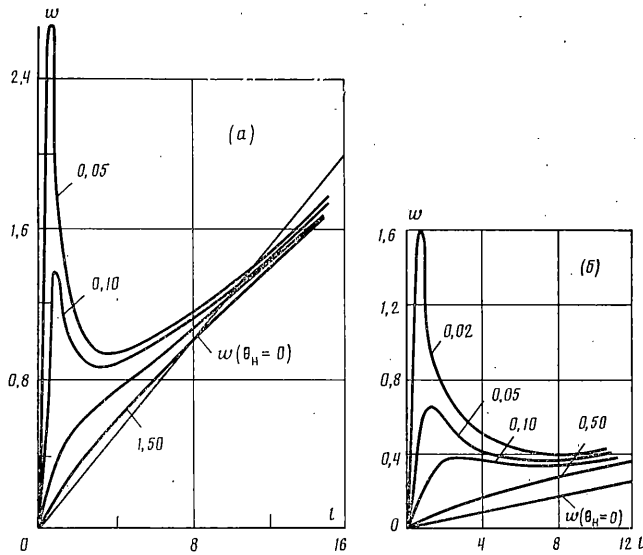
Следуя описанному алгоритму, можно построить пространственную ходьбу двуногого шагающего аппарата для любых значений параметров походки $\delta > 0$, $h > 0$. Напомним, что 2δ — безразмерная ширина следовой дорожки, h — безразмерная высота точки подвеса ног аппарата. Аппарат шагает вдоль оси OX , ставя ноги по обе стороны этой оси и наклоняясь на каждом шаге в сторону опорной ноги. В качестве начальных данных ходьбы задаются амплитуда поперечных колебаний $|\theta_n|$ и продольная скорость v_n центра масс в середине шага.

При $\delta=0$ пространственная ходьба вырождается в плоскую. Центр масс в такой ходьбе не колеблется ($\theta_n=0$, $\theta(\tau)=0$), а движется прямолинейно, строго над точкой подвеса ног на высоте $h+1$. Время шага τ_k , либо длина l задаются как независимые переменные наряду со скоростью v_n .

7. Исследуем энергетику построенной ходьбы. Будем пренебрегать энергетикой движения аппарата относительно центра масс². Для оценки безразмерных энерготрат по перемещению центра масс на единицу пути воспользуемся функционалом [5]:

$$w = \frac{1}{l} \int_0^{\tau_k} |R_x x' + R_y y' + R_z z'| d\tau \quad (7.1)$$

² См. Белецкий В. В., Бологин Ю. В., Голубицкая М. Д. Модельные задачи энергетики и динамики ходьбы и бега двуногих устройств: Препринт № 118. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1981. 28 с.



Фиг. 7

Наложенные на движение связи позволяют представить функционал (7.1) как сумму удельных энергозатрат на перемещение центра масс в продольном и поперечном направлениях:

$$w = w_x + w_\theta, \quad w_x = 1/l(v_k'^2 - v_n'^2), \quad (7.2)$$

$$w_\theta = 1/l(\theta_k'^2 - 4 \sin^2 \theta_k/2)$$

Здесь обозначены θ_k' , v_k' — соответственно угловая и продольная скорости центра масс в конце шага. Значение θ_k' для заданных начальных данных вычисляется по формуле (2.1): $\theta_k' = (F(\theta_n))^{1/2}/(1+h)$, значение v_k' — путем численного интегрирования на ЭВМ уравнения (1.6) продольного движения.

В случае плоской ходьбы ($\delta=0$, $\theta_n=0$, центр масс движется на высоте $h+1$) имеем $w_\theta=0$. Из (7.1), (1.4), (1.6) получим $w(\theta_n=0) = w_x = 1/2l(h+1)$ — удельный расход энергии в этом случае линейно зависит от длины шага и не зависит от скорости движения.

Для пространственной ходьбы вычисления функционала (7.2) производились на ЭВМ. На фиг. 7 представлены графики зависимости удельных энергозатрат w от длины шага l при различных фиксированных значениях продольной скорости v_n : на фиг. 7, а — для ходьбы с низким расположением точки подвеса ног ($\delta=1$, $h=1$), на фиг. 7, б — для антропоморфной ходьбы ($\delta=1$, $h=10$). Указаны значения безразмерных скоростей v_n . Размерные значения вычисляются по формулам: $d = \rho h$, $W = Mgw$, $V_n = (\rho g)^{1/2} v_n$, $L = \rho l$. Если в качестве оценочных взять значения: $M = 70$ кг, $\rho = 0,1$ м, $g = 10$ м/с², то для фиг. 7, а $d = 0,1$ м, $H = 0,1$ м, для фиг. 7, б $d = 0,1$ м, $H = 1$ м, остальные величины приобретают размерные коэффициенты: $W = 700$ Дж/м шаг, $V_n = 1$ м/с v_n , $L = 0,1$ м l . Для сравнения на фиг. 7 приведены графики прямых $w(\theta_n=0)$ при тех же значениях h .

Различия между энергетическими характеристиками пространственной и плоской ходьбы сильнее проявляются для модели с низким положением центра масс. Рассмотрим сначала эту модель. Из фиг. 7, а видно, что в пространственной ходьбе энергозатраты зависят от скорости. Быстрая ходьба менее энергоемка, чем медленная. При небольших длинах шага для любых значений v_n плоское движение выгоднее пространственного. С увеличением l зависимость энергозатрат от скорости ослабевает. При достаточно большой длине шага пространственная ходьба становится выгоднее плоской.

Поведение кривых на фиг. 7, а объясняется следующим образом. Время шага τ_k , полностью определяемое его длиной l и скоростью поступательного движения v_n однозначно определяет амплитуду колебаний

$|\theta_n|$. Поскольку $\tau_k \sim l/v_n$, а $|\theta_n|$ монотонно возрастает с увеличением τ_k , то при фиксированном l медленные движения осуществляются с большей раскачкой центра масс и требуют больших затрат w_0 , чем быстрые.

Из фиг. 7, а видно, что при небольших скоростях движения энергетическая кривая имеет локальные экстремумы. Это позволяет выбрать шаг конечной длины l_* , отвечающий локальному минимуму энергетики. Абсолютный минимум, как видно из рисунка, равен нулю и отвечает режиму движения с нулевой длиной шага и нулевой амплитудой колебаний центра масс. Энергетические пики на фиг. 7, а отвечают походкам с относительной большой амплитудой поперечных колебаний и малым шагом.

С увеличением l непосредственное влияние поперечных колебаний на энергетику движения уменьшается. Из (7.2) следует, что $0 < w_0 < 1/l$, при $l \rightarrow 0$ $w_0 \rightarrow 0$, $w \rightarrow w_k$. Однако, как уже отмечалось, влияние поперечных колебаний на продольное движение центра масс приводит к снижению энерготрат в сравнении с плоским движением (фиг. 7, а). Для каждого значения v_n , начиная с некоторого $l_0(v_n)$, $w < w(\theta_n = 0)$. Расчет показал, что для любых v_n величина $l_0(v_n)$ в несколько раз превосходит h . Таким образом, при движениях с малой в сравнении с длиной шага высотой точки подвеса ног расход энергии можно уменьшить за счет введения пространственной следовой дорожки и поперечных колебаний центра масс.

Описанные выше свойства пространственного движения имеют место и для антропоморфной модели (фиг. 7, б). Удельные энерготраты в этом случае меньше, чем при ходьбе с низким расположением центра масс. Размерные значения энергетических характеристик движения вполне соответствуют опубликованным данным [6] для ходьбы человека. Так, для аппарата массы $M = 70$ кг, при скорости $V_n = 1,5$ м/с и длине шага $L = 0,8$ м затраты энергии на перемещение центра масс составляют $W = 140$ Дж/м. Как и в предыдущей модели, значительное увеличение l приводит к экономии энергии пространственной ходьбы в сравнении с плоской. Однако, этот эффект проявляется при очень больших, не свойственных человеку длинах шага: $l_0 = 70-100$ ($L_0 = 7-10$ м) и поэтому не отражен на фиг. 7, б.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В. В. Двухногая ходьба — модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 286 с.
2. Ларин В. Б. Управление шагающими аппаратами. Киев: Наук. думка, 1980. 168 с.
3. Белецкий В. В., Лавровский Э. К. О задаче стояния шагающего аппарата. ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 591—601.
4. Белецкий В. В., Голубицкая М. Д. Плоские режимы стояния и ходьбы на месте двухногого шагающего аппарата. ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 226—237.
5. Белецкий В. В., Бологин Ю. В. Модельная оценка энергетики двухной ходьбы и бега. Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 89—94.
6. Зацюрский В. М., Алешинский С. Ю., Якунин Н. А. Биомеханические основы выносливости. М.: Физкультура и спорт, 1982. 207 с.

Москва, Свердловск

Поступила в редакцию
16.XII.1983