

УДК 531.383

© 1990 г.

С. А. БЕЛИКОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Рассматривается движение неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе в центральном ньютоновском поле сил с учетом масс колец подвеса. Получена функция Гамильтона, задающая канонические уравнения движения. Последние допускают частное решение, на котором срединная плоскость наружного кольца перпендикулярна направлению от центра тяготения S к неподвижной точке O , срединная плоскость внутреннего кольца содержит это направление, а гироскоп вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси SO . Осуществлен переход к приведенной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы и получено разложение гамильтониана в окрестности соответствующего положения равновесия с точностью до членов четвертого порядка. Различаются случаи знакоопределенности и знакопеременности функции Гамильтона. В первом случае указанные равномерные вращения гироскопа устойчивы, во втором произведена нормализация гамильтониана. Рассмотрены нерезонансная ситуация и резонансы второго и четвертого порядков (резонанс первого порядка не имеет места). Получены достаточные условия устойчивости равномерных вращений гироскопа в кардановом подвесе в виде ограничений на коэффициенты нормальных форм и окончательно — на исходные параметры рассматриваемой системы. Для наглядной интерпретации результатов проанализирован частный случай, когда фиксированы значения всех параметров, кроме двух. Построены плоская область необходимых условий устойчивости и резонансные кривые, с использованием ЭВМ исследована устойчивость на них.

Устойчивость равномерных вращений гироскопа в кардановом подвесе в однородном поле сил тяжести и случае знакоопределенности функции Гамильтона исследована в [1].

1. Функция Гамильтона. Рассмотрим движение тяжелого динамически симметричного неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе с учетом масс колец подвеса. Движение происходит в ньютоновском поле сил с центром S при приближенном рассмотрении этого поля [2]. Кольца подвеса и гироскоп считаются твердыми телами, которые вращаются в абсолютно гладких подшипниках. Оси вращения наружного кольца (рамы) и внутреннего кольца (кожуха), а также гироскопа (ротора) и кожуха перпендикулярны. Перечисленные направления пересекаются в неподвижной точке O гироскопа. Пусть вращение каждого кольца подвеса происходит вокруг одной из главных осей инерции соответствующего кольца, вращение гироскопа — вокруг оси динамической симметрии, совпадающей с главной осью инерции кожуха. Предполагается, что центр масс рамы лежит на неподвижной оси ее вращения, перпендикулярной направлению SO , центр масс P системы кожух — гироскоп расположен на оси симметрии ротора.

Введем в рассмотрение две следующие ортогональные правые системы координат. Система $OXYZ$ жестко связана с неподвижной платформой, OX проходит через центр тяготения S , OZ — по неподвижной оси инерции рамы. Система $O\xi\eta\zeta$ жестко связана с кожухом, ее оси направлены вдоль главных осей инерции кожуха и гироскопа, $O\xi$ и $O\zeta$ проходят соответственно по осям вращения внутреннего кольца и ротора. Считаем, что в начальном положении срединные плоскости колец подвеса совпадают и содержат направление SO . Текущее положение рассматриваемой системы относительно неподвижной платформы будем определять углами Эйлера ψ , θ , φ — углами поворота рамы, кожуха и ротора соответственно.

Функция Гамильтона, задающая канонические уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе, имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \{ (A+A_1)^{-1} p_\theta^2 + ((A+B_1) \sin^2 \theta + C_1 \cos^2 \theta + A_2)^{-1} \times \\ \times (p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2 + C^{-1} p_\varphi^2 \} + Mg \xi_0 \sin \psi \sin \theta + 3g (A_1 \cos^2 \psi + \\ + B_1 \sin^2 \psi \cos^2 \theta + (C+C_1-A) \sin^2 \psi \sin^2 \theta) / (2R) \quad (1.1)$$

Здесь $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ — обобщенные импульсы, соответствующие координатам ψ, θ, φ ; A и C — экваториальный и полярный моменты инерции гироскопа для точки O ; A_1, B_1, C_1 — главные моменты инерции кожуха для точки O ; A_2 — момент инерции рамы относительно оси OZ ; M — масса системы внутреннее кольцо — ротор, g — ускорение силы тяжести в точке O , ξ_0 — координата центра масс P по оси $O\xi$, R — расстояние между точками S и O .

2. Постановка задачи. Разложение гамильтониана приведенной системы. Канонические уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе с функцией Гамильтона (1.1) допускают частное решение

$$p_\psi = 0, \quad p_\theta = 0, \quad p_\varphi = C\omega' \quad (2.1)$$

$$\psi = \pi/2, \quad \theta = \pi/2, \quad \varphi = \omega' t + \varphi_0$$

На этом решении срединная плоскость рамы перпендикулярна направлению SO , срединная плоскость кожуха содержит SO , а гироскоп вращается с постоянной угловой скоростью ω' вокруг оси SO . Координата φ — циклическая, поэтому приведенная система имеет две степени свободы.

Исследуем устойчивость стационарных движений (2.1) гироскопа в кардановом подвесе относительно $p_\psi, p_\theta, \psi, \theta, p_\varphi$ при параметрических возмущениях [3] конструктивных параметров колец подвеса и ротора. Анализ устойчивости связан с рассмотрением функции Гамильтона в окрестности движений (2.1).

Полагаем $p_\psi = x_1', p_\theta = x_2', \psi = \pi/2 + y_1', \theta = \pi/2 + y_2'$ и находим разложение функции Гамильтона приведенной системы в окрестности положения равновесия, соответствующего равномерным вращениям (2.1), с точностью до членов четвертого порядка относительно возмущений x_1', x_2', y_1', y_2' . Вводим новые безразмерные переменные x_1, x_2, y_1, y_2 , время τ , угловую скорость ω и параметры $a, a_1, b_1, c_1, a_2, e, \delta$ по формулам

$$x_i' = (CMg|\xi_0|)^{1/2} x_i, \quad y_i' = y_i \quad (i=1, 2), \quad t = (Mg|\xi_0|/C)^{-1/2} \tau \\ \omega' = (Mg|\xi_0|/C)^{1/2} \omega, \quad a = A/C, \quad a_1 = A_1/C, \quad b_1 = B_1/C \\ c_1 = C_1/C, \quad a_2 = A_2/C, \quad e = \text{sign } \xi_0, \quad \delta = C(RM|\xi_0|)^{-1}$$

Получаем разложение гамильтониана приведенной системы в виде

$$H = H_2 + H_4 + \dots \quad (2.2)$$

$$H_k = \sum_{|\mathbf{v}|=k} h_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4} x_1^{\mathbf{v}_1} x_2^{\mathbf{v}_2} y_1^{\mathbf{v}_3} y_2^{\mathbf{v}_4} \quad (k=2, 4)$$

где $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4$ — целые неотрицательные числа, $|\mathbf{v}| = \sum \mathbf{v}_i$ ($i=1, \dots, 4$). Отличные от нуля коэффициенты $h_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4}$ таковы

$$2h_{2000} = e_1, \quad h_{1001} = \omega e_1, \quad 2h_{0200} = e_2, \quad 2h_{0020} = h_1 \quad (2.3)$$

$$2h_{0002} = \omega^2 e_1 + h_2, \quad 2h_{2002} = (a + b_1 - c_1) e_1^2$$

$$6h_{1003} = \omega(5a + 5b_1 - 6c_1 - a_2) e_1^2, \quad 2h_{0040} = e/12 - \delta(a - 1 + a_1 - c_1)$$

$$2h_{0022} = e/2 - 3\delta(a - 1 + b_1 - c_1), \quad 2h_{0004} = \omega^2(2a + 2b_1 - 3c_1 - a_2) e_1^2 / 3 + \\ + e/12 - \delta(a - 1 + b_1 - c_1)$$

$$e_1 = (a + b_1 + a_2)^{-1}, \quad e_2 = (a + a_1)^{-1} \quad (2.4)$$

$$h_1 = -e + 3\delta(a - 1 + a_1 - c_1), \quad h_2 = -e + 3\delta(a - 1 + b_1 - c_1)$$

Замечание 2.1. Безразмерный параметр δ — малая величина, поскольку при приближенном рассмотрении центрального ньютоновского поля сил [2] предполагается, что расстояние R намного больше размеров гироскопа в кардановом подвесе. Например, если в качестве R взять радиус Земли $R=6,37 \cdot 10^6$ м, то для характерных диаметра экваториального сечения ротора порядка 5 м и расстояния $|\xi_0|$ между точками O и P порядка 10^{-1} м величина δ будет порядка 10^{-5} . Предельный случай $\delta=0$ соответствует однородному полю сил тяжести.

3. Необходимые условия устойчивости. Замечания. Рассмотрим область допустимых значений параметров

$$F = \{c = (\omega, a, a_1, b_1, c_1, a_2, \delta) : \\ a > 1/2, a_1 + b_1 > c_1, b_1 + c_1 > a_1, \\ c_1 + a_1 > b_1, a_2 > 0, \delta \text{ — малая положительная величина}\}.$$

Анализ характеристического уравнения показывает, что область необходимых условий устойчивости имеет вид

$$G = \{c : c \in F, Q_1 > 2\sqrt{Q_2}\} \quad (3.1) \\ Q_1 = \omega^2 e_1 e_2 + e_1 h_1 + e_2 h_2, \quad Q_2 = e_1 e_2 h_1 h_2$$

Замечания 3.1. Из выражения Q_2 (3.1), замечания 2.1 и обозначений (2.4) следует, что в области F всегда выполнено соотношение $Q_2 > 0$, равносильное условию $h_1 h_2 > 0$.

3.2. Неравенство, входящее в определение области G , не накладывает дополнительного ограничения на набор параметров c , если $h_1 > 0, h_2 > 0$. Следовательно, в этом случае $G=F$.

3.3. Детальный анализ области G при выполнении соотношений $h_1 < 0, h_2 < 0$ осуществляется ниже лишь в частном случае, поскольку исследуемая задача содержит большое число конструктивных параметров.

3.4. Функция Рауса, получаемая из гамильтониана (1.1) игнорированием циклической координаты φ , имеет линейные относительно обобщенных скоростей ψ, θ' члены R_1 и не зависящее от скоростей слагаемое R_0 (в общем случае структура функции Рауса приведена в [4]). Составляющая R_1 порождает гироскопические силы, R_0 является измененной силовой функцией. Величины h_1 и h_2 (2.4) есть коэффициенты устойчивости Пуанкаре (см. [5]), соответствующие измененной потенциальной энергии $-R_0$.

4. Достаточные условия устойчивости. Рассмотрим случай $h_1 > 0, h_2 > 0$. С учетом замечания 2.1 получаем, что указанные соотношения имеют место при $e=-1$. Это означает, что на стационарных движениях (2.1) центр масс P находится ближе к центру тяготения S , чем неподвижная точка O . Функция H_2 — знакоопределенная. Согласно теореме Рауса с дополнением Ляпунова (см. [6]) равномерные вращения (2.1) устойчивы при параметрических возмущениях [2] конструктивных параметров $c \in G$. Приведенный здесь результат при $\delta=0$ получен в [1] методом построения функции Ляпунова в виде связи первых интегралов уравнений возмущенных движений [5].

В дальнейшем рассмотрим случай $h_1 < 0, h_2 < 0$, реализующийся при $e=1$. Последнее означает, что на невозмущенных движениях (2.1) точка P расположена дальше от S , чем O . Функция H_2 является знакопеременной. В этой ситуации вопрос об устойчивости равномерных вращений (2.1) решается рассмотрением форм (2.2) порядка больше двух.

Замечание 4.1. Получаемые ниже достаточные условия устойчивости можно трактовать как достаточные условия стабилизации равновесия, соответствующего (2.1), гироскопическими силами, порождаемыми функцией R_1 (см. замечание 3.3). Возможность упомянутой гироскопической стабилизации отмечена в [1].

Частоты системы с гамильтонианом H_2 имеют вид

$$\beta_{1,2} = ((Q_1 \pm (Q_1^2 - 4Q_2)^{1/2})/2)^{1/2} \quad (4.1)$$

Рассмотрим резонансные гиперповерхности $R_{N+1} = \{c: c \in F, \beta_1(c) = -N\beta_2(c)\}$ ($N=1, 3$). Обращаясь к формулам (4.1), (3.1), получаем

$$\begin{aligned} R_2 \cap \partial G &= \{c: c \in F, \omega^2 = -h_1/e_2 - h_2/e_1 + 2(h_1 h_2 / (e_1 e_2))^{1/2}\} \\ R_4 \cap G &= \{c: c \in F, \omega^2 = -h_1/e_2 - h_2/e_1 + 10(h_1 h_2 / (e_1 e_2))^{1/2} / 3\} \end{aligned}$$

Приведем функцию Гамильтона к нормальной форме. Совершим линейное нормализующее симплектическое преобразование валентности v :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & c_1 & t_1 & d_1 \\ s_2 & c_2 & t_2 & d_2 \\ s_3 & c_3 & t_3 & d_3 \\ s_4 & c_4 & t_4 & d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

В переменных p_1, p_2, q_1, q_2 члены четвертого порядка в разложении (2.2) запишем в виде

$$vK_4 = \sum_{|v|=4} v g_{v_1 v_2 v_3 v_4} p_1^{v_1} p_2^{v_2} q_1^{v_3} q_2^{v_4} \quad (4.3)$$

Пусть $c \in G$. Элементы матрицы замены (4.2) таковы

$$\begin{aligned} s_1 &= (\beta_1^2 - e_2 h_2) h_1 g(\beta_1), & t_2 &= -\beta_1^3 \omega g(\beta_1) \\ t_3 &= \beta_1 (\beta_1^2 - e_2 h_2) g(\beta_1) \\ s_4 &= \beta_1^2 \omega e_2 g(\beta_1), & \beta_1 g^2(\beta_1) &= v [(\beta_1^2 - e_2 h_2)^2 h_1 + \beta_1^4 \omega^2 e_2]^{-1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Формулы для c_1, d_2, d_3, c_4 находятся из выражений для s_1, t_2, t_3, s_4 соответственно подстановкой $\beta_1 \rightarrow -\beta_2$. Остальные элементы матрицы преобразования (4.2) можем положить равными нулю. Валентность v линейной замены (4.2) определяется из условия вещественности этого преобразования, так что $v = \text{sign} [(\beta_1^2 - e_2 h_2)^2 h_1 + \beta_1^4 \omega e_2]$. Подстановка формул (4.1), (3.1), (2.4) в (4.4) дает окончательные выражения коэффициентов линейного нормализующего симплектического преобразования (4.2) через исходные параметры $c \in G$.

При нахождении коэффициентов $g_{v_1 v_2 v_3 v_4}$ формы (4.3), нужных для исследования устойчивости, воспользуемся формулами общего вида¹. Получаем

$$\begin{aligned} v g_{4000} &= s_1^2 s_4^2 h_{2002} + s_1 s_4^3 h_{1003} + s_4^4 h_{0004}, & v g_{0400} &= c_1^2 c_4^2 h_{2002} + c_1 c_4^3 h_{1003} + c_4^4 h_{0004} \\ v g_{0040} &= t_3^4 h_{0040}, & v g_{0004} &= d_3^4 h_{0040}, & v g_{2200} &= (s_1^2 c_4^2 + c_1^2 s_4^2 + 4s_1 c_1 s_4 c_4) h_{2002} + \\ &+ 3(s_1 s_4 c_4^2 + c_1 s_4^2 c_4) h_{1003} + 6s_4^2 c_4^2 h_{0004}, & v g_{2020} &= t_3^2 s_4^2 h_{0022}, \\ v g_{2002} &= d_3^2 s_4^2 h_{0022}, & v g_{0220} &= t_3^2 c_4^2 h_{0022}, & v g_{0202} &= d_3^2 c_4^2 h_{0022}, \\ v g_{0022} &= 6t_3^2 d_3^2 h_{0040}, & v g_{1300} &= 2(s_1 c_1 c_4^2 + c_1^2 s_4 c_4) h_{2002} + (s_1 c_4^3 + 3c_1 s_4 c_4^2) h_{1003} + \\ &+ 4s_4 c_4^3 h_{0004}, & v g_{0013} &= 4t_3 d_3^3 h_{0040} \\ v g_{1003} &= v g_{0310} = v g_{1201} = v g_{0112} = 0, & v g_{11c2} &= 2d_3^2 s_4 c_4 h_{0022}, \\ & & v g_{0211} &= 2t_3 d_3 c_4^2 h_{0022} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Пусть $c \in G \setminus R_4$. Коэффициенты нормальной формы [7] гамильтониана (2.2) — (2.4) имеют вид

$$\begin{aligned} 2c_{20} &= 3g_{4000} + 3g_{0040} + g_{2020}, & 2c_{02} &= 3g_{0400} + 3g_{0004} + g_{0200} \\ c_{11} &= g_{2200} + g_{2002} + g_{0220} + g_{0022} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Подстановка формул (4.5), (4.4), (4.1), (3.1), (2.3), (2.4) в (4.6) дает окончательные выражения коэффициентов c_{20}, c_{02}, c_{11} через исходные параметры. Если $D^0 \equiv c_{20} \beta_2^2 + c_{11} \beta_1 \beta_2 + c_{02} \beta_1^2 \neq 0$, согласно теореме

¹ Беликов С. А. К нормализации автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в задачах об устойчивости положений равновесия. — Деп. в ВИНТИ. 1985. № 4863-85 Деп. 49 с.

Арнольда — Мозера [7] и распространению ее на стационарные движения [8] равномерные вращения (2.1) устойчивы.

Пусть $c \in G \cap R_4$. Коэффициент при резонансном члене [9] записывается в форме

$$C_4 = 2 |g_{1300} + g_{0013} - g_{0211} - g_{1102}| \quad (4.7)$$

Подстановка формул (4.5), (4.4), (4.1), (3.1), (2.3), (2.4) в (4.7) дает окончательный вид коэффициента C_4 . Если $|D^0|/\beta_2^2 - 3\sqrt{3}C_4 > 0$, согласно теореме Маркеева [9] и распространению ее на стационарные движения [8] решение (2.1) устойчиво. При $|D^0|/\beta_2^2 - 3\sqrt{3}C_4 < 0$ согласно [9] оно неустойчиво.

Пусть теперь $c \in \partial G \cap R_2$. Элементы $s_2, s_3, c_1, c_4, t_1, t_4, d_2, d_3$ матрицы преобразования (4.2) можем положить равными нулю. Нужны для исследования коэффициенты s_1, c_2, c_3, s_4 даются формулами (4.4), в которых осуществлены подстановки $t_2 \rightarrow c_2, t_3 \rightarrow c_3, g(\beta_1) \rightarrow g, \beta_1 \rightarrow \beta = (Q_1/2)^{1/2}$. Довольно громоздкие выкладки показывают, что величина g выбирается из условия

$$2g^2 h_1 h_2 = v ((\beta^2 - e_2 h_2) e_2)^{-1} \quad (4.8)$$

Валентность v преобразования (4.2) определяется из условия вещественности, так что $v=1$. Подстановка формул (4.8), $\beta = (Q_1/2)^{1/2}$, (3.1), (2.4) в (4.4) дает окончательные выражения величин s_1, c_2, c_3, s_4 .

Найдем нужные для исследования устойчивости коэффициенты формы (4.3). Коэффициент vg_{4000} дается формулой (4.5), имеем также

$$vg_{0400} = c_3^4 h_{0040}, \quad vg_{2200} = c_3^2 s_4^2 h_{0022} \quad (4.9)$$

Обозначим

$$E = 3g_{4000} + 3g_{0400} + g_{2200} \quad (4.10)$$

Подстановка формул (4.9), (4.5), (4.4), (4.8), $\beta = (Q_1/2)$, (3.1), (2.3), (2.4) в (4.10) приводит к окончательному виду коэффициента F . Если $E > 0$, согласно теореме Ковалева — Чудненко — Сокольского [10, 11] и распространению ее на стационарные движения равномерные вращения (2.1) устойчивы. При $E < 0$ стационарные движения (2.1) неустойчивы [9].

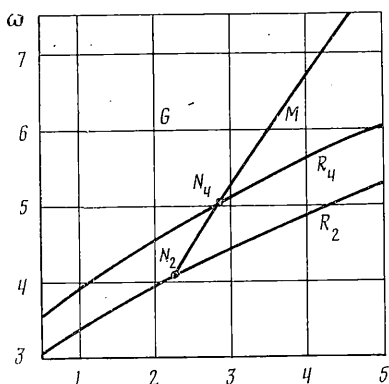
Замечания. 4.2. В случае $c \in \partial G \cap R_2$ определяющая матрица системы с гамильтонианом H_2 имеет непростые элементарные делители.

4.3. Слагаемые, входящие в (4.10), содержат общий положительный множитель g^4 , поэтому коэффициент E можно определять с точностью до указанного множителя.

4.4. В замечании 3.1 констатируется выполнение неравенства $Q_2 > 0$. Отсюда, в частности, следует, что в рассматриваемой задаче исключен случай нулевой частоты и область G не имеет границы, отличной от границы области F и рассмотренной выше гиперповерхности $R_2 \cap \partial G$.

5. Интерпретация условий устойчивости в частном случае. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости равномерных вращений (2.1) гироскопа в кардановом подвесе представлены в виде ограничений на коэффициенты нормальных форм функции Гамильтона. Найдены окончательные выражения коэффициентов нормальных форм через набор параметров c . Это позволяет рассматривать полученные необходимые и достаточные условия как ограничения (довольно громоздкого вида) на исходные параметры системы. Проверка выполнения перечисленных выше неравенств для коэффициентов (4.6), (4.7), (4.10) осуществлялась на ЭВМ. С целью наглядной интерпретации условий устойчивости и неустойчивости фиксируется часть величин из набора c . Результаты расчетов при $a_1=1, b_1=3/2, c_1=2, a_2=3/2, \delta=10^{-5}$ представлены на плоскости $\{a, \omega\}$.

На фигуре изображена область необходимых условий устойчивости G , ограниченная снизу кривой резонанса второго порядка R_2 . Кривая резонанса четвертого порядка R_4 и кривая изоэнергетической вырожденности в четвертом приближении M , на которой обращается в нуль величина D^0 , пересекают область G . Кривая R_2 для ньютоновского поля ($\delta=10^{-5}$) пе-



ресекает кривую R_2 для однородного поля ($\delta=0$) в точке с координатами (a_*, ω_*) , где $a_* \in [1,700; 1,715]$, $\omega_* \in [3,811113; 3,819125]$. Левее (соответственно, правее) этой точки R_2 ($\delta=10^{-5}$) расположена выше (соответственно, ниже), чем R_2 ($\delta=0$). Аналогичные выводы сделаны для R_4 ($\delta=10^{-5}$) и R_4 ($\delta=0$), причем $a_* \in [1,705; 1,715]$, $\omega_* \in [4,393359; 4,399570]$. Кривая M пересекает R_2 в точке N_2 (2,220; 4,082) и R_4 в точке N_4 (2,859; 5,056).

В области $G \setminus (R_4 \cup M)$ и на кривой R_2 правее точки N_2 равномерные вращения (2.1) устойчивы при параметрических возмущениях. На R_4 и на R_2 левее точки N_2 стационарные движения (2.1) неустойчивы. Для исследования устойчивости на M необходимо привлечь коэффициенты h_{v_1, v_2, v_3, v_4} $|\mathbf{v}|=6$ формы H_6 в разложении (2.2). Область G и кривые R_2, R_4, M изображены на фигуре при $\omega > 0$. Следует отметить, что имеет место симметрия относительно оси Oa .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. II // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 4. С. 499–503.
2. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
3. Кузьмин П. А. Устойчивость при параметрических возмущениях // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 1. С. 129–132.
4. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
6. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 922–933.
7. Арнольд В. И. Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 255–257.
8. Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. Киев: Наук. думка, 1977. 160 с.
9. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
10. Ковалев А. М., Чудненко А. Н. К устойчивости положения равновесия двумерной гамильтоновой системы в случае равных частот // Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. № 11. С. 1011–1014.
11. Сокольский А. Г. Доказательство устойчивости лагранжевых решений при критическом соотношении масс // Письма в Астрон. ж. 1978. Т. 4. № 3. С. 148–152.

Ленинград

Поступила в редакцию
11.IV.1989