

УДК 534.11

© 1990 г.

Л. Д. АКУЛЕНКО, С. А. МИХАЙЛОВ, С. В. НЕСТЕРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КОЛЕБАНИЙ ПОПЛАВКА В НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ ОТ ФОРМЫ ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

На основе разработанного Л. Н. Сретенским подхода [1, 2] и развитого авторами в [3, 4] численно-аналитического метода исследуется задача о вертикальных колебаниях симметричного тонкого твердого тела (поплавка) на границе раздела двух устойчиво стратифицированных жидкостей в поле сил тяготения. Жидкости предполагаются неограниченными, идеальными и несжимаемыми, а центр симметрии поплавка в состоянии нейтральной плавучести (гидростатического равновесия) находится на поверхности раздела. Исследование колебаний проводится на основе математического аппарата интегродифференциальных уравнений типа Вольтерры с разностными ядрами, которые медленно релаксируют. Рассмотрено пять различных двухпараметрических форм тела и проведено сравнение движений этих поплавков. Полученные результаты расчетов позволяют выявить ряд принципиально новых качественных эффектов.

1. Постановка задачи. На основе результатов [1, 2] авторами [3, 4] при помощи аналитических и численных методов исследована плоская задача о свободных колебаниях симметричного твердого тела (поплавка), находящегося на поверхности раздела двух тяжелых идеальных неограниченных жидкостей в случае их устойчивой стратификации. Предполагались выполненными ряд упрощающих условий относительно рассматриваемой гидродинамической модели: малость колебаний тела и жидкости (линейная теория), идеальность жидкости, симметричность тела по обеим осям и относительно малая ширина по сравнению с высотой, пренебрежимость торцевыми эффектами, начальное условие — состояние покоя и т. п. Кроме того, в этих работах рассматривалась специальная форма тела в плане (так называемое тело с «бесконечной осадкой»), что позволило продвинуть аналитические расчеты. В случае тела более общей формы исследование значительно усложняется и для конкретных форм требуется привлечение современных ЭЦВМ и соответствующего математического обеспечения [4].

Решение внешней задачи гидродинамики о волновых движениях двухслойной жидкости при заданном движении тела и вывод уравнения движения типа Ньютона для вертикальных колебаний поплавка приведены в [3]. Соответствующая интегродифференциальная задача Коши имеет вид

$$s'' + \Omega^2 s = -\lambda \int_0^t K(t-\tau) s'(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

$$s(0) = s^0, s'(0) = 0; 0 \leq t \leq T < \infty$$

Здесь $s = s(t)$ — смещение центра масс поплавка от положения гидростатического равновесия; s^0 — начальное смещение, Ω — «частота» колебаний, вычисленная с учетом присоединенной массы жидкости M_* , $\lambda > 0$ — параметр, $K(t)$ — ядро интегрального оператора, характеризующее взаимодействие колебаний тела и волновых движений жидкости. Для этих параметров и ядра имеем представления

$$\Omega^2 = 2\omega(0)g^*(\rho_1 + \rho_2)M^{-1}, \quad g^* = g(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 + \rho_2)^{-1}$$
$$M = M_0 + M_*, \quad \lambda = 4\alpha g^*(\rho_1 + \rho_2)M^{-1}$$

$$M_* = \frac{2\alpha}{\pi} (\rho_1 + \rho_2) \int_0^h \int_0^h \omega'(\beta) \omega'(y) \ln \left| \frac{y+\beta}{y-\beta} \right| d\beta dy \quad (1.2)$$

$$K(t) = \int_0^\infty R^2(k) \cos(\sqrt{g^* k} t) dk, \quad R(k) = - \int_0^h \omega'(y) e^{-ky} dy$$

в которых ρ_1, ρ_2 — плотности верхней и нижней жидкостей соответственно ($0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$), g^* — приведенное ускорение силы тяготения ($g^* > 0$); $\alpha M_0, \alpha M_*$ — погонные массы твердого тела и присоединенной жидкости; h — полувысота поплавка (в случае тела с бесконечной осадкой $h = \infty$; для него вводится понятие эффективной высоты h^* , см. [1–4] и далее). Числовой параметр α характеризует относительную толщину поплавка в сравнении с эффективной или геометрической высотой (длиной поплавка по вертикали); он фигурирует в выражении для формы границы сечения тела $x = x(y)$ плоскостью Oxy , в которой (по оси Oy) происходят колебания поплавка, т. е.

$$x = \pm \alpha \omega(y), \quad \omega(y) \equiv \omega(-y), \quad |y| \leq h < \infty \quad (1.3)$$

$$\omega(y) \equiv 0, \quad |y| \geq h; \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Значительную трудность для анализа решений задачи (1.4) представляет вычисление разностного ядра $K(t-\tau)$ согласно (1.2) в случае произвольной формы $\omega(y)$ (1.3). Сперва требуется вычислить функцию $R(k)$ для всех значений волнового числа $k, k \in [0, \infty)$, а затем несобственный интеграл $K(t)$ от быстро осциллирующей (для больших значений t) функции, что представляет значительные трудности как в аналитическом, так и численном аспектах.

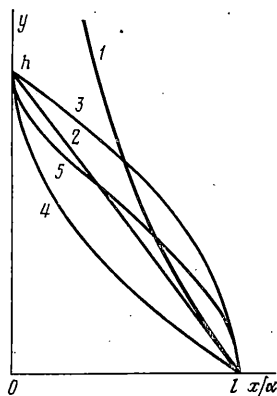
Решение задачи (1.4) может быть получено операционными методами [1–3, 5]. Однако операционные методы исследования колебаний поплавка оказываются неконструктивными, поскольку получающиеся при этом многократные несобственные интегралы (при вычислении функций $R(k), K(t)$, трансформант $K^*(p), s^*(p)$ и оригинала $s(t)$, а также коэффициента M_*) не поддаются табулированию и эффективному анализу. Получить представление о качественном поведении решения практически невозможно. Такой путь может быть полезен, например, при исследовании предельного движения поплавка для $t \rightarrow \infty$ [1–5].

Исследование переходных процессов колебаний поплавков различных форм требует привлечения численных методов и асимптотического анализа (при $\alpha \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$). Предполагается рассмотреть и сравнить колебания поплавков пяти различных двухпараметрических форм: $x = \pm \alpha \omega_n(y; l, \mu)$, $n=1, \dots, 5$ (см. фиг. 1), встречающихся в приложениях, для которых удастся вычислить аналитически выражения M_* и $R(k)$ (1.2) и др.¹

1. Тело с бесконечной осадкой (фиг. 1, кривая 1) (результаты получены в [3, 4] и кратко приводятся для сравнения); форма и основные характеристики имеют вид (см. (1.2), (1.3)):

$$\omega_1(y; l, \mu) = l e^{-\mu|y|}, \quad |y| < h = \infty, \quad h^* = \mu^{-1}$$

$$\Omega_1^2 = \nu^2 (1 + \kappa/2\pi)^{-1} \equiv \nu^2 \Omega_{1*}^2, \quad \nu^2 = g^*/h^*, \quad R_1(k) = l/(1 + \xi)$$



Фиг. 1

¹ Ниже частично используются результаты работы Акуленко Л. Д., Михайлова С. А., Нестерова С. В., Чайковского А. А. Внешняя задача гидродинамики двухслойной жидкости и колебания твердого тела. Препринт. № 314. М.: ИИМ АН СССР. 1987.

$$M_1 = 2lh^*(\rho_1 + \rho_2)(1 + \kappa/2\pi), \quad M_{01} = 1/2\Pi_1(\rho_1 + \rho_2)$$

$$M_{*1} = (\kappa/\pi)lh^*(\rho_1 + \rho_2), \quad \Pi_1 = 4lh^*, \quad \kappa = \alpha l\mu \ll 1$$

$$K_1(t) = l^2\mu \int_0^\infty \frac{\cos \sqrt{\xi} \theta}{(1+\xi)^2} d\xi = l^2\mu K_{1*}(\theta), \quad \theta = vt, \quad \xi = k/\mu = kh^*$$

Здесь $\alpha\Pi_1$ — площадь миделя (площадь поперечного сечения) тела; нижний индекс 1 отвечает номеру варианта (форме тела $\omega_1(y; \cdot)$).

2. Тело ромбовидной формы (фиг. 1, кривая 2); уравнение профиля и другие характеристики равны (см. (1.2), (1.3)):

$$\omega_2(y; l, \mu) = l(1 - \mu|y|), \quad |y| \leq h = \mu^{-1}$$

$$\Omega_2^2 = 2v^2 \left(1 + \frac{4 \ln 2}{\pi} \kappa \right)^{-1} = v^2 \Omega_{2*}^2, \quad R_2(k) = \frac{l}{\xi} (1 - e^{-\xi}) \quad (1.5)$$

$$M_2 = lh(\rho_1 + \rho_2)(1 + \kappa 4 \ln 2/\pi), \quad M_{02} = 1/2\Pi_2(\rho_1 + \rho_2)$$

$$M_{*2} = \kappa(4 \ln 2/\pi)M_{02}, \quad \Pi_2 = 2lh, \quad \kappa = \alpha l/h \ll 1$$

$$K_2(t) = l^2\mu \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} \right)^2 \cos \sqrt{\xi} \theta d\xi = l^2\mu K_{2*}(\theta), \quad \theta = vt, \quad \xi = k/\mu = kh$$

Соответствующие параметры и функции имеют индекс 2 внизу. Отметим, что $y=0$ является угловой точкой для $\omega_2(y; \cdot)$.

3. Тело чечевицеобразного профиля (фиг. 1, кривая 3); по формулам (1.2), (1.3) аналогично (1.4), (1.5) получим искомые характеристики (с индексом 3 внизу)

$$\omega_3(y; l, \mu) = l[1 - (\mu y)^2], \quad |y| \leq h = \mu^{-1}$$

$$\Omega_3^2 = \frac{3}{2} v^2 \left(1 + \frac{3}{\pi} \kappa \right)^{-1} = v^2 \Omega_{3*}^2, \quad R_3(k) = \frac{2l}{\xi^2} (1 - e^{-\xi} - \xi e^{-\xi}) \quad (1.6)$$

$$M_3 = lh(\rho_1 + \rho_2)(1 + 3\kappa/\pi), \quad M_{03} = 1/2\Pi_3(\rho_1 + \rho_2)$$

$$M_{*3} = (3\kappa/\pi)M_{03}, \quad \Pi_3 = (8/3)lh, \quad \kappa = \alpha l/h \ll 1$$

$$K_3(t) = 4l^2\mu \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-\xi} - \xi e^{-\xi}}{\xi^2} \right)^2 \cos \sqrt{\xi} \theta d\xi = 4l^2\mu K_{3*}(\theta), \quad \theta = vt, \quad \xi = k/\mu = kh$$

Отметим, что функция ω_3 и ее производная по y при $|y|=h$ равны нулю ($\omega_3(y; \cdot)$ — гладкая при $|y| < h$).

4. Тело ромбовидного вогнутого профиля (фиг. 1, кривая 4) имеет следующие характеристики (с индексом 4 внизу):

$$\omega_4(y; l, \mu) = l(1 - \mu|y|)^2, \quad |y| \leq h = \mu^{-1}$$

$$\Omega_4^2 = 3v^2 \left[1 + \kappa \frac{2}{\pi} (8 \ln 2 - 1) \right]^{-1} = v^2 \Omega_{4*}^2, \quad R_4(k) = \frac{2l}{\xi^2} (\xi + e^{-\xi} - 1) \quad (1.7)$$

$$M_4 = [1 + (2\kappa/\pi)(8 \ln 2 - 1)]M_{04}, \quad M_{04} = 1/2\Pi_4(\rho_1 + \rho_2), \quad \Pi_4 = (4/3)lh$$

$$M_{*4} = \kappa(2/\pi)(8 \ln 2 - 1)M_{04}, \quad ((2/\pi)(8 \ln 2 - 1) \approx 2,88)$$

$$K_4(t) = 4l^2\mu \int_0^\infty \left(\frac{\xi + e^{-\xi} - 1}{\xi^2} \right)^2 \cos \sqrt{\xi} \theta d\xi = 4l^2\mu K_{4*}(\theta), \quad (\theta) \theta = vt, \quad \xi = k/\mu = kh$$

Функция $\omega_4(y; \cdot)$ имеет угловую точку при $y=0$, аналогично $\omega_1(y; \cdot)$, $\omega_2(y; \cdot)$.

5. Тело яхтообразного профиля (фиг. 1, кривая 5) по характеристикам аналогично случаю 3 ($\omega_5(y; \cdot)$ гладкая при $|y| < h$); его движение описы-

ваются соотношениями

$$\omega_5(y; l, \mu) = l[1 - (\mu y)^2]^2, \quad |y| \leq h = \mu^{-1}$$

$$\Omega_5^2 = \frac{15}{8} \nu^2 \left(1 + \frac{10}{3\pi} \kappa\right)^{-1} \equiv \nu^2 \Omega_{5*}^2, \quad R_5(k) = \frac{4l}{\xi^2} \left[1 + 2e^{-\xi} + \frac{6}{\xi^2} (\xi e^{-\xi} - 1 + e^{-\xi})\right] \quad (1.8)$$

$$M_5 = (1 + (10/3\pi) \kappa) M_{05}, \quad M_{05} = 1/2 \Pi_5 (\rho_1 + \rho_2), \quad \Pi_5 = (32/15) lh$$

$$M_{*5} = (10/3\pi) \kappa M_{05}, \quad \kappa = \alpha l \mu \ll 1$$

$$K_5(t) = 16l^2 \mu \int_0^\infty \left[1 + 2e^{-\xi} + \frac{6}{\xi^2} (\xi e^{-\xi} - 1 + e^{-\xi})\right]^2 \frac{\cos \sqrt{\xi} \theta}{\xi^4} d\xi = 16l^2 \mu K_{5*}(\theta),$$

$$\theta = \nu t, \quad \xi = k/\mu = kh$$

Отметим, что при $|y|=h$ ($\omega_n=0$) тела $n=1, 5$ имеют бесконечно тонкое острие, а для $n=2, 3, 4$ углы в вершинах конечны. При $y=0$ ширина поплавок максимальна и для тел с $n=3, 5$ касательные вертикальны; для $n=1, 2, 4$ имеют место угловые точки.

Ставится задача исследования колебаний поплавков $n=1, \dots, 5$ (см. (1.4)–(1.8)) на основе численного решения задачи (1.1) при малых значениях параметра $\alpha \ll 1$ (и $\kappa \ll 1$). Интервал интегрирования должен быть выбран достаточно большим, чтобы эволюция колебаний, обусловленная малым взаимодействием колебаний тела и волновых движений двухслойной жидкости, была значительной (см. далее).

2. Математическое моделирование в задаче о колебаниях поплавков различных форм. Для построения искомых решений задачи (1.1), описывающих колебания поплавков различных форм (1.4)–(1.8) (см. фиг. 1, 1–5), разработан и реализован численный метод первого порядка точности (аналог метода Эйлера – метода ломаных численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений). Введением безразмерных переменных смещения $\sigma = s/s^0$ и аргумента $\theta = \nu t$ число параметров задачи сводится к одному, т. е. полное семейство решений является однопараметрическим вида: $\sigma = \sigma(\theta, \kappa)$, где $\kappa = \alpha l \mu$. В результате получаем задачу Коши вида

$$\sigma'' + \Omega_*^2 \sigma = -2\kappa \Omega_*^2 \int_0^\theta K_*(\theta - \vartheta) \sigma'(\vartheta) d\vartheta, \quad \theta \in [0, \Theta] \quad (2.1)$$

$$\sigma(0) = 1, \quad \sigma'(0) = 0 \quad (K_* = K_{n*}, \quad \Omega_* = \Omega_{n*}, \quad \sigma = \sigma_n, \quad n = 1, \dots, 5)$$

Приближенные значения фазовых переменных $\sigma_i = \sigma(\theta_i, \kappa)$, $\chi_i = \sigma'(\theta_i, \kappa)$ ищутся в узлах равномерной сетки $\theta_i = i\delta$, $i = 0, 1, \dots, I$ ($I\delta = \Theta$), где δ – шаг интегрирования интегриродифференциального уравнения (2.1), Θ – безразмерное время окончания процесса, $(I+1)$ – количество узлов сетки. Переход от i -го к $(i+1)$ -у узлу (шагу) производится по рекуррентным формулам вследствие отсутствия марковских свойств

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \delta \chi_i, \quad \sigma_0 = 1, \quad \chi_0 = 0, \quad i = 0, 1, \dots, I \quad (2.2)$$

$$\chi_{i+1} = \chi_i - \delta \Omega_*^2 \sigma_i - 2\kappa \delta^2 \Omega_*^2 \sum_{i'=0}^i K_*(\delta(i-i')) \chi_{i'}$$

Существенное осложнение при использовании соотношений (2.2) состоит в том, что аналитическое представление ядра $K_*(\theta)$ невозможно. Для его определения применялась приближенная формула метода Симпсона вида

$$K_*(\theta) = \int_0^\infty F(\xi, \theta) d\xi \approx$$

$$\simeq \int_0^{\Xi} F(\xi, \theta) d\xi = \frac{\Delta}{3} (F_0 + 4F_1 + 2F_2 + \dots + 2F_{2J-2} + 4F_{2J-1} + F_{2J}) - \frac{\Delta^5}{90} F_{\xi}^{(4)}(\xi^*, \theta) \quad (2.3)$$

$$F_j = F(\xi_j, \theta), \quad \xi_j = j\Delta, \quad j=0, 1, \dots, 2J; \quad 2J\Delta = \Xi$$

Здесь F — подынтегральная функция в K_* (1.4)–(1.8), Δ — шаг интегрирования, Ξ — верхний предел, обеспечивающий требуемую точность вычисления несобственного интеграла (2.3), $2J$ — число отрезков разбиения интервала $0 \leq \xi \leq \Xi$, $0 \leq \xi^* \leq \Xi < \infty$; $F_{\xi}^{(4)} = \partial^4 F / \partial \xi^4$.

При численных расчетах, проводимых по предложенной схеме, возникают абсолютные погрешности трех типов $E_{(1)}$, $E_{(2)}$, $E_{(3)}$. Первая — $E_{(1)}$ обусловлена заменой несобственного интеграла (2.3) собственным. Для рассматриваемых ядер (1.4)–(1.8) она может быть оценена следующим образом

$$E_{(1)n} \leq \frac{C_n}{\Xi} \left(= C_n \int_{\Xi}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^2}, \quad n=1, \dots, 4 \right) \quad (2.4)$$

$$E_{(1)n} \leq \frac{C_5}{\Xi^3} \left(= C_5 \int_{\Xi}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^4} \right), \quad 0 < C_n < \infty, \quad n=1, \dots, 5$$

Второй тип погрешности $E_{(2)}$ обусловлен приближенным численным интегрированием согласно (2.3). Ее можно оценить сверху

$$E_{(2)n} \leq \frac{\Delta^5}{90} \max_{\xi^*, \theta} |F_{\xi}^{(4)}(\xi^*, \theta)|; \quad 0 \leq \xi^* \leq \Xi, \quad 0 \leq \theta \leq \Theta \quad (2.5)$$

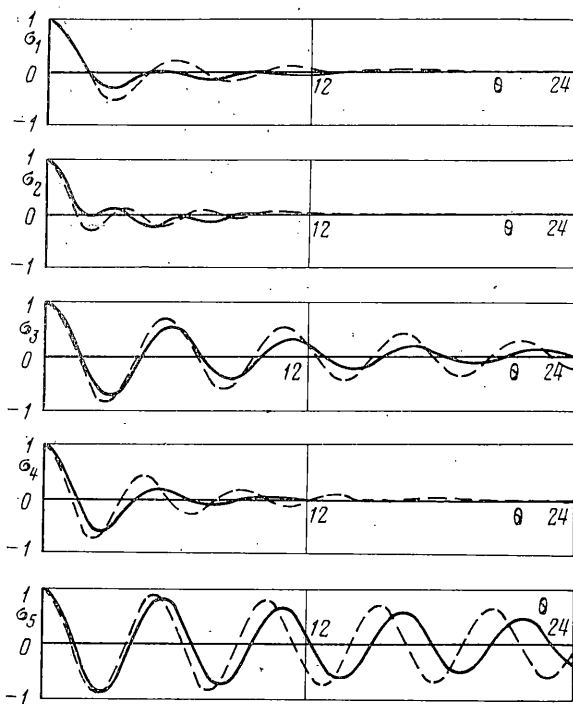
И, наконец, третий тип погрешности $E_{(3)}$ возникает при интегрировании интегродифференциальной задачи Коши (2.1) согласно (2.2) методом типа ломаных Эйлера. Конечно-разностные схемы более высокого порядка здесь неприменимы вследствие недифференцируемости ядер интегральных операторов. При условии, что установленные выше погрешности $E_{(1)}$, $E_{(2)}$, достаточно малы, для $E_{(3)}$ можно получить оценку

$$E_{(3)n} \leq D_n \delta, \quad 0 < D_n < \infty, \quad n=1, \dots, 5 \quad (2.6)$$

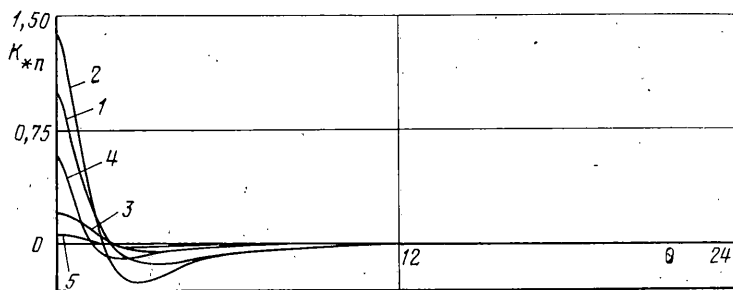
Требуемая суммарная абсолютная точность E равна сумме $E_{(1)}$, $E_{(2)}$, $E_{(3)}$ и полагалась равной $E=0,01$ (относительная точность $e=1\%$). При расчетах полагалось $\delta=0,01$, $\Delta=0,02$, $\Xi=10^2$, $\Theta=24$. Расчеты, проведенные для больших значений Ξ и меньших δ и Δ , показали, что для рассматриваемых значений κ и принятые значения обеспечивают требуемую точность интегрирования задачи Коши (2.1) по схеме (2.2), (2.3). Заметим, что эти решения имеют ту же точность, что и исходная модель, поэтому дальнейшее его уточнение в рамках данной модели не имеет смысла и не проводилось.

На фиг. 2 приведены результаты расчетов затухающих колебаний поплавок относительно положения гидростатического равновесия $\sigma_n = \sigma_n(\theta, \kappa)$, $n=1, 2, \dots, 5$, на ЭЦВМ ЕС 1055 интегрированием задачи (2.1) для описанных в п. 1 форм тела (см. фиг. 1 и формулы (1.4)–(1.8); индекс n отвечает номеру формы в установленном выше порядке). Движения поплавков рассчитаны для двух значений параметра κ : $2\kappa=0,04$ (штриховые кривые) и $2\kappa=0,07$ (сплошные кривые), что отвечает двум значениям величины $2\alpha l$ — ширины миделя (или максимальной толщины), точнее, параметра α . Величины αl и μ брались одинаковыми для всех форм, как представлено на фиг. 1. Заметим, что на фиг. 2 приведены для сравнения графики $\sigma_1 = \sigma_1(\theta, \kappa)$ колебаний поплавок с бесконечной осадкой [1, 2]. Этот случай подробно исследован авторами в [3, 4]. На фиг. 3 приведены результаты вычислений согласно формуле (2.3) разностных ядер $K_{*n} = K_{*n}(\theta)$ интегродифференциального уравнения (2.1) для указанных форм, в том числе ядра K_{*1} .

3. Качественные выводы и замечания. Из проведенных расчетов следуют три качественных вывода относительно свободных колебаний по-



Фиг. 2



Фиг. 3

плавков, взаимодействующих с волновыми движениями двухслойной жидкости.

1. Скорость затухания колебаний поплавков (диссипация) возрастает с увеличением параметра κ .

2. Частота колебаний увеличивается с ростом параметра κ . Это обстоятельство является необычным с точки зрения теории колебаний линейных систем (возрастание диссипации и частоты с увеличением некоторого параметра).

3. Имеется существенная зависимость диссипации от формы поплавков, которая коррелирована со значениями и поведением ядра $K_{*n}(\theta)$ вблизи точки $\theta=0$. Поэтому наиболее быстро затухают колебания тел с бесконечной осадкой и ромбовидной формы ($n=1, 2$). Слабее затухают колебания поплавка ромбовидной вогнутой формы ($n=4$). Наиболее слабо затухают колебания тел чечевицеобразного и яхтообразного профилей. По-видимому, это обстоятельство значительно связано с отсутствием угловых точек формы тела при $y=0$.

Переход к исходным переменным осуществляется по формуле $s = -s^0 \sigma(vt, \kappa)$. После того, как найдено решение $s(t), s'(t)$ задачи (1.1), можно определить основные гидродинамические характеристики волновых дви-

жений двухслойной жидкости — потенциалы скоростей $\varphi_{1,2}$ [1—4]:

$$\varphi_{1,2}(x, y, t) = \frac{\alpha}{2\pi} s^*(t) \int_0^{\pm h} \omega'(\beta) \ln \frac{x^2 + (y-\beta)^2}{x^2 + (y+\beta)^2} d\beta \pm$$

$$\pm \frac{2\alpha}{\pi} g^* \int_0^h \omega'(\beta) d\beta \int_0^\infty e^{-(\beta \pm v)k} \cos kx dk \int_0^t s^*(\tau) \frac{\sin \sqrt{g^*k}(t-\tau)}{\sqrt{g^*k}} d\tau$$

$$(\varphi_1, y > 0; \varphi_2, y < 0)$$
(3.1)

На основе выражений (3.1) находятся поля скоростей $v_{1,2}$ и давлений $p_{1,2}$, а также граница раздела $y = \eta$ жидкостей по формулам

$$v_{1,2}(x, y, t) = -\text{grad } \varphi_{1,2}(x, y, t), \quad p_{1,2}(x, y, t) = \rho_{1,2} [\varphi_{1,2}(x, y, t) - gy]$$

$$\eta(x, t) = \frac{1}{g^*(\rho_1 + \rho_2)} [\rho_2 \varphi_2^*(x, 0, t) - \rho_1 \varphi_1^*(x, 0, t)]$$
(3.2)

Рассмотрим как представляющую особый интерес задачу определения границы раздела. Она определяется согласно (3.2) линеаризованным соотношением, характеризующим равенство давлений. Путем несложных громоздких преобразований получим искомое выражение

$$\eta(x, t) = -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty R(k) dk \int_0^t s^*(\tau) \cos \sqrt{g^*k}(t-\tau) d\tau$$
(3.3)

Другие характеристики волновых движений жидкости находятся аналогично [1—4].

Из аналитических и численных расчетов по формуле (3.3) следуют основные качественные выводы.

1. Волновые возмущения, вызванные нестационарными движениями (затухающими колебаниями) поплавков, представляют собой волновые пакеты, симметрично распространяющиеся в обе стороны от поплавка ($t > 0, x \geq 0$).

2. В некоторую точку наблюдения (x, y) приходят первыми длинноволновые возмущения, которые распространяются по поверхности раздела быстрее коротковолновых, что обусловлено положительной дисперсией волн в двухслойной жидкости.

3. Колебания поплавков с большей диссипацией приводят к более узким волновым пакетам и к большим амплитудам волновых движений.

Изложенный выше подход и развитая в [4] методика численно-аналитического исследования внешней задачи гидродинамики и колебаний поплавков на основе математического аппарата интегродифференциальных уравнений позволяют досконально изучить рассматриваемую механическую модель, имеющую значительное прикладное содержание. Оказывается возможным провести расчет и сравнение колебаний для других соотношений между параметрами форм ω_n , например: а) одинаковые площади ($\Pi_n = \Pi_{n'}, n \neq n' = 1, \dots, 5$) и ширина $2\alpha l$ (толщина) поплавков (но разные высоты h_n), см. препринт, указанный в сноске; б) одинаковые площади и высоты (но разные толщины) и др. Метод может быть также обобщен на другие формы $\omega(y)$ (например, эллиптические, овальные, прямоугольные и т. п.), а также на несимметричные относительно оси Ox ($y = 0$) поплавки.

В дальнейшем может представить интерес асимптотическое исследование задачи, т. е. сопоставление (1.1) соответствующей усредненной системы с постоянными коэффициентами и определение эффективного коэффициента демпфирования и сдвига частоты колебаний поплавков в зависимости от их формы. Поскольку в реальных условиях практики и эксперимента существенное влияние на процесс и наблюдения оказывает естественная (кинематическая) вязкость жидкости, то весьма важным оказывается разработка методики исследования указанных выше характеристик на основе амплитудно- и фазо-частотных характеристик, т. е. методики анализа вынужденных колебаний поплавков (аналогично [4]).

Учитывая неполноту рассмотренной гидродинамической модели, представляется целесообразным развивать численно-аналитические методы исследования колебаний с учетом возмущающих факторов различной физической природы (малой несимметрии формы, ограниченности объема жидкости, вязкости жидкостей, вихрей, капиллярности, внешних воздействий и др.) при помощи математического аппарата интегродифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л. Н.* О затухании вертикальных колебаний центра тяжести плавающих тел // Тр. ЦАГИ. 1937. Вып. 330. С. 1–12.
2. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
3. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Колебания твердого тела на поверхности раздела двух жидкостей // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 34–40.
4. *Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Нестеров С. В., Чайковский А. А.* Численно-аналитическое исследование колебаний твердого тела на границе раздела двух жидкостей // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 59–66.
5. *Хаскинд М. Д.* Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973. 328 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.IV.1989