УДК 539.3

А. А. ЛОКШИН, С. Л. ЛОПАТНИКОВ, В. Е. РОК

МЕТОД КАНЬЯРА — ХУПА ДЛЯ ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕД

Как известно [1], метод Каньяра – Хупа непосредственно не применим к поглощающим средам. В данной работе делается попытка обобщения этого метода на случай поглощающих сред. Основное внимание уделено средам с сингулярной памятью. Эти среды рассматривались, в частности, в [2]. Здесь модификация метода Каньяра – Хупа используется для построения прифронтовой асимптотики функции Грина для SH-волн в нестационарной плоской задаче наследственной упругости.

Рассмотрим бесконечную наследственно-упругую среду плотности $\rho=\mathrm{const}$ с операторным модулем сдвига μ^*, действующим на основные функции по формуле

$$\mu^* w(t)=\mu_0\left(w(t)-\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau\right)$$

Преобразование Лапласа $L_{t\to s}$ этого равенства, очевидно, имеет вид (преобразованные по Лапласу и Фурье функции здесь и в дальнейшем обозначаются прежними буквами с указанием аргументов): $\mu(s)w(s)=\mu_0(1-K(s))w(s)$.

Пусть линейный источник, расположенный на оси y, представляет собой объемную силу, действующую в направлении этой оси $f=(0,\ A\delta(x)\delta(z)\delta(t),\ 0)$. Тогда уравнение для возбуждаемой этим источником y-компоненты смещений будет иметь вид:

$$\rho\partial^2 v/\partial t^2=\mu^*(\partial^2 v/\partial x^2+\partial^2 v/\partial z^2)+A\delta(x)\delta(z)\delta(t) \qquad (1)$$

Предполагается, что при $t<0$ среда находилась в ненапряженном состоянии и покоилась. Применим к (1) преобразование Лапласа $L_{t\to s}$ и Фурье $F_{x\to k_x}$. Решая получающееся дифференциальное (по z) уравнение, получаем:

$$v(k_x,\ z,\ s)=Ae^{-n|z|}/(2\rho\beta^2(s)n);\qquad n\equiv(k_x^2+s^2/\beta^2(s))^{1/2},\qquad \beta(s)\equiv(\mu(s)/\rho)^{1/2}$$

Применяя к предыдущему равенству формулу обращения для преобразования Фурье $F^{-1}_{k_x\to x}$, имеем

$$v(x,z,s)=\frac{A}{4\pi\rho\beta^2(s)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\{ik_x x-(k_x^2+s/\beta^2[s))^{1/2}|z|\}}{(k_x^2+s^2/\beta^2(s))^{1/2}}\,dk_x \qquad (2)$$

Введем теперь лучевой параметр p по формуле (это центральное место выкладок, лучевой параметр вводится иначе, чем в упругости):

$$k_x=ips\beta_0/\beta(s),\qquad \beta_0\equiv\lim_{s\to+\infty}\beta(s) \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получим

$$v(x,z,s)=-\frac{Ai}{4\pi\rho\beta^2(s)}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\exp\{-(px+(\beta_0^{-2}-p^2)^{1/2}|z|)s\beta_0/\beta(s)\}}{(\beta_0^{-2}-p^2)^{1/2}}\,dp=$$

$$=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2(s)}\,\mathrm{Im}\int_{0}^{i\infty}\frac{\exp\{-(px+(\beta_0^{-2}-p^2)^{1/2}|z|)s\beta_0/\beta(s)\}}{(\beta_0^{-2}-p^2)^{1/2}}\,dp \qquad (4)$$

Теперь, как и в обычном методе Каньяра – Хупа [1], введем переменную $t=t(p)$ по формуле

$$t=px+(\beta_0^{-2}-p^2)^{1/2}|z| \qquad (5)$$

и будем считать, что $0<t<\infty$. Положим $R\equiv(x^2+z^2)^{1/2}$. Тогда равенства, получающиеся обращением формулы (5):

$$\begin{aligned} p&=[xt-|z|(R^2/\beta_0^2-t^2)^{1/2}]R^{-2}, && 0<t<R/\beta_0=\\ &=[xt+i|z|(t^2-R^2/\beta_0^2)]R^{-2}, && t>R/\beta_0 \end{aligned} \qquad (6)$$

определяют соответствующий контур Каньяра C: $p=p(t)$. Далее, подобно [1, с. 220], заключаем из (4)–(6), что

$$v(x,z,s)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2(s)}\operatorname{Im}\int\limits_C\frac{\exp\{-(px+(\beta_0^{-2}-p^2)|z|)s\beta_0/\beta(s)\}}{(\beta_0^{-2}-p^2)^{1/2}}dp$$

Участок пути на C между $t=0$ и $t=R/\beta_0$ не дает вклада в интеграл, ибо на нем подынтегральное выражение вещественно. Кроме того, имеем на C при $t>R/\beta_0$:

$$dp/dt=i(\beta_0^{-2}-p^2)^{1/2}/(t^2-R^2/\beta_0^2)^{1/2}$$

Поэтому из двух предыдущих равенств следует

$$v(x,z,s)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2(s)}\int\limits_{R/\beta_0}^{\infty}\frac{\exp\{-ts\beta_0/\beta(s)\}}{(t^2-R^2/\beta_0^2)^{1/2}}dt \tag{7}$$

Чтобы вычислить прифронтовую асимптотику $v(x,z,t)$, очевидно, достаточно знать асимптотику $v(x,z,s)$ при $s\to+\infty$. Однако при больших $1>0$ в интеграл (7) вклад будет давать только малый участок пути интегрирования $R/\beta_0<t<R/\beta_0+\varepsilon$, на котором можно считать $(t^2-R^2/\beta_0^2)^{1/2}=(t-R/\beta_0)^{1/2}(t+R/\beta_0)^{1/2}\sim(2R/\beta_0)^{1/2}(t-R/\beta_0)^{1/2}$. Следовательно, при $s\to\infty$:

$$v(x,z,s)\sim\frac{A}{2\pi\rho\beta^2(s)(2R/\beta_0)^{1/2}}\int\limits_{R/\beta_0}^{\infty}\frac{\exp\{-ts\beta_0/\beta(s)\}}{(t-R/\beta_0)^{1/2}}dt$$

Полагая в последнем интеграле $\tau=t-R/\beta_0$ и интегрируя, имеем при больших s:

$$v(x,z,s)\sim\frac{A\Gamma(1/2)\exp\{-Rs/\beta(s)\}}{2\pi\rho\beta^2(s)(2R/\beta_0)^{1/2}(s\beta_0/\beta(s))^{1/2}}\sim\frac{A\Gamma(1/2)\exp\{-Rs/\beta(s)\}}{2\pi\rho\beta_0^2(2Rs)^{1/2}} \tag{8}$$

Пусть теперь функция $\beta(s)$ имеет следующий конкретный вид (что отвечает слабосингулярному ядру у операторного модуля сдвига):

$$\beta(s)=\beta_0(1-ks^{\alpha-1}),\qquad 0<\alpha<1,\qquad k>0 \tag{9}$$

Тогда из (8), (9) имеем при $s\to\infty$:

$$v(x,z,s)\sim\frac{A\Gamma(1/2)}{2\pi\rho\beta_0^{3/2}(2R)^{1/2}}\exp\{-Rs/\beta_0\}\frac{\exp\{-Rks^{\alpha}/\beta_0\}}{s^{1/2}} \tag{10}$$

Первый множитель в произведении, стоящем в правой части (10), – величина постоянная при $R=\mathrm{const}$. Второй множитель соответствует временному сдвигу $t\to t-R/\beta_0$. Таким образом, достаточно найти асимптотику при $t\to+0$ обратного преобразования Лапласа от третьего множителя. Используя технику метода перевала [3, с. 73], получаем, что при $t\to+0$:

$$L^{-1}_{s\to t}\frac{\exp\{-Rks^{\alpha}/\beta_0\}}{s^{1/2}}\sim\frac{(Rk\alpha\beta_0)^{1/2(1-\alpha)}}{(2\pi(1-\alpha))^{1/2}}t^{-1/2(1-\alpha)}\times$$
$$\times\exp\{-(Rk/\beta_0)^{1/(1-\alpha)}\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)t^{-\alpha(1-\alpha)}\}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}v(x,z,t)&\sim\mathrm{const}_1R^{\alpha/2(1-\alpha)}(t-R/\beta_0)^{-1/2(1-\alpha)}\times\\ &\times\exp\{-\mathrm{const}_2R^{1/(1-\alpha)}(t-R/\beta_0)^{-\alpha/(1-\alpha)}\}\end{aligned} \tag{11}$$

$$\mathrm{const}_1=\frac{A\Gamma(1/2)(k\alpha/\beta_0)^{1/2(1-\alpha)}}{4\rho(\pi\beta_0)^{3/2}(1-\alpha)^{1/2}},\qquad \mathrm{const}_2=(k/\beta_0)^{1/(1-\alpha)}\alpha^{\alpha(1-\alpha)}(1-\alpha) \tag{12}$$

Тем самым искомое прифронтовое асимптотическое разложение функции Грина построено.

Замечание. Из представления (7) можно получить с помощью нестрогих соображений асимптотику функции Грина при $t\to\infty$. Действительно, обозначим значение β при $s=0$ через β_∞; при этом предполагаем, что $0<\beta_\infty<\infty$. Тогда при $s\to0$ из (7) имеем

$$v(x,z,s)\sim\frac{A}{4\pi\rho\beta_\infty^2}\int\limits_{R/\beta_0}^{\infty}\frac{\exp\{-\tau s\beta_0/\beta_\infty\}}{(\tau^2-R^2/\beta_0^2)^{1/2}}d\tau=\frac{A}{4\pi\rho\beta_0\beta_\infty}\int\limits_{R/\beta_\infty}^{\infty}[(\beta_\infty/\beta_0)^2t^2-R^2/\beta_0^2]^{-1/2}e^{-ts}dt \tag{13}$$

Теперь из (13) следует что при $t \to \infty$ должно быть

$$v(x, z, t) \sim \frac{A}{4\pi\rho\beta_\infty(\beta_\infty^2 t^2 - R^2)^{1/2}} \tag{14}$$

Авторы признательны Н. В. Зволинскому за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир, 1983. 519 с.
2. *Локшин А. А., Суворова Ю. В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 151 с.
3. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.II.1989