

УДК 539.3

© 1990 г.

О. Б. РУДАКОВА

ЗАДАЧА ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ О СВОБОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Дана общая постановка связанной задачи о свободных нелинейных колебаниях прямоугольной пластины. Материал пластины — линейный вязкоупругий, его свойства зависят от температуры. На основе температурно-временной аналогии методом последовательных приближений получено решение сформулированной задачи. Приведен анализ этого решения и иллюстрирующие его результаты конкретных расчетов. Численно, на примере задачи о линейных колебаниях пластины, показана сходимость метода приближений (построено три приближения и обнаружена их близость).

1. Рассмотрим прямоугольную пластинку со сторонами a , b и толщиной h , шарнирно опертую по краям; материал пластины — линейный вязкоупругий, начально однородный и изотропный. Известно, что механические свойства полимерных материалов существенно зависят от температуры. Будем учитывать температурную зависимость ядер ползучести и релаксации в рамках температурно-временной аналогии, коэффициент Пуассона ν и модуль упругости E посчитаем константами материала. Температура в пластине может меняться за счет внешнего теплового облучения и внутреннего тепловыделения. Общая постановка задачи имеет вид:

$$\nabla^4 \Phi(x, y, t) = -1/2 E \Gamma \nabla [L(w, w)] \quad (1.1)$$

$$\Gamma \nabla [\nabla^4 w(x, y, t)] = -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + \frac{h}{D} L(\Phi, w) \quad (1.2)$$

$$L(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} \\ \partial T / \partial t = a_0^2 \Delta T + 1/c W^*, \quad a_0^2 = \lambda/c \quad (1.3)$$

$$W^* = s_{ij} e_{ij} - s_{ij} s_{ij} / \Gamma(0) + 3\alpha \varepsilon - \sigma \sigma / \Gamma_1(0) \quad (1.4)$$

$$\Gamma \nabla [\Psi(t)] = \Psi(t) - \int_0^t \Gamma(t' - \tau') \Psi(\tau) d\tau; \quad t' = \int_0^t \frac{d\xi}{a_T(T)} \quad (1.5)$$

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{a_T(T)} = \exp \left[\frac{b_0}{T_0} \theta(x, y, z, t) \frac{1}{1 + \theta(x, y, z, t)/T_0} \right] \quad (1.6)$$

$$x=0, a: \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma_x^0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \\ y=0, b: \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y^0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.7)$$

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y); \quad \partial w(x, y, t) / \partial t|_{t=0} = w_0'(x, y) \quad (1.8)$$

$$x=0, a; \quad y=0, b: \quad T = T_0 \quad (1.9)$$

$$z = \pm h/2: \quad \partial T / \partial z = \kappa(T - T_0) / \lambda \quad (1.10)$$

$$T(x, y, z, 0) = T_0 \quad (1.11)$$

Здесь обозначено: T_0 и $T(x, y, z, t)$ — начальное и текущее значения температуры; $\theta(x, y, z, t) = T(x, y, z, t) - T_0$; $\Phi(x, y, t)$ — функция напряжений; $w(x, y, t)$ — прогиб пластины, характеристики материала которой: ρ — плотность, λ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость единицы объема в начальном ненапряженном состоянии, κ — коэффициент теплоотдачи; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, h — толщина пластины; коэффициент b_0 определяется экспериментально для многих полимеров, σ_x^0 и σ_y^0 — условия на сближения кромок пластины.

2. Для решения связанной задачи термовязкоупругости (1.1)–(1.11) воспользуемся методом последовательных приближений [1]. В качестве первого приближения возьмем решение соответствующей задачи вязкоупругости при стационарной температуре. Это решение, как частный случай полученного в [2], имеет вид:

$$w(x, y, t)/h = \xi(t) \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b) \quad (2.1)$$

$$\xi(t) = \gamma \cos \left[\left(1 - \frac{\varepsilon R_{c1}}{2} \right) t + \frac{3 - (2\varepsilon R_{c0} + \varepsilon R_{c2})}{2\varepsilon R_{s2}} \ln(1 - \gamma_0^{1/8} \beta \varepsilon R_{s2} e^{-\varepsilon R_{s1} t}) + \varphi \right] \times \quad (2.2)$$

$$\times \exp[-1/2 \varepsilon R_{s1} t - 1/2 \ln(1 - 1/8 \gamma_0 \beta \varepsilon R_{s2} e^{-\varepsilon R_{s1} t})]$$

$$\gamma = [(\xi_0)^2 + (\xi_0^*)^2]^{1/2} (1 - 1/8 \gamma_0 \beta \varepsilon R_{s2})^{1/2}$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\xi_0 \sin C_0 - \xi_0^* \cos C_0}{\xi_0 \cos C_0 + \xi_0^* \sin C_0}$$

$$C_0 = - \frac{3 - \varepsilon(2R_{c0} + R_{c2})}{2\varepsilon R_{s2}} \ln \left(1 - \gamma_0 \frac{\beta \varepsilon R_{s2}}{8} \right)$$

$$\gamma_0 = \frac{(\xi_0)^2 + (\xi_0^*)^2}{[(\xi_0)^2 - (\xi_0^*)^2]^{1/8} \beta \varepsilon R_{s2} + 1/2 \varepsilon R_{s1}}$$

$$\beta = \frac{3}{4} \frac{(1-\nu^2)(1+1/(\lambda_0)^4)}{(1+1/(\lambda_0)^2)}, \quad \lambda_0 = a/b$$

где ξ_0 и ξ_0^* — заданные в начальный момент времени $t=0$ амплитуда и скорость прогиба

$$\Gamma(t) = \varepsilon R(t) \quad (2.3)$$

$$R_{cp} = \int_0^{+\infty} R(\tau) \cos p\tau d\tau, \quad R_{sq} = \int_0^{+\infty} R(\tau) \sin q\tau d\tau$$

$$(p=0, 1, 2), \quad (q=1, 2)$$

Используя решение (2.1)–(2.2), для функции рассеяния W^* (1.4) [1] в первом приближении получим выражение (удерживая слагаемые, содержащие выражения не выше второй степени амплитуды прогиба пластины):

$$W^* \cong \frac{E}{1-\nu} \left\{ \varepsilon_x \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_x(\tau) d\tau \right] + \varepsilon_y \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_y(\tau) d\tau \right] \right\} + \quad (2.4)$$

$$+ \frac{2E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_{xy}(\tau) d\tau \right]$$

где ε_x , ε_y и ε_{xy} — деформации изгиба.

Для решения уравнения теплопроводности (1.3) с вычисленной функцией рассеяния W^* (2.4) примем для температуры представление $T(x, y, z, t) = T_0 + T_1(z, t) \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$.

Граничные условия позволяют осреднить температуру по толщине пластины, для осредненной функции T_1 после процедуры Бубнова — Галёркина из (1.3) получим уравнение

$$(\partial T_{1*} / \partial t) + (\eta^2 - 2\kappa / \lambda \omega_0) T_{1*}(t) = F(t) \quad (2.5)$$

$$\eta^2 = \lambda \pi^2 (a^2 + b^2) / ca^2 b^2 \omega_0$$

где ω_0 — основная частота малых колебаний упругой пластины с модулем упругости, E — мгновенным модулем упругости материала вязкоупругой пластины;

$$F(t) = B\xi(t) \left[\Gamma(0)\xi(t) + \int_0^t \Gamma_i(t-\tau)\xi(\tau) d\tau \right] - 2\frac{\kappa}{\lambda\omega_0} T_0$$

$$B = \frac{8E\pi^2 h^4}{27a^2 b^2 c T_0} \left[\frac{2(a^4 + b^4)}{a^2 b^2 (1-\nu)} + \frac{1}{1+\nu} \right]$$

Решение уравнения (2.5) имеет вид:

$$T_{1*}(t) = e^{-\kappa t} \int_0^t F(\tau) e^{\kappa \tau} d\tau \quad (2.6)$$

Таким образом первое приближение температуры саморазогрева становится известным.

3. В соответствии с методом приближений известная температура (2.6) используется для решения задачи на следующем шаге.

Необходимо посчитать приведенное время t' (1.5), где функция $a_T(T)$ дается формулой (1.6). Для решения неоднородных задач линейной термовязкоупругости предложены методы разложения приведенного времени t' в ряд по некоторому малому параметру, например, так, как это сделано в [3]. Следуя этой работе и ограничиваясь для выявления качественного характера влияния температурного поля главным членом разложения, вычислим приведенное время t' :

$$t' \approx \omega_0(t) = \int_0^t f_0(\xi) d\xi$$

$$f_0(t) = \exp \left[\frac{b_0}{T_0} \left(1 - \frac{T_0}{T_0 + \theta_1} \right) \right], \quad \theta_1(t) = \sup_{x,y,z} |\theta(x,y,z,t)|$$

получим:

$$t' \approx t + (\varepsilon b_0 BR(0)/(T_0)^2) \{ [Q_1(1 - e^{-\eta^2 t})/\eta^2] - [Q_2(1 - e^{-\varepsilon R_{sq} t})/R_{sq}] \}$$

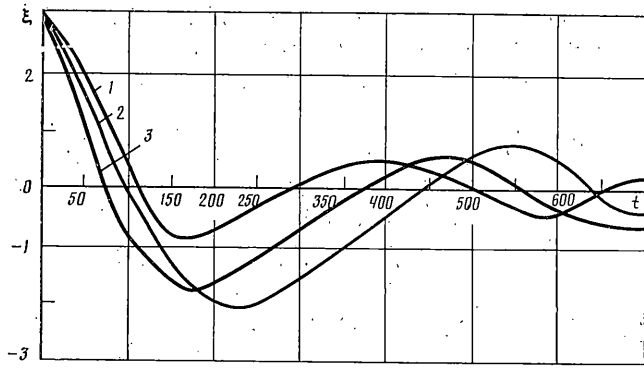
где Q_i ($i=1, 2$) — константы, их конкретные выражения вследствие громоздкости не выписываем.

Таким образом, ядро релаксации второго приближения $R(t')$ становится известным. Это ядро подставим в систему уравнений для определения прогиба пластины и функции напряжений во втором приближении, которая решается по методике, изложенной в [2]. Решение задачи во втором приближении имеет вид (2.1)–(2.2), в котором интегральные характеристики процесса колебаний определяются по формулам (2.3) с ядром второго приближения. Для экспоненциального ядра $R(t) = e^{-\beta_0 t}$ соответствующие характеристики во втором приближении:

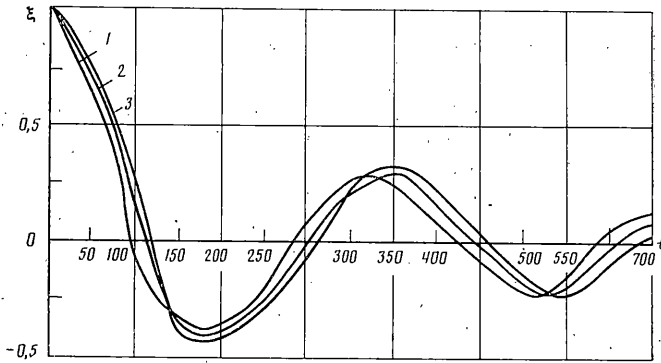
$$R_{cp}^T = k_T / [(k_T)^2 + p], \quad R_{sq}^T = 1 / [(k_T)^2 + q] \quad (3.1)$$

$$k_T = \beta_0 [1 + (\varepsilon b_0 BR(0) (Q_1 - Q_2) / (T_0)^2)] \quad (3.2)$$

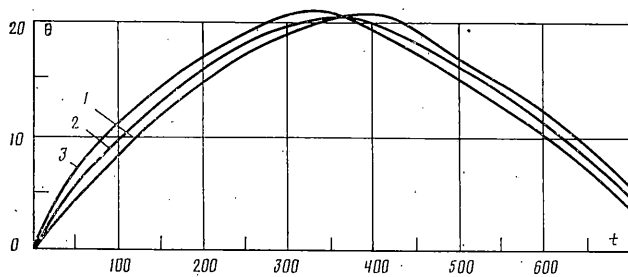
Параметры (3.1) получаются из соответствующих им параметров первого приближения заменой константы $k = \beta_0$ на константу k_T (3.2). Изменение характеристик, входящих в решение задачи, свидетельствует о влиянии термомеханической связанности на процесс колебаний. Характер этого влияния прослеживается на конкретных расчетах, результат которых приведен на фиг. 1; кривая 1 соответствует линейным колебаниям, кривая 2 — нелинейным, а кривая 3 — нелинейным изотермическим. Расчеты проведены для квадратной пластины со стороной $a=40$ см, толщиной $h=0,59$ см при начальной амплитуде прогиба $\xi_0=3$ и скорости



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$\xi_0 = 0$ из полиметилметакрилата; функция скорости релаксации имеет вид [4]: $\Gamma(t) = \varepsilon R(t)$; $\varepsilon = 0,0442 \text{ с}^{-1}$, $R(t) = e^{-\beta_0 t}$, $\beta_0 = 1,3 \text{ с}^{-1}$.

Видно существенное влияние температуры и, следовательно, термомеханической связанности на процесс свободных колебаний.

4. Вопрос о сходимости метода приближений в общей постановке остается открытым. Изучим его численно на примере задачи о линейных колебаниях прямоугольной вязкоупругой пластины.

Безразмерная амплитуда прогиба $\xi_1 = w_1/h$ определяется из уравнения:

$$\xi_1''(t) + \xi_1(t) = \omega_0^2 \int_0^t \Gamma(t-\tau) \xi_1(\tau) d\tau$$

в виде (как частный случай полученного в [2]):

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \gamma_1 \cos \left[(1 - \frac{1}{2} \varepsilon R_c^{(1)}) t + \varphi_1 \right] \exp \left[-\varepsilon R_s^{(1)} t / 2 \right] \\ \gamma_1 &= [(\xi_0)^2 + (\xi_0')^2]^{1/2}, \quad \varphi_1 = \text{arctg} (-\xi_0' / \xi_0) \\ R_{c1} &= R_c^{(1)}, \quad R_s^{(1)} = R_{s1} \end{aligned}$$

Далее, по изложенной выше методике, определяем функцию рассеяния и температуру пластины, которую используем как известную во втором приближении. Выражение для амплитуды прогиба исследуемой пластины в первом и втором приближениях имеет одинаковый вид, но с разными характеристиками, причем, для экспоненциального ядра $R(t) = e^{-\beta_0 t}$:

$$R_c^{(1)} - R_c^{(2)} = u \{ [v\beta_0 / (\beta_0^2 + 1)] - [s_1(\beta_0 + \eta^2) - s_2(\beta_0 + \varepsilon R_s^{(1)})] \}$$

$$R_s^{(1)} - R_s^{(2)} = u \{ [v / (\beta_0^2 + 1)] - (s_1 - s_2) \}$$

$$u = \varepsilon \beta_0 b_0 \gamma_1^2 BR(0) / 2(T_0)^2 (\varepsilon R_s^{(1)} - \eta^2), \quad v = \eta^{-2} - [R_s^{(1)}]^{-1}$$

$$s_1 = \eta^{-2} [(\beta_0 + \eta^2)^2 + 1]^{-1}, \quad s_2 = [R_s^{(1)}]^{-1} [(\beta_0 + \varepsilon R_s^{(1)})^2 + 1]^{-1}$$

В качестве примера для числовых расчетов возьмем квадратную пластину со стороной $a=40$ см, толщиной $h=0,2$ см при начальной амплитуде прогиба $\xi_0=1$ и скорости $\dot{\xi}_0=0$ из полиметилметакрилата, характеристики которого приведены выше. На фиг. 2 и фиг. 3 представлены графики изменения безразмерной амплитуды прогиба и приращения температуры в центральной точке пластины в зависимости от безразмерного времени для первого, второго и третьего приближений. Как видно из этих графиков, третье приближение незначительно отличается от второго, что говорит в пользу сходимости метода последовательных приближений в связанной задаче термовязкоупругости.

Автор благодарит профессора И. А. Кийко за внимание к данной работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. *Кийко И. А., Рудакова О. Б.* Несвязанная задача термовязкоупругости о свободных нелинейных колебаниях прямоугольной пластины // Вест. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1988. № 3. С. 95—99.
3. *Гасанов А. Б., Ильясов М. Х., Кийко И. А.* Распространение нестационарных волн в вязкоупругом полупространстве с учетом внутреннего теплообразования и зависимости свойств материала от температуры // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 124—130.
4. *Иванов Н. М., Музыченко В. П.* Определение параметров ядер релаксации по результатам волнового эксперимента // ПМТФ. 1983. № 1. С. 121—127.

Москва

Поступила в редакцию
21.XII.1988