

УДК 539.3:534.1

© 1990 г.

В. И. ПОЖУЕВ, Н. П. ПОЛЯКОВА

НЕСТАЦИОНАРНАЯ РЕАКЦИЯ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ НА ДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Задачи о действии подвижных нагрузок на пластины, лежащие на упругом инерционном основании, в стационарной постановке исследовались многими авторами [1-4]. Так как рассматриваются неограниченные конструкции и скорость движения нагрузок постоянна, то в этих работах анализировались лишь стационарные режимы, при которых картина деформирования неизменна относительно наблюдателя, движущегося вместе с нагрузкой. В такой постановке полученные решения являются инвариантными относительно времени в подвижной системе координат, а скорость движения входит в решение как параметр. С физической точки зрения стационарная задача является приближенной постановкой для нестационарной с начальными условиями при больших значениях времени.

В публикуемой работе основное внимание уделено изучению переходных процессов, которые возникают в момент приложения нагрузки и в следующие непосредственно после этого момента промежутки времени. Кроме того, сделана попытка в задаче о воздействии подвижной линейной нагрузки определить время установления процесса, после которого задача может рассматриваться в стационарной постановке. Для анализа неустановившихся процессов применяется преобразование Фурье по пространственной координате и преобразование Лапласа по времени. Обращение обоих преобразований осуществляется численными методами.

1. Постановка задачи. Пластина и подпирающее полупространство принимаются однородными, изотропными и линейно-упругими. Действующая нормальная нагрузка, не зависящая от координаты y , прикладывается внезапно и в дальнейшем движется с постоянной скоростью c в положительном направлении оси x . Такая нагрузка вызывает в пластине и полупространстве плоское деформированное состояние, при котором $u_y = 0$, а остальные перемещения и напряжения являются функциями от x , z и t .

Уравнения движения упругого полупространства в перемещениях получаются обычным путем и могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} c_p^2 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (c_p^2 - c_s^2) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) &= \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ c_s^2 \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + (c_p^2 - c_s^2) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где c_p , c_s — скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига в полупространстве $c_s^2 = G_c / \rho_c$:

$$c_p^2 = 2G_c \rho_c^{-1} (1 - \nu_c) / (1 - 2\nu_c)$$

Для описания движения пластины используются уточненные уравнения с учетом поперечного сдвига и инерции вращения (типа Тимошенко), которые для случая жесткого контакта могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{4Gh}{1-\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q_{xc}(x, t) &= 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ 2k^2 Gh \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) - q_{rc}(x, t) &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_1(x, t) \\ -\frac{4}{3} \frac{Gh^2}{1-\nu} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - 2k^2 G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right) + q_{xc}(x, t) &= -\frac{2}{3} \rho h^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где α — угол поворота поперечного сечения; k^2 — сдвиговой коэффициент Тимошенко; $q_{rc}(x, t)$, $q_{xc}(x, t)$ — нормальное и касательное напряжение, действующее на поверхности раздела пластины и полупространства; $2h$ — толщина пластины, $p_1(x, t)$ — поверхностная нагрузка. Начало отсчета выбрано на срединной поверхности пластины, а ось Oz направлена вертикально вверх.

В случае жесткого контакта между пластиной и основанием граничные условия для полупространства имеют вид при $z = -h$:

$$\sigma_z = q_{rc}, \quad \sigma_{xz} = q_{xc}, \quad u_x = u + h\alpha, \quad u_z = w \quad (1.3)$$

Для нежесткого контакта должны выполняться условия при $z = -h$:

$$\sigma_z = q_{rc}, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad u_z = w \quad (1.4)$$

Начальные условия задачи принимаются нулевыми, т. е. при $t = 0$ все искомые функции и их первые производные по времени считаются равными нулю.

2. Определение в пространстве изображений реакции основания. Для интегрирования уравнений движения полупространства вводим волновые потенциалы φ и ψ по формулам

$$u_x = \partial\varphi/\partial x - \partial\psi/\partial z, \quad u_z = \partial\varphi/\partial z + \partial\psi/\partial x \quad (2.1)$$

При этом напряжения представляются в виде

$$\sigma_z = \frac{2G_c(1-\nu_c)}{1-2\nu_c} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z} \right) + \frac{2G_c\nu_c}{1-2\nu_c} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z} \right) \quad (2.2)$$

$$\sigma_{xz} = G_c (2\partial^2\varphi/\partial x \partial z - \partial^2\psi/\partial z^2 + \partial^2\psi/\partial x^2)$$

Подставляя (2.1) в (1.4), относя перемещения к половине толщины пластины и переходя к безразмерным координатам по формулам

$$x_* = x/h, \quad z_* = z/h, \quad \tau = c_s h^{-1} t, \quad \{u_* \div u_z\} = h^{-1} \{u \div u_z\} \quad (2.3)$$

приходим к двум волновым уравнениям

$$\begin{aligned} \partial^2\varphi/\partial x_*^2 + \partial^2\varphi/\partial z_*^2 &= \eta^2 \partial^2\varphi/\partial \tau^2 \\ \partial^2\psi/\partial x_*^2 + \partial^2\psi/\partial z_*^2 &= \partial^2\psi/\partial \tau^2 \\ \eta &= (1-2\nu_c)/[2(1-\nu_c)] = c_s^2/c_p^2 \end{aligned}$$

Для решения задачи применяются преобразования Лапласа по времени и Фурье по осевой координате

$$\varphi^L(x_*, z_*, p) = \int_0^\infty \varphi(x_*, z_*, \tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (2.4)$$

$$\varphi^L(\xi, z_*, p) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^\infty \varphi^L(x_*, z_*, p) e^{i\xi x_*} dx_* \quad (2.5)$$

Тогда в пространстве изображений Фурье — Лапласа уравнения (2.1) принимают вид

$$\begin{aligned} d^2\varphi^{LF}/dz_*^2 - \lambda_1\varphi^{LF} &= 0, \quad d^2\psi^{LF}/dz_*^2 - \lambda_2\psi^{LF} = 0 \\ \lambda_1 &= \xi^2 + \eta p^2, \quad \lambda_2 = \xi^2 + p^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решения уравнений (2.6) с учетом условий затухания на бесконечности могут быть записаны в виде

$$\varphi^{LF} = C_1 e^{\lambda_1^{1/2} z_*}, \quad \psi^{LF} = C_2 e^{\lambda_2^{1/2} z_*} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в преобразованные выражения (2.1), (2.2) и рассматривая вначале случай нежесткого контакта, из условий (1.4) полу-

чаем систему трех уравнений

$$\begin{aligned} \frac{2[\lambda_1(1-\nu_c) - \nu_c \xi^2] C_1 e^{-\lambda_1^{1/2}} - 2i\xi \lambda_2^{1/2} C_2 e^{-\lambda_2^{1/2}}}{1-2\nu_c} &= \frac{q_{rc}^{LF}}{G_c} \\ 2i\xi \lambda_1^{1/2} C_1 e^{-\lambda_1^{1/2}} + (\xi^2 + \lambda_2) C_2 e^{-\lambda_2^{1/2}} &= 0 \\ \lambda_1^{1/2} C_1 e^{-\lambda_1^{1/2}} - i\xi C_2 e^{-\lambda_2^{1/2}} &= w_*^{LF} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.8) находим зависимость между трансформантами реакции со стороны полупространства и прогибов пластины в виде

$$\frac{q_{rc}^{LF}}{G_c} = 2 \frac{[\lambda_1(1-\nu_c) - \nu_c \xi^2] (\xi^2 + \lambda_2) - 2\xi^2 (\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} (1-2\nu_c)}{p^2 (1-2\nu_c) \lambda_1^{1/2}} w_*^{LF} \quad (2.9)$$

В случае жесткого контакта, удовлетворяя преобразованным условиям (1.3), получаем систему четырех уравнений

$$\begin{aligned} \frac{2[\lambda_1(1-\nu_c) - \nu_c \xi^2] C_1 e^{-\lambda_1^{1/2}} - 2i\xi \lambda_2^{1/2} C_2 e^{-\lambda_2^{1/2}}}{1-2\nu_c} &= \frac{q_{rc}^{LF}}{G_c} \\ 2i\xi \lambda_1^{1/2} C_1 e^{-\lambda_1^{1/2}} + (\xi^2 + \lambda_2) C_2 e^{-\lambda_2^{1/2}} &= -q_{xc}^{LF} / G_c \\ \lambda_1^{1/2} C_1 e^{-\lambda_1^{1/2}} - i\xi C_2 e^{-\lambda_2^{1/2}} &= w_*^{LF} \\ -i\xi C_1 e^{-\lambda_1^{1/2}} - \lambda_2^{1/2} C_2 e^{-\lambda_2^{1/2}} &= u_*^{LF} + \alpha^{LF} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для этого случая зависимости между трансформантами реакции основания и перемещений пластины имеют вид

$$\frac{q_{rc}^{LF}}{G_c} = \frac{2}{(\lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} - \xi^2) (1-2\nu_c)} \{ \lambda_2^{1/2} (1-\nu_c) \eta p^2 w_*^{LF} - i\xi [\lambda_1(1-\nu_c) - \nu_c \xi^2 - (1-2\nu_c) \lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2}] (u_*^{LF} + \alpha^{LF}) \} \quad (2.11)$$

$$\frac{q_{xc}^{LF}}{G_c} = \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} - \xi^2} [i\xi (\xi^2 + \lambda_2 - 2\lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2}) w_*^{LF} + \lambda_1^{1/2} p^2 (u_*^{LF} + \alpha^{LF})] \quad (2.12)$$

3. Решение задачи в пространстве изображений. Перейдем в уравнениях (1.2) к безразмерным переменным по формулам (2.3) и применим преобразования Лапласа и Фурье (2.4), (2.5). Тогда в пространстве изображений получаем

$$\begin{aligned} \frac{q_{xc}^{LF}}{G_c} &= -2 \left(\frac{2\gamma \xi^2}{1-\nu} + \rho_* p^2 \right) u_*^{LF}, \quad \gamma = \frac{G}{G_c}, \quad \rho_* = \frac{\rho}{\rho_c} \\ \frac{p_1^{LF} + q_{rc}^{LF}}{G_c} &= -2(k^2 \gamma \xi^2 + \rho_* p^2) w_*^{LF} + 2ik^2 \gamma \xi \alpha^{LF} \\ \frac{3q_{xc}^{LF}}{2G_c} &= -3ik^2 \gamma \xi w_*^{LF} - \left(\frac{2\gamma \xi^2}{1-\nu} + 3k^2 \gamma + \rho_* p^2 \right) \alpha^{LF} \end{aligned} \quad (3.1)$$

В случае скользящего контакта $q_{xc}=0$. Подставляя зависимость (2.9) в последние два уравнения (3.1), определяем w_*^{LF} и α^{LF}

$$\begin{aligned} w_*^{LF} &= \frac{p_1^{LF}}{2G_c F(\xi, p)}, \quad \alpha^{LF} = -i \frac{(1-\nu) \nu (\xi, p)}{2G_c F(\xi, p)} p_1^{LF} \\ F(\xi, p) &= \frac{3k^4 \gamma^2 \xi^2 (1-\nu)}{2\gamma \xi^2 + (1-\nu) (\rho_* p^2 + 3k^2 \gamma)} - \frac{k^2 \gamma \xi^2 - \rho_* p^2}{p^2 (1-2\nu_c) \lambda_1^{1/2}} + \frac{2\xi^2 \lambda_2^{1/2}}{p^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$v(\xi, p) = \frac{3k^2\gamma\xi}{(1-\nu)(\rho_*p^2 + 3k^2\gamma) + 2\gamma\xi^2}$$

После этого из системы (2.8) определяются функции C_1 и C_2

$$C_1 = \frac{(\xi^2 + \lambda_2) e^{\lambda_1^{1/2}}}{2G_c F(\xi, p) p^2 \lambda_1^{1/2}} p_1^{LF}, \quad C_2 = -\frac{i\xi e^{\lambda_2^{1/2}}}{G_c F(\xi, p) p^2} p_1^{LF}$$

а также находятся трансформанты перемещений и напряжений в любой точке пространства

$$u_z^{LF} = \frac{u(\xi, p, z_*) p_1^{LF}}{2G_c F(\xi, p) p^2}, \quad u_x^{LF} = -i\xi \frac{u_1(\xi, p, z_*) p_1^{LF}}{2G_c F(\xi, p) p^2 \lambda_1^{1/2}}$$

$$u(\xi, p, z_*) = (\lambda_2 + \xi^2) e^{\lambda_1^{1/2}(1+z_*)} - 2\xi^2 e^{\lambda_2^{1/2}(1+z_*)}$$

$$u_1(\xi, p, z_*) = (\lambda_2 + \xi^2) e^{\lambda_1^{1/2}(1+z_*)} - 2(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} e^{\lambda_2^{1/2}(1+z_*)}$$

$$\sigma_z^{LF} = \frac{\sigma(\xi, p, z_*)}{F(\xi, p)} p_1^{LF}, \quad \sigma_{xz} = i\xi \frac{\tau(\xi, p, z_*)}{F(\xi, p)} p_1^{LF}$$

$$\sigma(\xi, p, z_*) = \frac{(\lambda_2 + \xi^2) [\lambda_1(1-\nu_c) - \nu_c \xi^2]}{\lambda_1^{1/2} p^2 (1-2\nu_c)} e^{\lambda_1^{1/2}(1+z_*)} - \frac{2\lambda_1^{1/2} \xi^2}{p^2} e^{\lambda_2^{1/2}(1+z_*)} \quad (3.3)$$

$$\tau(\xi, p, z_*) = -\frac{\lambda_2 + \xi^2}{p^2} (e^{\lambda_1^{1/2}(1+z_*)} - e^{\lambda_2^{1/2}(1+z_*)})$$

Изгибающий момент в пластине вычисляется по формуле

$$M = 1/3 G h^3 (1-\nu)^{-1} \partial \alpha / \partial x$$

Применяя преобразования Лапласа и Фурье и подставляя зависимость (3.2), получаем для трансформанты изгибающего момента следующее выражение

$$M^{LF}/h^2 = -2/3 \gamma \xi v(\xi, p) p_1^{LF} / F(\xi, p) \quad (3.4)$$

Для жесткого контакта, подставляя (2.11), (2.12) в уравнения (3.1), систему уравнений запишем в виде

$$a_1 u_*^{LF} + i b_1 w_*^{LF} + d_1 \alpha^{LF} = 0$$

$$i a_2 u_*^{LF} + b_2 w_*^{LF} + i d_2 \alpha^{LF} = p_1^{LF} / G_c$$

$$a_3 u_*^{LF} + i b_3 w_*^{LF} + d_3 \alpha^{LF} = 0$$

$$a_1 = \frac{4\gamma\xi^2}{1-\nu} + 2\rho_* p^2 + \frac{\lambda_1^{1/2} p^2}{(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} - \xi^2}$$

$$a_2 = 2\xi \frac{\lambda_1(1-\nu_c) - \nu_c \xi^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} (1-2\nu_c)}{(\lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} - \xi^2) (1-2\nu_c)}, \quad a_3 = \frac{3\lambda_1^{1/2} p^2}{2(\lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} - \xi^2)}$$

$$b_1 = \frac{\xi(\xi^2 + \lambda_2 - 2\lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2})}{(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} - \xi^2}, \quad d_1 = \frac{\lambda_1^{1/2} p^2}{(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} - \xi^2}$$

$$b_2 = -2 \left[k^2 \gamma \xi^2 + \rho_* p^2 + \frac{\lambda_2^{1/2} (1-\nu_c) \eta p^2}{(1-2\nu_c) (\lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} - \xi^2)} \right]$$

$$b_3 = 3\xi \left[k^2 \gamma + \frac{\xi^2 + \lambda_2 - 2(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2}}{2(\lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} - \xi^2)} \right]$$

$$d_2 = 2\xi \left[k^2 \gamma + \frac{(1-\nu_c)\lambda_1 - \nu_c \xi^2 - (1-2\nu_c)(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2}}{(1-2\nu_c)(\lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} - \xi^2)} \right]$$

$$d_3 = \rho_* p^2 + 3k^2 \gamma + \frac{2\gamma \xi^2}{1-\nu} + \frac{3\lambda_1^{1/2} p^2}{2(\lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} - \xi^2)}$$

Разрешая систему (3.5), определяем трансформанты перемещений пластины, жестко сцепленной с упругим полупространством

$$w_*^{LF} = \frac{a_1(a_1 d_3 - a_3 d_1)}{G_c F_1(\xi, p)} p_1^{LF}, \quad u_*^{LF} = i \frac{a_1(b_3 d_1 - b_1 d_3)}{G_c F_1(\xi, p)} p_1^{LF} \quad (3.6)$$

$$\alpha^{LF} = -i \frac{a_1(a_1 b_3 - a_3 b_1)}{G_c F_1(\xi, p)} p_1^{LF}$$

$$F_1(\xi, p) = (a_1 b_2 + a_2 b_1)(a_1 d_3 - a_3 d_1) + (a_1 d_2 - a_2 d_1)(a_1 b_3 - a_3 b_1) \quad (3.7)$$

Трансформанта изгибающего момента в пластине при этом вычисляется по формуле

$$M^{LF}/h^2 = \frac{1}{3} \xi \gamma (1-\nu)^{-1} a_1(a_3 b_1 - a_1 b_3) p_1^{LF}/F_1(\xi, p) \quad (3.8)$$

После этого из системы уравнений (2.10) находятся функции C_1 , C_2 и аналогично случаю скользящего контакта могут быть найдены трансформанты перемещений и напряжений в любой точке пространства.

4. Численное обращение интегральных преобразований и анализ результатов. В качестве примера рассмотрена задача, когда в начальный момент времени к пластине прикладывается сосредоточенная линейная нагрузка, которая перемещается затем в положительном направлении оси x с постоянной скоростью. Для этого случая

$$p_1(x, t) = p_0 \delta(x - ct) \quad (4.1)$$

Переходя к безразмерным переменным и применяя преобразования Фурье и Лапласа, получаем

$$p_1^{LF}(\xi, p) = \frac{p_0}{h} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{p - i\xi M_s}, \quad M_s = \frac{c}{c_s} \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (3.3) и (3.4) и обращая преобразование Фурье, для скользящего контакта получаем

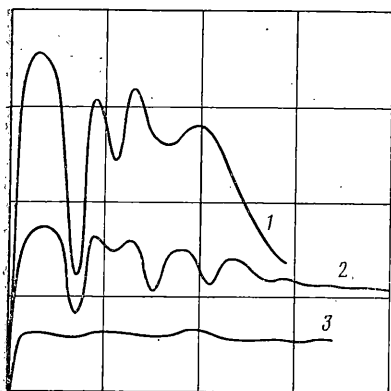
$$\frac{\sigma_z^L(x_*, z_*, p) h}{p_0} = \frac{2}{\pi} \left[p \int_0^\infty \frac{\sigma(\xi, p, z_*) \cos(\xi x_*)}{F(\xi, p) (p^2 + M_s^2 \xi^2)} d\xi + \right. \quad (4.3)$$

$$\left. + M_s \int_0^\infty \frac{\xi \sigma(\xi, p, z_*) \sin(\xi x_*)}{F(\xi, p) (p^2 + M_s^2 \xi^2)} d\xi \right]$$

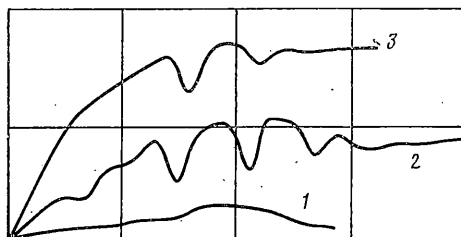
$$\frac{M^L(x_*, p)}{h p_0} = -\frac{4\gamma}{3\pi} \left[p \int_0^\infty \frac{\xi v(\xi, p) \cos(\xi x_*)}{F(\xi, p) (p^2 + M_s^2 \xi^2)} d\xi + \right. \quad (4.4)$$

$$\left. + M_s \int_0^\infty \frac{\xi^2 v(\xi, p) \sin(\xi x_*)}{F(\xi, p) (p^2 + M_s^2 \xi^2)} d\xi \right]$$

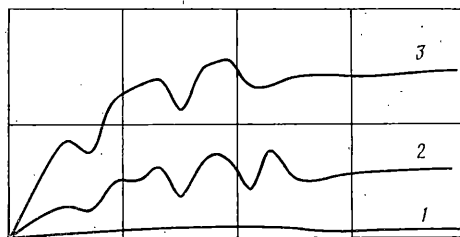
Аналогично записываются выражения для других компонент напряженно-деформированного состояния системы. При исследовании случая жесткого контакта используются формулы (3.6)–(3.8). Интегралы в формулах вида (4.3), (4.4) для различных значений p находились чис-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ленно по методу Файлона [5]. Для построения оригиналов применяется метод численного обращения преобразования Лапласа с помощью смещенных многочленов Лежандра [6]. При этом оригиналы искомых величин вычисляются по формулам $(P_k^*(e^{-t})$ — смещенный многочлен Лежандра)

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) a_k P_k^*(e^{-t}) \quad (4.5)$$

$$(4.6)$$

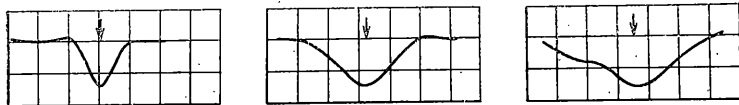
$$P_k^*(e^{-t}) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^{(k)} e^{it}, \quad a_k = \sum_{i=0}^k \alpha_i^{(k)} F(i+1), \quad \alpha_i^{(k)} = (-1)^{k+i} \binom{k}{i} \frac{(k+i)!}{k!i!}$$

Для получения перемещений и напряжений необходимо в формулы (4.5), (4.6) вместо $F(i+1)$ подставить соответствующие изображения из формул вида (4.3), (4.4). Ранее аналогичный прием для численного обращения совместного преобразования Фурье-Лапласа при решении нестационарных задач механики деформируемого твердого тела применялся в [7, 8].

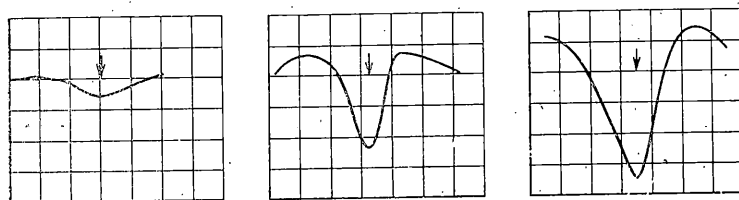
Расчеты проведены для таких значений параметров: $k^2=2/3$; $v=v_c=0,3$; $\rho_*=1$; $M_s=0,5$. Относительная жесткость пластины γ варьировалась.

На фиг. 1 показано изменение во времени контактных напряжений $\sigma_x^* = \sigma_x h/p_0$ на границе раздела пластины и полупространства в точке под нагрузкой ($x=ct$) для случая скользящего контакта между телами. При этом кривая 1 построена для $\gamma=0,5$; 2 — $\gamma=2,0$; 3 — $\gamma=10,0$. Аналогичные кривые для изгибающего момента в пластине при нежестком контакте построены на фиг. 2, а для жесткого контакта на фиг. 3. При этом $M^* = M h^{-1}/p_0$. Как показали проведенные расчеты, для всех значений относительной жесткости пластины с ростом времени контактные напряжения и изгибающий момент стремятся к соответствующим стационарным значениям, полученным в предположении об установлении процесса [3, 4]. Графики, построенные на фиг. 1–3, могут быть использованы для определения времени установления процесса в задачах о воздействии подвижных нагрузок на пластины, лежащие на упругом полупространстве. Надежность предложенного алгоритма проверялась численными экспериментами путем варьирования шага и верхнего предела в методе Файлона, а число членов ряда в формулах вида (4.5) определялось автоматически по достижению заданной относительной точности.

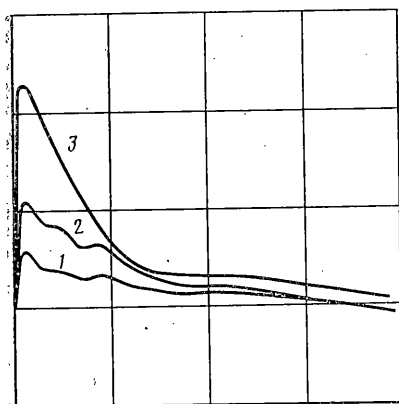
Фиг. 4 иллюстрирует распределение контактных напряжений на границе раздела по длине для различных моментов времени в случае нежесткого контакта при $\gamma=10$. Стрелкой отмечено положение движущейся нагрузки для каждого момента времени. Аналогичные картины изменения изгибающего момента по длине пластины для различных фиксированных положений нагрузки показаны на фиг. 5. Как видно из фиг. 4, 5, в отличие от стационарного режима, когда при $s=0,5c$, имеется симметрия относительно точки приложения нагрузки, здесь во время переходного процесса эта симметрия еще отсутствует и напряжения на прямой волне (перед



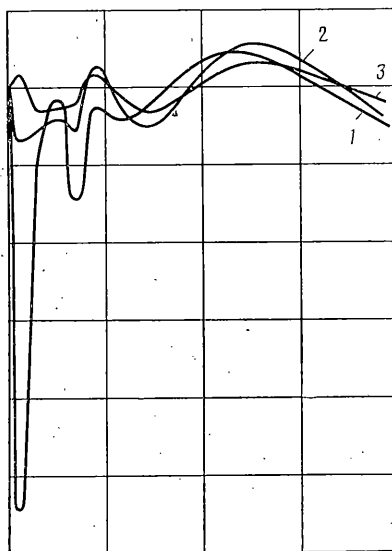
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

нагрузкой) несколько меньше чем на обратной. С ростом времени, как и на фиг. 1-3, происходит установление режима и картины деформирования приближаются к соответствующим установившимся в системе координат, перемещающейся вместе с нагрузкой.

Эффективность алгоритма была также апробирована для случая нестационарного нагружения пластины мгновенно приложенной неподвижной сосредоточенной линейной нагрузкой вида

$$p_1(x, t) = p_0 \delta(x) \delta(t) \quad (4.7)$$

При этом $p^{LF}(\xi, p) = 2^{1/2} \pi^{-1/2} h^{-1} p_0$ и формулы вида (4.3), (4.4) преобразуются очевидным образом. Как показали расчеты, для такого вида нагрузок, у которых законы изменения по x и t не зависят друг от друга, описанный алгоритм с использованием численного обращения преобразования Лапласа с помощью многочленов Лежандра является более устойчивым, чем для нагрузок вида (4.1).

На фиг. 6 и 7 показано изменение изгибающего момента и контактных напряжений под силой ($x=0$) во времени для нагрузки (4.7). Смысл индексов 1-3 тот же, что и на фиг. 1-3. Контактные напряжения для такой нагрузки являются немонотонными функциями времени, причем особенно сильно меняющимися в моменты времени, близкие к моменту внезапного нагружения. Для $\tau > 2$ кривые для разных жесткостей полупространства сближаются и напряжения становятся почти гармоническими затухающими функциями времени. Изгибающий момент в точке приложения нагрузки является более плавной функцией времени, причем при $\tau > 3$ для всех жесткостей основания приближается к своему нулевому значению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бляхман Р. И.* О колебаниях бесконечной пластинки, лежащей на упругом полупространстве под действием движущейся нагрузки в условиях плоской задачи // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1967. № 2. С. 154—155.
2. *Корнев Б. Г.* О движении нагрузки по пластинке, лежащей на упругом основании // Строит. механика и расчет сооружений. 1965. № 6. С. 28—32.
3. *Achenbach J. D., Keshava S. P., Herrmann G.* Moving load on a plate resting on an elastic half space // Trans. ASME Ser. E. J. Appl. Mech. 1967. V. 34. № 4. P. 910—914.
Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механиков. Сер. E. 1967. № 4. С. 183—189.
4. *Пожуев В. И.* Влияние величины постоянной скорости движения нагрузки на реакцию пластины, лежащей на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 112—118.
5. *Крылов В. И., Шульгина Л. Т.* Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966. 370 с.
6. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 223 с.
7. *Селезов И. Т., Ткаченко В. А.* Исследование численным методом обращения неустановившихся движений упругого полупространства.— Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. № 3. С. 239—242.
8. *Пожуев В. И.* Нестационарная задача для цилиндрической оболочки в упругой среде // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будівельник, 1983. Вып. 43. С. 95—98.

Запорожье

Поступила в редакцию
30.III.1989