МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1990

УДК 539.3:534.1

Н. В. БАНИЧУК, А. С. БРАТУСЬ

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ МАЛЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

Рассматривается краевая задача для линейных дифференциальных уравнений, возникающая в динамической теории устойчивости упругих распределенных систем с малой диссипацией. Исследуются случаи, когда вследствие наличия диссипации, величина критического параметра устойчивости меняется как непрерывно так и скачком. В первом случае возмущения, вносимые диссипативными силами называются идеальными, во втором случае – дефектными. Установлены необходимые условия идеальности возмущений, указаны классы возмущений, оказывающие на систему стабилизирующее (дестабилизирующее) влияние. Получена формула, позволяющая находить величину «скачка» критического параметра устойчивости при дефектных возмущениях. Приведены примеры исследования устойчивости сжатых упругих стержней.

1. Основные предположения. Пусть функция прогибов $u(x, t)$ упругой системы определяется следующим дифференциальным уравнением в частных производных

$$A(p)u+\varepsilon B(p)\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \quad 0<x<l, \quad t>0 \tag{1.1}$$

Здесь $A(p)$ и $B(p)$ – дифференциальные операторы вида (n – целое положительное число)

$$A(p)=\sum_{j=0}^{2n} a_j(p)\frac{\partial^j}{\partial x^j}, \quad B(p)=\sum_{j=0}^{m} b_j(p)\frac{\partial^j}{\partial x^j}, \quad m\leqslant 2n$$

с коэффициентами, аналитически зависящими от вещественного параметра p. Функция $u(x, t)$ удовлетворяет некоторым начальным условиям и однородным краевым условиям типа Штурма [1]:

$$(C_{1j}(p)u)_{x=0}=0, \quad (C_{2j}(p)u)_{x=l}=0 \quad (j=1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

где C_{1j} и C_{2j} – линейные дифференциальные операторы того же вида, что и операторы $A(p)$ и $B(p)$, и имеющие порядок меньшей чем $2n$ единиц.

Уравнениями вида (1.1) описываются свободные колебания сжатых упругих элементов (балок, колонн, арок, пластин, оболочек и др.) при наличии малого демпфирования. Оператор $A(p)$ определяется жесткостными свойствами упругого тела и способом его сжатия. Второе слагаемое в (1.1) характеризует малое демпфирование. Структура оператора $B(p)$ зависит от вида диссипативных сил действующих в системе. Операторы граничных условий $C_{1j}(p)$, $C_{2j}(p)$ зависят от способов закрепления и вида нагрузок, прикладываемых к концам. В общем случае начально-краевая задача (1.1), (1.2) является несамосопряженной.

Наряду с уравнением (1.1) учитывающим возмущения, вносимые диссипативными силами ($\varepsilon\neq 0$) рассмотрим уравнение

$$A(p)u(x, t)+\partial^2 u(x, t)/\partial t^2=0 \tag{1.3}$$

получаемое из (1.1) при $\varepsilon=0$.

Для исследования устойчивости форм равновесия упругой системы (1.1) при различных интенсивностях демпфирования ($0<\varepsilon<1$) положим $u(x, t)=v(x)\exp(i\omega t)$, где i — мнимая единица, ω — частота, $v(x)$ — амплитудная функция. Подставляя это представление в (1.1), (1.2) приходим к краевой задаче на собственные значения

$$A(p)v(x)+i\varepsilon\omega B(p)v(x)=\omega^2 v(x) \qquad (1.4)$$

$$(C_{1j}(p)v)_{x=0}=0,\ (C_{2j}(p)v)_{x=l}=0\ (j=1, 2, \ldots, n) \qquad (1.5)$$

зависящей от параметра нагрузки p. Частота ω и амплитудная функция $v(x)$ являются соответственно, собственным значением и собственной функцией задачи (1.4), (1.5).

При каждом $\varepsilon>0$, критическим значением параметра p назовем величину p_ε, являющуюся нижней гранью тех значений параметра p, для которых хотя бы одно собственное значение $\omega(\varepsilon, p)$ задачи (1.4), (1.5) имеет отрицательную мнимую часть. Здесь критичность понимается в том смысле, что при $p<p_\varepsilon$ система (1.4), (1.5) устойчива, тогда как при всех достаточно малых положительных значениях разности $p_\varepsilon-p>0$ она неустойчива. Множество точек (ε, p_ε) в плоскости εp задает некоторую кривую, определяющую область устойчивости системы (1.4), (1.5) от области неустойчивости. Далее будем называть ее критической кривой.

Если выполняется условие

$$\lim_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon=p_0 \qquad (1.6)$$

где p_0 — критическое значение параметра для системы, полученной из (1.4) при $\varepsilon=0$:

$$A(p)v(x)=\omega^2 v(x) \qquad (1.7)$$

то возмущение системы (1.3) в виде (1.1) будем называть идеальным. В противном случае возмущение назовем дефектным. Величину $d_A(B)=$ $=p_0-p_d$, где

$$\lim_{\varepsilon\to +0} p_\varepsilon=p_d \qquad (1.8)$$

назовем дефектом возмущения.

Далее будем говорить, что идеальное возмущение оказывает стабилизирующее влияние, если в достаточно малой полосе $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ плоскости εp выполняется условие $p_\varepsilon\geqslant p_0$. В противном случае возмущение будем называть дестабилизирующим.

Известно [2], что диссипативные силы, имеющие полную диссипацию, оказывают на консервативную систему стабилизирующее влияние. Для неконсервативных систем, это вообще говоря, не верно и приложение к системе малых диссипативных сил (даже имеющих полную диссипацию) может привести к эффекту дестабилизации [3—12]. В этом случае для величин p_d, p_0 из (1.6), (1.8) выполняется неравенство $p_d\leqslant p_0$. Поэтому дефект дестабилизации $d_A(B)\geqslant 0$.

Предположим, что уравнение $A(p_0)v(x)=0$ с краевыми условиями (1.5) имеет лишь тривиальное решение: $v(x)=0$. Тогда краевая задача на собственное значение (1.5), (1.7) будет иметь не более счетного множества собственных значений $\{\omega_j^2(p_0)\}_{j=1}^{\infty}$ не имеющих конечной предельной точки [1].

Предположим также, что при $p=p_0$ какая-либо частота (например, первая) $\omega_1(p)$ невозмущенной системы удовлетворяет условию $\operatorname{Im}\omega(p_0)=0$. Выделим случай, характеризуемый следующими предположениями.

1. При $p<p_0$ все собственные значения являются простыми и вещественными.

2. При $p=p_0$, первое собственное значение становится двукратным $\omega_1^2(p_0)=\omega_2^2(p_0)$, отличным от нуля, и ему соответствует единственная собственная функция v_1^0, причем при $p>p_0$ у него появляется отрицательная невещественная составляющая.

3. Остальные собственные значения $\omega_j^2(p)$ ($j=3, 4, \ldots$) в некоторой окрестности точки $p=p_0$ при $p>p_0$ остаются простыми и вещественными. Описанная ситуация является типичной для несамосопряженных краевых

задач вида (1.5), (1.7) и соответствует динамическому типу потери устойчивости (флаттер).

Целью данной работы является установление необходимых условий идеальности возмущений, вносимых в систему (1.1) диссипативными членами, а также выделение классов возмущений оказывающих на исходную систему стабилизирующее (дестабилизирующее) влияние.

2. Уравнение критической линии. Справедлив следующий результат.

Утверждение 1. Если в плоскости εp существует критическая линия, то ее уравнение имеет вид $R(\varepsilon^2, p)=0$, где $R(z, p)$ — представляет ряд по z с коэффициентами, зависящими от параметра p.

Доказательство. Пусть $\{v_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ — система собственных и присоединенных функций задачи (1.5), (1.7) при $p=p_0$. Из результатов работы [13] следует, что эта система полна и образует базис Рисса в пространстве L_2. Приближенное решение краевой задачи (1.4), (1.5) будем искать в виде разложения по системе $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ полагая

$$v^n(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j v_j(x) \tag{2.1}$$

где c_j — некоторые, вообще говоря комплексные коэффициенты. Соответствующее приближенное собственное значение задачи (1.4), (1.5) обозначим через ω^n.

Рассмотрим те значения параметров ε, p при которых задача (1.4), (1.5) имеет решения с вещественными значениями. Подставляя разложение (2.1) в (1.4) и умножая получающееся при этом соотношение на базисные функции $v_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ получим систему линейных алгебраических уравнений, служащую для определения коэффициентов разложения c_j:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(\alpha_{sj}+i\varepsilon\omega^n\beta_{sj}-(\omega^n)^2\gamma_{sj})=0 \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{2.2}$$

$$\alpha_{sj}=(A(p)v_j, v_s),\ \beta_{sj}=(B(p)v_j, v_s),\ \gamma_{sj}=(v_j,\ v_s)$$

Здесь и далее скобки означают скалярные произведения функций в $L_2(0, l)$. Для того, чтобы система однородных уравнений (2.2) имела ненулевое решение, необходимо, чтобы детерминант этой системы был равен нулю, т. е. $\Delta_n=\det[\alpha_{sj}+i\varepsilon\omega^n\beta_{sj}-(\omega^n)^2\gamma_{sj}]=0$, где p, ε, ω^n, α_{sj}, β_{sj}, γ_{sj} — вещественные величины. Поэтому будет справедливо представление

$$\Delta_n=P_n((\omega^n)^2,\ \varepsilon\omega^n,\ p)+i\varepsilon\omega^n Q_n((\omega^n)^2,\ \varepsilon\omega^n,\ p)=0 \tag{2.3}$$

Здесь $P_n(z, y, p)$ $(Q_n(z, y, p)$ — многочлен по z и y суммарной степени n (соответственно $n-1$) четный по y, с коэффициентами, аналитически зависящими от p. Если для некоторых ε, p уравнение (2.3) имеет по крайней мере одно вещественное решение $\omega^n\neq 0$, то для этих ε, p, ω^n имеем $P_n((\omega^n)^2,\ \varepsilon\omega^n,\ p)=Q_n((\omega^n)^2,\ \varepsilon\omega^n,\ p)=0$. Отсюда можно исключить ω^n, составив, например, результат левых частей рассматриваемых, как многочлен от ω^{2n}.

В итоге получим уравнение вида $R_n(\varepsilon^2,\ p)=0$, где $R_n(z, p)$ — многочлен по z с коэффициентами аналитически зависящими от p. Устремим $n\to\infty$. В силу базисности системы $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ имеем $\omega^n\to\omega$ [15], где ω — вещественное собственное значение задачи (1.4)—(1.5).

Уравнение $R_n(\varepsilon^2,\ p)=0$ в пределе перейдет в уравнение $R(z,\ p)=0$, где $R(z,\ p)$ — ряд по степеням z с коэффициентами зависящими от p. Это уравнение и определяет критическую линию в плоскости εp. Из определения критического значения p_ε ясно, что $R(\varepsilon^2, p_\varepsilon)=0$.

Ниже приведем следующее определение.

Определение. Возмущение системы (1.3) в виде (1.1) является регулярным, если функция $R(z,\ p)$ — непрерывна в некоторой окрестности $U=\{p,\ \varepsilon: 0<\varepsilon<\varepsilon_0,\ |p-p_d|<\delta\}$ точки $(0,\ p_d)$ плоскости εp, для которой $R(0,$

$p_d)=0$ и имеет в U непрерывные частные производные, причем $\partial R(0, p_d)/\partial p \neq 0$.

Для регулярных возмущений, в силу теоремы о неявной функции в полосе $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ плоскости εp имеет место представление

$$p_\varepsilon = p_d + \varepsilon^2 p_2 + o(\varepsilon^2) \tag{2.4}$$

где коэффициенты p_d и p_2 не зависят от ε. В частности, $p_2 = -R_z'(0, p_d)/R_p'(0, p_d)$.

В дальнейшем все возмущения считаем регулярными.

3. Разложение в ряды. Пусть $p_d = p_0$ и выполняются предположения 1—3 п. 1. Тогда на любой кривой вида (2.4) справедливы разложения по степеням малого параметра ε для величин квадратов частот (собственных значений) и собственных функций краевой задачи (1.4), (1.5) [16—17].

Если $\omega_j^2(p_0) = \tau_j^2 \neq 0$ — простые собственные значения задачи (1.5), (1.7) ($j=3, 4, \ldots$), то для собственных значений и соответствующих собственных функций возмущенной задачи (1.4), (1.5) имеют место разложения [16]:

$$\omega_{j,\varepsilon} = \omega_j^2(p_0) + \varepsilon\mu_{j1} + \varepsilon^2\mu_{j2} + \ldots \tag{3.1}$$

$$v_j^\varepsilon(x) = v_j^0(x) + \varepsilon v_j^1(x) + \varepsilon^2 v_j^2(x) + \ldots \tag{3.2}$$

Для первых двух двукратных собственных значений $\omega_1^2(p_0) = \omega_2^2(p_0) = \tau_1^2 \neq 0$ задачи (1.5), (1.7), которым соответствует единственная собственная функция $v_1^0(x)$, разложения строятся по степеням $\varepsilon^{1/2}$ [17]

$$\omega_{1,\varepsilon}^2 = \omega_1^2(p_0) + \varepsilon^{1/2}\mu_{11} + \varepsilon\mu_{12} + \ldots \tag{3.3}$$

$$v_1^\varepsilon(x) = v_1^0(x) + \varepsilon^{1/2} v_1^1(x) + \varepsilon v_1^2(x) + \ldots \tag{3.4}$$

Из (3.1) и (3.3) получим представление для величин возмущенных частот

$$\omega_{j,\varepsilon} = \pm\tau_j \pm \frac{\varepsilon}{2\tau_j}\mu_{j1} \pm \frac{\varepsilon^2}{2\tau_j}\left(\mu_{j2} - \frac{\mu_{j1}^2}{4\tau_j}\right) + \ldots$$

$$\omega_{1,\varepsilon} = \pm\tau_1 \pm \frac{\varepsilon^{1/2}}{2\tau_1}\mu_{11} \pm \frac{\varepsilon}{2\tau_1}\left(\mu_{12} - \frac{\mu_{11}^2}{4\tau_1}\right) + \ldots \tag{3.5}$$

Не умаляя общности можно считать, что собственные функции нормированы следующим образом: $(v_j^\varepsilon, v_j^0) = 1$. Воспользуемся представлениями (2.4), (3.1)—(3.5). Подставляя их в уравнение (1.4) и выделяя члены при одинаковых степенях ε, получим уравнения для определения величин μ_{j1} и v_j^1 ($j=1, 2, \ldots$). В случае, когда $\omega_j^2(p_0)$ ($j=3, 4, \ldots$) — простые собственные значения, будем иметь

$$L_0 v_j^0 = 0, \quad L_0 v_j^1 = \mu_{j1} v_j^0 \mp i\tau_j B_0 v_j^0$$
$$L_0 = A_0 - \tau_j^2, \quad A_0 = A(p_0), \quad B_0 = B(p_0) \tag{3.6}$$

Функции v_j^0 и v_j^1 удовлетворяют краевым условиям (1.5) при $p=p_0$. Для первого двукратного собственного значения приходим к уравнениям

$$L_0 v_1^0 = 0, \quad L_0 v_1^1 = \mu_{11} v_1^0, \quad L_0 v_1^2 = \mu_{11} v_1^1 + \mu_{12} v_1^0 \mp i\tau_1 B_0 v_1^0 \tag{3.7}$$

Отметим, что в силу предположений 1—3 п. 1 при $p<p_0$ все собственные значения являются простыми и для них справедливы представления (3.1), (3.2) и равенства (3.6) при всех $j=1, 2, \ldots$.

4. Необходимое условие идеальности возмущенной системы при динамической форме потери устойчивости. Рассмотрим ситуацию, сформулированную в предположениях 1—3 п. 1. Известно [3—12], что наличие двукратного собственного значения $\omega_1^2(p_0) = \omega_2^2(p_0) = \tau_1^2 \neq 0$ (p_0 — критическое значение параметра), которому соответствует единственная собственная функция $v_1^0(x)$ является типичным для неконсервативных систем вида (1.5), (1.7).

Введем в рассмотрение сопряженную к (1.5), (1.6) краевую задачу на собственное значение

$$A^*(p)z(x) = \omega^2 z(x), \quad (C_{1j}^*(p)z)_{x=0} = 0, \quad (C_{2j}^*(p)z)_{x=l} = 0 \quad (j=1, 2, \ldots, n) \tag{4.1}$$

где $A^*(p)$ — формально сопряженный дифференциальный оператор к оператору $A(p)$, а C_{1j}^*, C_{2j}^* соответствующие сопряженные операторы, задающие краевые условия. Пусть $z_1^0(x)$ — собственная функция, отвечающая двукратному собственному значению $\omega_1^2(p_0)$. Справедливо равенство [17]:

$$(v_1^0,\ z_1^0)=0 \tag{4.2}$$

Утверждение 2. Пусть выполняются предположения 1-3 п. 1. Тогда для того, чтобы возмущение системы (1.3) в виде (1.1) было идеальным, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$(B_0v_1^0,\ z_1^0)=0 \tag{4.3}$$

Доказательство. В этом случае имеют место представления (3.3), (3.4) и уравнения (3.7). Рассмотрим второе уравнение в (3.7). Оно разрешимо, поскольку в силу (4.2) выполняются условия альтернативы Фредгольма. Следовательно существует вещественный оператор $G(p_0)=G_0$ действующий из L_2 в L_2 (функция Грина), что

$$v_1^1(x)=\mu_{11}G_0v_1^0(x) \tag{4.4}$$

Условие разрешимости третьего уравнения в (3.7) с учетом предыдущего соотношения дает равенство

$$\mu_{11}^2(G_0v_1^0,\ z_1^0)=\pm i\tau(B_0v_1^0,\ z_1^0) \tag{4.5}$$

Из вещественности произведений $(G_0v_1^0,\ z_1^0)$ и $(B_0v_1^0,\ z_1^0)$ следует, что величина μ_{11} (коэффициент при $\varepsilon^{1/2}$ в разложении (3.3) квадрата частоты $\omega^2_{1,\varepsilon}$) будет при $(B_0v_1^0,\ z_1^0)\neq0$ невещественным. Из второго разложения (3.5) при достаточно малом ε_0 при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, получим, что тогда $\operatorname{Im}\omega_{1,\varepsilon}<0$ на любой критической кривой вида (2.3) с $p_d=p_0$. Следовательно необходимо, чтобы выполнялось условие (4.3).

Замечание 1. Из доказательства утверждения 2 вытекает, что если условие (4.3) не выполняется, то при достаточно малом ε_0 в полосе $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ плоскости εp вдоль любых кривых вида (2.3) с $p_d=p_0$ возмущенная система (1.1), (1.2) неустойчива. Поэтому если существует критическая кривая вида (2.3), то $p_d<p_0$. Последнее означает, что происходит дестабилизация системы. Условие (4.3) является необходимым для того, чтобы воздействие диссипативных сил оказывало на систему стабилизирующее влияние. Эти условия необходимые для того, чтобы была справедлива теорема типа Кельвина — Тэта — Четаева [1, 18].

Замечание 2. Из (4.2) следует простой достаточный признак выполнения условия (4.3): если собственная функция v_1^0 исходной задачи (1.5), (1.7) является собственной для оператора $B(p_0)$, то условие заведомо (4.3) выполняется.

В качестве примера рассмотрим задачу об устойчивости упругого стержня защемленного в точке $x=0$ и сжатого следящей силой величины p, приложенной к другому концу $(x=1)$. Учитывая внутреннее трение при малых колебаниях стержня приходим к следующей краевой задаче на собственные значения

$$\begin{gathered} d^4v(x)/dx^4+pd^2v(x)/dx^2+i\varepsilon\omega d^4v(x)/dx^4=\omega^2v(x) \\ v(0)=v_x(0)=0,\ v_{xx}(1)=v_{xxx}(1)=0 \end{gathered} \tag{4.6}$$

служащей для определения амплитудной функции прогибов $U(x)$ и частот колебаний ω. Нижним индексом x здесь отмечаются производные по пространственной переменной. Внутреннее трение, введенное в (4.6), отвечает модели Фойхта.

Невозмущенная задача, получающаяся из (4.6) при $\varepsilon=0$, характерна тем, что при увеличении параметра нагрузки p $(p\geqslant0)$ две низкие частоты сближаются при $p=p_0=20{,}05$. Образуется двукратное собственное значение. При этом образовавшемуся двукратному собственному значению отвечает лишь одна собственная функция [4]. Можно показать, что при $p_0=20{,}05$ условие (4.3) не выполнено. Тем самым устанавливается, что возмущение системы посредством учета внутреннего трения по Фойхту не является идеальным.

Если вместо внутреннего трения стержень подвержен действию внешнего трения, то его динамические характеристики меняются значительно. Оператор B_0 в случае внешнего трения является тождественным. Поэтому, как это следует из замечания *2*, при учете внешнего трения удовлетворяется необходимое условие идеальности возмущений (4.3).

5. Асимптотика критической кривой. Структура операторов реализующих идеальные возмущения. Пусть

$$p^1(\varepsilon)=p_0+\varepsilon^2 p_2^1+\varepsilon^4 p_4^1+\ldots \tag{5.1}$$

некоторая кривая в плоскости εp с произвольными коэффициентами p_2^1, $p_4^1, \ldots$. Также как и в случае утверждения *2* справедлива формула (4.5) и следовательно, если система (1.4), (1.5) устойчива вдоль кривой $p^1(\varepsilon)$, то выполняется условие (4.3), причем $\mu_{11}=0$. Но тогда из (4.4) следует, что $v_1^1(x)=0$. Предположим, что $(G_0 v_1^0, z_1^0)\neq 0$. Третье уравнение в (3.7) разрешимо относительно функции $v_1^2(x)$, поскольку выполняется альтернатива Фредгольма и его правая часть ортогональна функции $z_1^0(x)$ — являющейся решением сопряженной задачи (4.1) при $p=p_0$. Тогда, также как и в случае (4.4) справедливо равенство

$$v_1^2(x)=\mu_{12}G_0 v_1^0 \mp i\tau_1 G_0 B_0 v_1^0 \tag{5.2}$$

где G_0 — вещественный оператор, действующий из L_2 в L_2, определенный ранее.

Аналогично уравнениям (3.7) запишем уравнение, получающееся при подстановке разложений (3.3)—(3.5) представления (5.1) в (1.4) и выделении членов содержащих множитель ε^2:

$$L_0 v_1^4=\mu_{12}v_1^2+\mu_{14}v_1^0-p_2^1 A_0^p v_1^0 \mp i\tau_1 B_0 v_1^2 \mp \frac{i}{2\tau_1}\mu_{12}B_0 v_1^0, \quad A_0^p=d(A(p_0))/dp$$

С учетом равенства (4.3) и (5.2) условие разрешимости этого уравнения дает квадратное уравнение относительно величин μ_{12} (коэффициента при ε в представлении $\omega_{1,\varepsilon}^2$ в виде (3.3)):

$$\begin{gathered}\mu_{12}^2 R_0 \mp i\tau_1 R_1 \mu_{12}-R_2=0\\ R_0=(G_0 v_1^0,\ z_1^0),\qquad R_1=(B_0 G_0 v_1^0,\ z_1^0)+(G_0 B_0 v_1^0,\ z_1^0)\\ R_2=\tau_1^2(B_0 G_0 v_1^0,\ z_1^0)+p_2^1(A_0^p v_1^0,\ z_1^0)\end{gathered} \tag{5.3}$$

Из представления (3.5) следует, что для того, чтобы вдоль кривой (5.1) выполнялось неравенство $\operatorname{Im}\omega_{1,\varepsilon}>0$, гарантирующее при достаточно малых ε устойчивость системы (1.4), (1.5) должны выполняться условия: $R_1R_0>0$, $R_2R_0>0$. Причем, если $R_2<0\,(>0)$ при $R_0>0\,(<0)$, то при достаточно малых ε_0 в полосе $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ имеем $\operatorname{Im}\omega_{1,\varepsilon}<0$. Следовательно при $R_2=0$ кривая (5.1) в плоскости εp отделяет в этой полосе область устойчивости системы (1.4), (1.5) от области неустойчивости. Условие $R_2=0$ при $(A_0^p v_1^0,\ z_1^0)\neq 0$ позволяет вычислить коэффициент p_2^1 кривой (5.1).

Утверждение 3. Пусть выполнятся условия (4.3). Если справедливо неравенство $R_1R_0>0$ (величины R_0, R_1, определены в (5.3)) и $(A_0^p v_1^0,$ $z_1^0)\neq 0$, то при достаточно малом ε_0 критическая кривая, выходящая из точки p_0 имеет в полосе $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ представление

$$p_\varepsilon=p_0-\frac{\tau_1^2(B_0 G_0 B_0 v_1^0, z_1^0)}{(A_0^p v_1^0, z_1^0)}\varepsilon^2+o(\varepsilon^2) \tag{5.4}$$

Замечание. Случай $R_0=(G_0 v_1^0,\ z_1^0)=0$ приводит в (5.3) к формуле $\mu_{12}=\pm iR_2/(\tau_1 R_2)$. Поэтому из (3.5) имеем, что при $R_1R_2>0$ вдоль кривой (5.1) выполнится $\operatorname{Im}\omega_{1,\varepsilon}>0$ $(0<\varepsilon<\varepsilon_0)$. Формула (5.4) при этом сохраняет свой вид.

Предположим, что собственные функции $v_1^0(x)$ и $z_1^0(x)$ прямой и сопряженной краевой задачи (1.5), (1.7) и (4.1) таковы, что они являются собственными функциями операторов $B_0=B(p_0)$, $B_0^*=B^*(p_0)$:

$$B_0v_1^0=l_1v_1^0, \quad B_0^*z_1^0=l_2z_1^0 \tag{5.5}$$

где l_1 и l_2 — некоторые вещественные числа. В силу (4.2) необходимое условие идеальности возмущения системы (1.6) в виде (1.4) выполняется.

Используем равенство $(B_0G_0v_1^0, z_1^0)=(G_0v_1^0, B_0^*z_1^0)$. Тогда из (5.5) следует, что величина R_1, определенная в (5.3) примет вид $R_1=(l_1+l_2)\times\times(G_0v_1^0, z_1^0)$. При $l_1+l_2>0$ условия утверждения *3* будут выполнены. При этом уравнение (5.4), задающее асимптотику критической кривой, примет вид

$$p_\varepsilon=p_0-\tau_1^2l_1l_2\frac{(G_0v_1^0, z_1^0)}{(A_0^pv_1^0, z_1^0)}\varepsilon^2+o(\varepsilon^2) \tag{5.6}$$

Отсюда имеем.

Следствие 1. Пусть выполняются условия (5.5), причем $l_1>0$ и $l_2>0$, тогда оператор $B(p)$ реализует идеальное возмущение системы (1.6) и это возмущение имеет стабилизирующий характер.

Следствие *1* является обобщением теоремы Кельвина — Тэта — Четаева на случай неконсервативных систем.

6. Условие дефектности возмущений. Докажем следующее.

Утверждение 4. Если оператор $B(p)$ реализует дефектное возмущение системы (1.3) в виде (1.1), то выполняется неравенство

$$(v_1, z_1)(B_dv_1, z_1)\geqslant 0 \tag{6.1}$$

где v_1, z_1 — собственные функции прямой и сопряженной краевых задач на собственные значения (1.5), (1.7), и (4.1), соответствующие первому (наименьшему) собственному значению при $p=p_d<p_0$, $B_d=B(p_d)$.

Неравенство (6.1) устанавливается на основе следующих рассмотрений.

Так как $p_d<p_0$, то из предположений 1—3 сделанных в пункте 1 следует, что собственное значение $\omega_1^2(p_0)$ краевой задачи (1.5), (1.7) является простым и отличным от нуля. Поэтому $(v_1, z_1)\neq 0$. В этом случае имеют место разложения (3.1), (3.2) и уравнения (3.6) с $p=p_d$. Второе из уравнений (3.6) разрешимо, если выполняется равенство

$$\mu_{11}(v_1, z_1)=\pm i\tau_1(B_dv_1, z_1) \tag{6.2}$$

Из (3.5) и (6.2) вытекает, что для устойчивости возмущенной системы (1.1) необходимо выполнение условия (6.1) на критической линии вида (2.7).

Сформулируем следствие, вытекающее из доказанного утверждения.

Следствие 2. Пусть $p^1(\varepsilon)=p_d^1+\varepsilon^2p_2^1+o(\varepsilon^2)$ некоторая кривая в плоскости εp выходящая из точки $(0, p_d^1)$ оси ординат. Если при $p=p_d^1$ (6.1) выполняется как строгое неравенство для собственной функции $v_j(x)$, $z_j(x)$ прямой и сопряженной задачи (1.5), (1.7) и (4.1), то при достаточно малом $\varepsilon_0>0$ система (1.1) будет асимптотически устойчива для точек кривой $p^1(\varepsilon)$ при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$. Если же неравенство (6.1) не выполняется, то в указанной области система (1.1) не является устойчивой.

Доказательство следствия основывается на представлениях (3.1), (3.2) для простых собственных чисел и соответствующих им собственных функций, и повторяет аргументы, использованные при доказательстве необходимого условия дефектности (6.1).

Предполагая оператор $B(p)$ заданным, рассмотрим множество $Q_B(p)$ значений параметра p, такое что

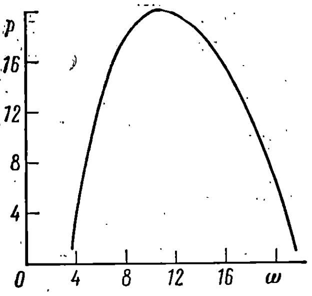
$$Q_B(p)=\{p\colon p<p_0,\ (v, z)(B(p)v, z)\geqslant 0\} \tag{6.3}$$

где v и z — собственные функции прямой и сопряженной краевых задач на собственные значения (1.5), (1.7) и (4.1), найденные при $p<p_0$.

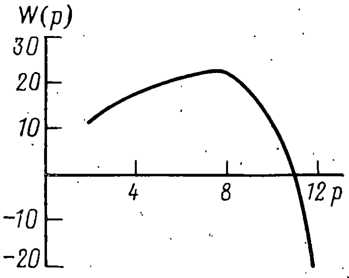
Обозначим через $p^*(B)$ верхнюю грань всех значений $p\in Q_B(p)$. Если множество $Q_B(p)$ является пустым, то будем считать, что $p^*(B)=-\infty$.

Утверждение 5. Дефект оператора $B(p)$ определяется по формуле

$$d_A(B)=p_0-p^*(B) \quad (p_d=p^*(B)) \tag{6.4}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Доказательство этого важного утверждения, позволяющего эффективно определять величину дефекта оператора возмущения, проводится аналогично тому как это делалось в [14] при изучении конечномерного случая и здесь не приводится.

Из сделанных определений вытекает, что если для данного оператора $B(p)$ множество $Q_B(p)$ является пустым, то представление (2.4) не выполняется ни при каких значениях величин p_d.

Заметим, что для построения множества (6.3) достаточно рассматривать изменения знака выражения $(v, z)(B(p)v, z)$ при изменении параметра p, используя при этом лишь первые собственные функции v_1 и z_1 прямой и сопряженной краевых задач (1.5), (1.7) и (4.1).

В качестве примера рассмотрим задачу об устойчивости упругого стержня защемленного в точке $x=0$ и сжатого следящей силой в точке $x=1$. Невозмущенная краевая задача, описывающая поведение системы при отсутствии диссипативных и получающаяся из (4.9) при $\varepsilon=0$, является несамосопряженной. Сопряженная к ней краевая задача имеет вид

$$\begin{gathered} d^4z(x)/dx^4+pd^2z(x)/dx^2-\omega^2z(x)=0 \\ z(0)=z_x(0)=0, \quad z_{xx}(1)+pz(1)=0 \\ z_{xxx}(1)+pz_x(1)=0 \end{gathered} \tag{6.5}$$

При этом слагаемое в (4.9), обусловленное малой диссипацией не зависит от параметра нагрузки p, а соответствующий дифференциальный оператор $B=d^4/dx^4$ с граничными условиями (4.6) является отрицательно определенным.

Рассмотрим множество $Q_B(p)$ определенное посредством (6.3) и формулу (6.4). Исследуем знак выражения $W(p)=(v, z)(d^4v/dx^4, z)$, где $v(x)$ и $z(x)$ — первые собственные функции прямой задачи (4.6) с $\varepsilon=0$ и сопряженной задачи (6.5). В этом случае характеристическое уравнение имеет вид [4]:

$$p^2+2\omega^2+p\omega\,\mathrm{sh}\,r_2\sin r_1+2\omega^2\,\mathrm{ch}\,r_2\cos r_1=0$$

$$r_1^2=\frac{p}{2}+\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2+\omega^2\right)^{1/2}, \qquad r_2^2=-\frac{p}{2}+\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2+\omega^2\right)^{1/2}$$

График зависимости первых двух частот от значений параметра дан на фиг. 1. При увеличении значения параметра p частоты сближаются и становятся кратными при $p=20{,}05$. Собственные функции $v(x)$ и $z(x)$ разыскиваются в следующем виде:

$$k(\sin r_1x)-\left(\frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{sh}\,r_2x\right)+\cos r_1x-\mathrm{ch}\,r_2x$$

$$k=-(r_1^2\cos r_1+r_2^2\,\mathrm{ch}\,r_2)/(r_1^2\sin r_1+r_1r_2\,\mathrm{sh}\,r_2)$$

для функции $v(x)$ и

$$k=(r_2^2\sin r_1-r_1r_2\,\mathrm{ch}\,r_2)/(r_2^2\cos r_1+r_1^2\,\mathrm{sh}\,r_2)$$

для функции $z(x)$.

На фиг. 2 показан график функции $W(p)$. Знак $W(p)$ меняется при $p^*=10{,}9$. Согласно утверждению *5* это значение определяет дефект возмущения вызванного наличием сил внутреннего трения, т. е. $p_d=10{,}9$, $d_A(B)=9{,}15$.

Заметим, что значение $p_d=10{,}94$ получено ранее другим способом в работе [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
3. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing.-Arch. 1952. V. 20. No. 1. P. 49–56.
4. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
5. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
6. *Hermann G., Jong I.-C.* On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. No. 3. P. 592–597.
7. *Nemat-Nasser S., Herrmann G.* Some general considerations concerning the destabilizing effect in nonconservative systems // ZAMP. 1966. V. 17. No. 2. P. 305–313.
8. *Nemat-Nasser S., Prasad S., Herrmann G.* Destabilizing effect of velosity-dependent forces in nonconservative continuous systems // AYAA Journal. 1966. V. 4. No. 7. P. 1276–1280.
9. *Bolotin V. V., Zhinzher N. I.* Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces // Intern. J. Solids and Struct. 1969. V. 5. No. 9. P. 965–989.
10. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об устойчивости вязко-упругих стержней // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 2. С. 78–87.
11. *Милославский А. И.* О дестабилизирующем воздействии малого демпфирования на абстрактные неконсервативные системы // Успехи мат. наук. 1986. Т. № 1. С. 199–200.
12. *Денисов Г. Г., Новиков В. В.* Об устойчивости упругих систем с малым внутренним трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 41–47.
13. *Михайлов В. П.* О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 5. С. 981–984.
14. *Баничук Н. В., Братусь А. С., Мышкис А. Д.* Об эффектах стабилизации и дестабилизации в неконсервативных системах // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 206–214.
15. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
16. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, 740 с.
17. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3–80.
18. *Zajac E. E.* The Kelvin–Tait–Chetaev theorem and extensions // J. Astronaut. Sci. 1964. V. 11. No. 2. P. 46–49.

Москва

Поступила в редакцию
10.IV.1989