МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1990

УДК 531.383


Д. Д. ЛЕЩЕНКО, С. Н. САЛЛАМ

# ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, когда восстанавливающий момент зависит от угла нутации. Предполагается, что угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии тела и две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка. Специальным образом вводится малый параметр, применяется метод усреднения. Получена усредненная система уравнений движения в первом приближении. Рассмотрены примеры.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки $O$ под действием восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации $\theta$, и возмущающего момента. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{gathered}
Ap^{\cdot}+(C-A)qr=k(\theta)\sin\theta\cos\varphi+M_1\\
Aq^{\cdot}+(A-C)pr=-k(\theta)\sin\theta\sin\varphi+M_2\\
Cr^{\cdot}=M_3,\ M_i=M_i(p,q,r,\psi,\theta,\varphi,t)\quad(i=1,2,3)\\
\psi^{\cdot}=(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta,\ \theta^{\cdot}=p\cos\varphi-q\sin\varphi\\
\varphi^{\cdot}=r-(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta
\end{gathered}\tag{1.1}$$

Динамические уравнения Эйлера записаны в проекциях на главные оси инерции тела, проходящие через точку $O$. Здесь $p$, $q$, $r$ – проекции вектора угловой скорости тела на эти оси, $M_i$ $(i=1, 2, 3)$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, являющиеся периодическими функциями углов Эйлера $\psi$, $\theta$, $\varphi$ с периодами $2\pi$, $\psi$ – угол прецессии, $\theta$ – угол нутации, $\varphi$ – угол собственного вращения, $A$ – экваториальный, а $C$ – осевой моменты инерции тела относительно точки $O$, $A\neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, зависящий от угла нутации $k(\theta)$. В случае тяжелого волчка имеем $k=mgl$, где $m$ – масса тела, $g$ – ускорение силы тяжести, $l$ – расстояние от неподвижной точки $O$ до центра тяжести тела.

Возмущающие моменты $M_i$ в (1.1) предполагаются известными функциями своих аргументов. При отсутствии возмущений $M_i=0$, $i=1, 2, 3$ и $k(\theta)=\mathrm{const}$ уравнения (1.1) отвечают случаю Лагранжа.

В работе делаются следующие исходные предположения

$$p^2+q^2\ll r^2,\ Cr^2\gg k,\ |M_i|\ll k\ \ (i=1,2),\ M_3\sim k \tag{1.2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка. С помощью неравенств (1.2) введем малый параметр $\varepsilon$ и положим

$$\begin{gathered}
p=\varepsilon P,\ q=\varepsilon Q,\ k(\theta)=\varepsilon K(\theta),\ \varepsilon\ll 1\\
M_i=\varepsilon^2 M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi,t)\ \ (i=1,2),\ M_3=\varepsilon M_3^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi,t)
\end{gathered}\tag{1.3}$$

В [1] также рассматриваются возмущенные движения тяжелого твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации, получена усредненная система уравнений. Построено численное решение усредненной системы для случая линейных диссипативных моментов. В отличие от [1] в [2, 3] рассматривается случай быстро вращающегося вокруг оси динамической симметрии тела [1], поэтому порождающим решением является не траектория движения в случае Лагранжа, а некоторое более простое решение. Вследствие этого с помощью метода усреднения в первом и втором приближениях удается получить явные аналитические решения.

В [2], как и в данной работе, предполагаются выполненными условия (1.2), (1.3). В отличие от публикуемой работы в [2] предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, максимальная величина которого равна $k$ и который создается постоянной по величине и направлению силой, приложенной в некоторой фиксированной точке оси динамической симметрии.

В отличие от третьего неравенства (1.2) в [3] [1] предполагается, что возмущающие моменты мала по сравнению с восстанавливающим $|M_i| \ll k$ $(i=1, 2, 3)$.

Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа были ранее исследованы [2].

Новые переменные $P$, $Q$, а также переменные и постоянные $r$, $\psi$, $\theta$, $\varphi$, $K$, $A$, $C$, $M_i^*$ $(i=1, 2, 3)$ предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \to 0$.

Ставится задача исследовать асимптотическое поведение решений системы (1.1) при малом $\varepsilon$, если выполнены условия (1.2), (1.3). Исследование проводится методом усреднения [4—6] на интервале времени порядка $\varepsilon^{-1}$.

Метод усреднения широко применялся в задачах динамики твердого тела. В [6—8] этим методом исследованы некоторые задачи динамики; в основном для динамически симметричных тел. В [9] впервые проведено усреднение по движению Эйлера — Пуансо для несимметричного тела. В [1—3, 6, 8, 10] исследованы возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. Упрощающие предположения (1.2) или (1.3) дают возможность получить в общем случае довольно простую схему усреднения и исследовать ряд примеров.

**2. Процедура усреднения.** Сделаем в системе (1.1) замену переменных (1.3). Сократив обе части первых двух уравнений (1.1) на $\varepsilon$, получим

$$\begin{gathered}
AP^{\cdot}+(C-A)Qr=K(\theta)\sin\theta\cos\varphi+\varepsilon M_1^* \\
AQ^{\cdot}+(A-C)Pr=-K(\theta)\sin\theta\sin\varphi+\varepsilon M_2^*, \quad Cr^{\cdot}=\varepsilon M_3^* \\
\psi^{\cdot}=\varepsilon(P\sin\varphi+Q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \quad \theta^{\cdot}=\varepsilon(P\cos\varphi-Q\sin\varphi) \\
\varphi^{\cdot}=r-\varepsilon(P\sin\varphi+Q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Рассмотрим сначала систему нулевого приближения и положим $\varepsilon=0$ в (2.1). Из последних четырех уравнений (2.1) получим

$$r=r_0, \quad \psi=\psi_0, \quad \theta=\theta_0, \quad \varphi=r_0t+\varphi_0 \tag{2.2}$$

Здесь $r_0$, $\psi_0$, $\theta_0$, $\varphi_0$ — постоянные, равные начальным значениям переменных при $t=0$. Подставим равенства (2.2) в первые два уравнения (2.1) при $\varepsilon=0$ и проинтегрируем полученную систему линейных уравнений для

---

[1] *Лещенко Д. Д., Саллам С. Н.* Возмущенные вращательные движения твердого тела с распределением масс, близким к случаю Лагранжа. Одесса, 1988. 22 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 28.06.88, № 1655–Ук88.

[2] *Лещенко Д. Д., Саллам С. Н.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии. Одесса, 1988. 18 с. Деп. в УкрНИИНТИ 28.06.88, № 1656–Ук88.

$P$, $Q$. Решение представим в виде

$$
\begin{gathered}
P=a\cos\gamma_0+b\sin\gamma_0+K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(r_0t+\varphi_0)\\
Q=a\sin\gamma_0-b\cos\gamma_0+K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(r_0t+\varphi_0)\\
a=P_0-K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0,\ b=-Q_0+K_0C^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0r_0^{-1}\\
\gamma_0=n_0t,\ n_0=(C-A)A^{-1}r_0\neq0,\ |n_0/r_0|\leqslant1,\ K_0=K(\theta_0)
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Здесь $P_0$, $Q_0$ — начальные значения новых переменных $P$, $Q$, введенных согласно (1.3), а переменная $\gamma=\gamma_0$ имеет смысл фазы колебаний. Система (2.1) существенно нелинейна (частота собственных колебаний переменных $P$, $Q$ зависит от медленной переменной $r$), поэтому далее вводится дополнительная переменная $\gamma$, определяемая уравнением

$$
\gamma^{\bullet}=n,\ \gamma(0)=0,\ n=(C-A)A^{-1}r
\tag{2.4}
$$

При $\varepsilon=0$ имеем $\gamma=\gamma_0=n_0t$ в соответствии с (2.3). Равенства (2.2), (2.3) определяют общее решение системы (2.1), (2.4) при $\varepsilon=0$. Первые два соотношения (2.3) можно, исключая постоянные, с учетом (2.2) переписать в эквивалентном виде

$$
\begin{gathered}
P=a\cos\gamma+b\sin\gamma+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi\\
Q=a\sin\gamma-b\cos\gamma+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

и разрешить относительно $a$, $b$:

$$
\begin{gathered}
a=P\cos\gamma+Q\sin\gamma-KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin(\gamma+\varphi)\\
b=P\sin\gamma-Q\cos\gamma+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos(\gamma+\varphi)
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Рассмотрим систему (2.1) при $\varepsilon\neq0$ и соотношения (2.5), (2.6) как формулы замены переменных (содержащие переменную $\gamma$), определяющие переход от переменных $P$, $Q$ к переменным типа Ван-дер-Поля [6] $a$, $b$ и обратно. Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (2.1), (2.4) от переменных $P$, $Q$, $r$, $\psi$, $\theta$, $\varphi$, $\gamma$ к новым переменным $a$, $b$, $r$, $\psi$, $\theta$, $\alpha$, $\gamma$, причем

$$
\alpha=\gamma+\varphi
\tag{2.7}
$$

После преобразований получим более удобную для дальнейшего исследования систему семи уравнений (вместо шести (2.1))

$$
\begin{gathered}
a^{\bullet}=\varepsilon A^{-1}(M_1^0\cos\gamma+M_2^0\sin\gamma)-\varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta(b-KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\alpha)+\\
+\varepsilon KC^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\alpha-\varepsilon C^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha(a\cos\alpha+b\sin\alpha)dK/d\theta\\
b^{\bullet}=\varepsilon A^{-1}(M_1^0\sin\gamma-M_2^0\cos\gamma)+\varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta(a+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha)-\\
-\varepsilon KC^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha+\varepsilon C^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\alpha(a\cos\alpha+b\sin\alpha)dK/d\theta\\
r^{\bullet}=\varepsilon C^{-1}M_3^0,\ \psi^{\bullet}=\varepsilon\operatorname{cosec}\theta(a\sin\alpha-b\cos\alpha)+\varepsilon KC^{-1}r^{-1}\\
\alpha^{\bullet}=CA^{-1}r-\varepsilon\operatorname{ctg}\theta(a\sin\alpha-b\cos\alpha)-\varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta\\
\theta^{\bullet}=\varepsilon(a\cos\alpha+b\sin\alpha),\ \gamma^{\bullet}=(C-A)A^{-1}r
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

Здесь через $M_i^0$ обозначены функции, полученные из $M_i^*$ (см. (1.3)) в результате сделанной подстановки (2.5)—(2.7), т. е.

$$
M_i^0(a,b,r,\psi,\theta,\alpha,\gamma,t)=M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi,t)\ \ (i=1,2,3)
\tag{2.9}
$$

Отметим, что переход от двух переменных $P$, $Q$ к трем $a$, $b$, $\gamma$ вызван соображениями удобства: при $\varepsilon=0$ система для $P$, $Q$ имеет вид линейной, а замена (2.5) неособая для всех $a$, $b$.

Введем вектор $x$, компонентами которого служат медленные переменные $a$, $b$, $r$, $\psi$, $\theta$ системы (2.8). Тогда эту систему можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
x^{\bullet}=\varepsilon X(x,\alpha,\gamma,t),\ \alpha^{\bullet}=CA^{-1}r+\varepsilon Y(x,\alpha)\\
\gamma^{\bullet}=(C-A)A^{-1}r,\ x(0)=x_0,\ \alpha(0)=\alpha_0,\ \gamma(0)=0
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

Здесь вектор-функция $X$ и скалярная функция $Y$ определяются правыми частями уравнений (2.8), начальные значения получаются согласно (2.2)—(2.4), (2.7).

Рассмотрим систему (2.8) или (2.10) с точки зрения применения метода усреднения [4—6]. Система (2.8) содержит медленные переменные $a$, $b$, $r$, $\psi$, $\theta$ и быстрые переменные — фазы $\alpha$, $\gamma$ и время $t$, причем $\gamma$ входит лишь в первые три уравнения (2.8). Система существенно нелинейна и непосредственное применение метода усреднения весьма затруднено [11]. Предположим для простоты, что возмущающие моменты $M_i^*$ не зависят от $t$. Так как $M_i^*$ $(i=1, 2, 3)$ периодичны по $\varphi$ с периодом $2\pi$, то согласно замене (2.5)—(2.7) функции $M_i^0$ из (2.9) будут периодическими функциями $\alpha$ и $\gamma$ с периодами $2\pi$. Тогда система (2.10) содержит две вращающиеся фазы $\alpha$ и $\gamma$ и соответствующие им частоты $CA^{-1}r$ и $(C-A)A^{-1}r$ переменны. При усреднении системы (2.8) или (2.10) следует различать два случая: нерезонансный, когда частоты $CA^{-1}r$ и $(C-A)A^{-1}r$ несоизмеримы, и резонансный, когда эти частоты соизмеримы [11]. Весьма существенной особенностью системы (2.10) является то, что отношение частот постоянно $[(C-A)A^{-1}r]/[CA^{-1}r]=1-AC^{-1}$ и резонансный случай имеет место при

$$C/A=i/j,\quad i/j\leqslant 2 \tag{2.11}$$

где $i$, $j$ — натуральные взаимно простые числа, а в нерезонансном случае $C/A$ иррациональное число. Вследствие (2.11) усреднение нелинейной системы (2.10), в которой $X$ не зависит от $t$, эквивалентно усреднению квазилинейной системы с постоянными частотами. Это достигается введением независимой переменной $\gamma$.

В нерезонансном случае $(C/A\neq i/j)$ усредненную систему первого приближения получим путем независимого усреднения правых частей системы (2.8) по обеим быстрым переменным $\alpha$, $\gamma$. В результате для медленных переменных получаются уравнения

$$\begin{gathered}
a^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}\mu_1-\varepsilon bKC^{-1}r^{-1}\cos\theta+\varepsilon KC^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^{s}-{}^1/_2\varepsilon C^{-1}r^{-1}b\sin\theta dK/d\theta \qquad (2.12)\\
b^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}\mu_2+\varepsilon aKC^{-1}r^{-1}\cos\theta-\varepsilon KC^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^{c}+{}^1/_2\varepsilon C^{-1}r^{-1}a\sin\theta dK/d\theta\\
r^{\cdot}=\varepsilon C^{-1}\mu_3,\quad \psi^{\cdot}=\varepsilon KC^{-1}r^{-1},\quad \theta^{\cdot}=0
\end{gathered}$$

$$\mu_1(a,b,r,\psi,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(M_1^0\cos\gamma+M_2^0\sin\gamma)\,d\alpha\,d\gamma$$

$$\mu_2(a,b,r,\psi,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(M_1^0\sin\gamma-M_2^0\cos\gamma)\,d\alpha\,d\gamma,$$

$$\mu_3(a,b,r,\psi,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3^0\,d\alpha\,d\gamma$$

$$\mu_3^{s}(a,b,r,\psi,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3^0\sin\alpha\,d\alpha\,d\gamma,\qquad \mu_3^{c}(a,b,r,\psi,\theta)=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3^0\cos\alpha\,d\alpha\,d\gamma$$

Решая усредненную систему (2.12) для возмущающих моментов конкретного вида, определим движение тела в нерезонансном случае с погрешностью порядка $\varepsilon$ на интервале изменения времени порядка $\varepsilon^{-1}$. Отметим, что последнее уравнение системы (2.12) интегрируется и дает $\theta=\theta_0$.

Данная система эквивалентна двухчастотной системе с постоянными частотами, поскольку обе частоты пропорциональны осевой составляющей $r$ вектора угловой скорости. Поэтому обоснование применимости метода усреднения можно провести, как и для квазилинейной системы [2].

В резонансном случае (2.11) система (2.10) одночастотна. Введем вместо $\alpha$ новую медленную переменную — линейную комбинацию фаз с целочисленными коэффициентами

$$\lambda=\alpha-i(i-j)^{-1}\gamma,\ i/j\neq 1,\ i/j\leqslant 2,\ i,j>0 \tag{2.13}$$

Система (2.10) примет вид стандартной системы с вращающейся фазой

$$\begin{gathered} x^{\boldsymbol{\cdot}}=\varepsilon X(x,\ i(i-j)^{-1}\gamma+\lambda,\ \gamma) \\ \lambda^{\boldsymbol{\cdot}}=\varepsilon Y(x,\ i(i-j)^{-1}\gamma+\lambda),\ \gamma^{\boldsymbol{\cdot}}=(C-A)A^{-1}r \end{gathered} \tag{2.14}$$

причем ее правые части периодичны по $\gamma$ с периодом $2|i-j|\pi$. Систему первого приближения построим усредняя правые части системы (2.14) по указанному периоду изменения аргумента $\gamma$. В результате получим систему уравнений для медленных переменных

$$\begin{gathered} a^{\boldsymbol{\cdot}}=\varepsilon A^{-1}\mu_1{}^*-\varepsilon KC^{-1}r^{-1}b\cos\theta+\varepsilon KC^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3{}^{*s}-{}^1/{}_2\varepsilon C^{-1}r^{-1}b\sin\theta dK/d\theta \\ b^{\boldsymbol{\cdot}}=\varepsilon A^{-1}\mu_2{}^*+\varepsilon KC^{-1}r^{-1}a\cos\theta-\varepsilon KC^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3{}^{*c}+{}^1/{}_2\varepsilon C^{-1}r^{-1}a\sin\theta dK/d\theta \\ r^{\boldsymbol{\cdot}}=\varepsilon C^{-1}\mu_3{}^* \\ \psi^{\boldsymbol{\cdot}}=\varepsilon KC^{-1}r^{-1},\ \theta^{\boldsymbol{\cdot}}=0,\ \lambda^{\boldsymbol{\cdot}}=-\varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta \end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\mu_1{}^*(a,b,r,\psi,\theta,\lambda)=\frac{1}{2\pi|i-j|}\int\limits_0^{2\pi|i-j|}(M_1{}^0\cos\gamma+M_2{}^0\sin\gamma)\,d\gamma$$

$$\mu_2{}^*(a,b,r,\psi,\theta,\lambda)=\frac{1}{2\pi|i-j|}\int\limits_0^{2\pi|i-j|}(M_1{}^0\sin\gamma-M_2{}^0\cos\gamma)\,d\gamma$$

$$\mu_3{}^*(a,b,r,\psi,\theta,\lambda)=\frac{1}{2\pi|i-j|}\int\limits_0^{2\pi|i-j|}M_3{}^0\,d\gamma$$

$$\mu_3{}^{*s}(a,b,r,\psi,\theta,\lambda)=\frac{1}{2\pi|i-j|}\int\limits_0^{2\pi|i-j|}M_3{}^0\sin\alpha\,d\gamma,\qquad \mu_3{}^{*c}(a,b,r,\psi,\theta,\lambda)=$$

$$=\frac{1}{2\pi|i-j|}\int\limits_0^{2\pi|i-j|}M_3{}^0\cos\alpha\,d\gamma$$

Предполагается, что в подынтегральных выражениях переменная $\alpha$ заменена на $\lambda$ согласно (2.13). Отметим, что предпоследнее уравнение (2.15) имеет решение $\theta=\theta_0$.

Решая усредненную систему (2.15) для возмущающих моментов конкретного вида, определим движение тела в резонансном случае с погрешностью порядка $\varepsilon$ на интервале времени порядка $\varepsilon^{-1}$. Обоснование проводится стандартным образом [4, 5].

В качестве примера восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации, рассмотрим твердое тело с прикрепленной к нему в точке $N$ пружиной, конец $L$ которой закреплен неподвижно. На тело действуют (см. фигуру) сила тяжести $mg$ и сила упругости пружины $F$, модуль которой пропорционален деформации пружины $F=\lambda_1(s-s_0)$. Здесь $\lambda_1$ — коэффициент жесткости пружины. В этом случае восстанавливающий момент имеет вид

$$\begin{gathered} k(\theta)=mgl+\lambda_1 hz[1-s_0(h^2+z^2-2hz\cos\theta)^{-1/2}] \\ ON=z,\ OC=l,\ OL=h,\ LN=s=s(\theta)\quad k(\theta)=\varepsilon K(\theta) \end{gathered} \tag{2.16}$$

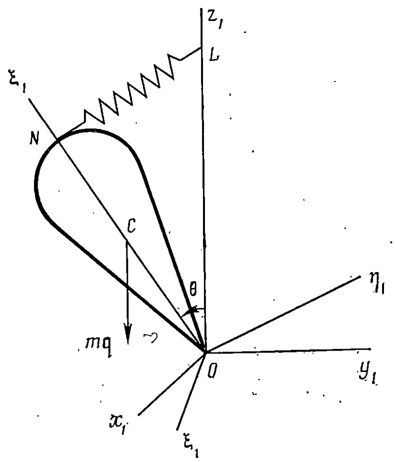
Далее при помощи изложенной методики рассмотрены некоторые конкретные примеры возмущенного движения твердого тела.

**3. Случай малого постоянного момента.** Рассмотрим движение твердого тела в случае Лагранжа под действием малого момента, постоянного в связанных осях и приложенного вдоль оси симметрии. Возмущающие моменты $M_i$ ($i=1, 2, 3$) в этом случае имеют вид

$$M_1=M_2=0,\quad M_3=\varepsilon M_3^*=\mathrm{const} \tag{3.1}$$

Переходя к новым медленным переменным $a$, $b$, $r$, $\psi$, $\theta$, получим в нерезонансном случае усредненную систему типа (2.12)

$$\begin{gathered}
a^{\cdot}=-\varepsilon KC^{-1}r^{-1}b\cos\theta-\\
-{}^1/_2\varepsilon C^{-1}r^{-1}b\sin\theta dK/d\theta\\
b^{\cdot}=\varepsilon KC^{-1}r^{-1}a\cos\theta+\\
+{}^1/_2\varepsilon C^{-1}r^{-1}a\sin\theta dK/d\theta\\
r^{\cdot}=\varepsilon C^{-1}M_3^*,\quad \psi^{\cdot}=\varepsilon KC^{-1}r^{-1},\quad \theta^{\cdot}=0
\end{gathered} \tag{3.2}$$




Проинтегрировав третье уравнение (3.2), получим

$$r=r_0+\varepsilon C^{-1}M_3^*t \tag{3.3}$$

Подставим (3.3) в (3.2) и проинтегрируем уравнение для $\psi^{\cdot}$:

$$\psi=\psi_0+K(M_3^*)^{-1}\ln|1+\varepsilon C^{-1}M_3^*r_0^{-1}t| \tag{3.4}$$

Здесь $\psi_0$ и $r_0$ — произвольные начальные значения угла прецессии и осевой скорости вращения.

Как следует из (3.2), угол нутации $\theta$ не изменяется во время движения тела $\theta=\theta_0$.

Решение системы первых двух уравнений (3.2) после подстановки вместо $r$ выражения (3.3) записывается следующим образом

$$\begin{gathered}
a=P_0\cos\beta+Q_0\sin\beta-K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\beta+\varphi_0)\\
b=P_0\sin\beta-Q_0\cos\beta+K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\beta+\varphi_0)
\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\beta=(M_3^*)^{-1}[K_0\cos\theta_0+{}^1/_2\sin\theta_0(dK/d\theta)_{\theta=\theta_0}]\ln|1+\varepsilon C^{-1}r_0^{-1}M_3^*t|,\quad K_0=K(\theta_0)$$

Подставляя в формулы (2.5), (1.3) полученные выражения $a$, $b$ из (3.5) и $r$ из (3.3), определим

$$\begin{gathered}
p=p_0\cos(\gamma-\beta)-q_0\sin(\gamma-\beta)+k_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma-\beta-\varphi_0)+\\
+kC^{-1}r_0^{-1}(1+\varepsilon C^{-1}r_0^{-1}M_3^*t)^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi\\
q=p_0\sin(\gamma-\beta)+q_0\cos(\gamma-\beta)-k_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\gamma-\beta-\varphi_0)+\\
+kC^{-1}r_0^{-1}(1+\varepsilon C^{-1}r_0^{-1}M_3^*t)^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi\\
\gamma=(C-A)A^{-1}(\varepsilon C^{-1}M_3^*t^2/2+r_0t),\quad p_0=\varepsilon P_0,\quad q_0=\varepsilon Q_0,\quad k_0=\varepsilon K(\theta_0)
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Для рассматриваемого примера тела с прикрепленной к нему пружиной выражения для $p$, $q$ получаются по формулам (3.6) с подстановкой (2.16) вместо $k$ и этого же выражения при $\theta=\theta_0$ вместо $k_0$. При этом

$$\begin{gathered}
\beta=(\varepsilon M_3^*)^{-1}[k_0\cos\theta_0+\lambda_1h^2z^2s_0\sin^2\theta_0(h^2+z^2-2hz\cos\theta_0)^{-1/2}]\ln|1+\\
+\varepsilon C^{-1}r_0^{-1}M_3^*t|.
\end{gathered}$$

Согласно (3.3) величина $|r(\tau)|$, $\tau=\varepsilon t$ возрастает, если параметры $r_0$, $M_3^*$ имеют одинаковый знак и убывает, если знаки различны. Угол прецессии $\psi$ (3.4) содержит переменную составляющую, модуль которой в обоих случаях монотонно возрастает: в первом случае он ограничен для конечного $\tau\sim1$, во втором — стремится к бесконечности при $\tau\to-Cr_0/M_3^*$; при этом $r\to0$.

Переменная $\beta$ в (3.5), (3.6) изменяется аналогично $\psi$, если $\theta_0\neq\pm{}^1/_2\pi$. Медленные переменные $a$, $b$ являются ограниченными $2\pi$ — периодическими функциями $\beta$.

Составляющие $p$, $q$ вектора угловой скорости согласно (3.6) содержат ограниченные осциллирующие слагаемые, обусловленные ненулевыми начальными данными $p_0$, $q_0$, а также слагаемые, обусловленные восстанавливающим моментом (1.2), (2.16).

Отметим, что при отсутствии пружины сравнение полученных выражений для медленных переменных $a$, $b$, $p$, $q$ (3.5), (3.6) с соответствующими формулами [2], если формально положить в них $\lambda_1=0$, дает совпадение указанных выражений.

Следует подчеркнуть, что в формулах (3.6) для $p$ и $q$ присутствуют переменная и постоянная составляющие восстанавливающего момента $k(\theta)$ и $k_0=k(\theta_0)$.

**4. Случай линейных внешних диссипативных моментов.** Рассмотрим возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Будем считать, что возмущающие моменты $M_i$ ($i=1, 2, 3$) являются линейно-диссипативными [12]:

$$M_1=-\varepsilon I_1 p,\ M_2=-\varepsilon I_1 q,\ M_3=-\varepsilon I_3 r,\ I_1,\ I_3>0 \tag{4.1}$$

Здесь $I_1$, $I_3$ — некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела.

Запишем возмущающие моменты с учетом соотношений (1.3) для $p$ и $q$:

$$M_1=-\varepsilon^2 I_1 P,\ M_2=-\varepsilon^2 I_1 Q,\ M_3=-\varepsilon I_3 r \tag{4.2}$$

Согласно п. 2 переходим к новым медленным переменным $a$, $b$, $r$, $\psi$, $\theta$ и получим усредненную систему (2.12) вида

$$\begin{gathered} a^{\bullet}=-\varepsilon I_1 A^{-1} a-\varepsilon C^{-1} r^{-1} b\,(K\cos\theta+{}^1/_2\sin\theta\, dK/d\theta) \\ b^{\bullet}=-\varepsilon I_1 A^{-1} b+\varepsilon C^{-1} r^{-1} a\,(K\cos\theta+{}^1/_2\sin\theta\, dK/d\theta) \\ r^{\bullet}=-\varepsilon I_3 C^{-1} r,\ \psi^{\bullet}=\varepsilon K C^{-1} r^{-1},\ \theta^{\bullet}=0 \end{gathered} \tag{4.3}$$

Проинтегрировав третье уравнение (4.3), получим ($r_0$ — произвольное начальное значение осевой скорости вращения):

$$r=r_0\exp(-\varepsilon I_3 C^{-1} t),\ r_0\neq 0 \tag{4.4}$$

С учетом (4.4) уравнение (4.3) для $\psi^{\bullet}$ интегрируется и дает ($\psi_0$ — постоянная, равная начальному значению угла прецессии при $t=0$):

$$\psi=\psi_0+K I_3^{-1} r_0^{-1}[\exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t)-1] \tag{4.5}$$

Кроме того, как видно из (4.3), угол нутации сохраняет постоянное значение $\theta=\theta_0$. Подставляя в первые два уравнения (4.3) вместо $r$ выражение (4.4), получим систему вида

$$\begin{gathered} a^{\bullet}=-\varepsilon I_1 A^{-1} a-\varepsilon C^{-1} r_0^{-1} b\exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t)\,(K\cos\theta+{}^1/_2\sin\theta\, dK/d\theta) \\ b^{\bullet}=-\varepsilon I_1 A^{-1} b+\varepsilon C^{-1} r_0^{-1} a\exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t)\,(K\cos\theta+{}^1/_2\sin\theta\, dK/d\theta) \end{gathered}$$

решение которой согласно [13, с. 534] записывается следующим образом

$$\begin{gathered} a=\exp(-\varepsilon I_1 A^{-1} t)\,[P_0\cos\eta+Q_0\sin\eta-K_0 C^{-1} r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\eta+\varphi_0)] \\ b=\exp(-\varepsilon I_1 A^{-1} t)\,[P_0\sin\eta-Q_0\cos\eta+K_0 C^{-1} r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\eta+\varphi_0)] \\ \eta=r_0^{-1} I_3^{-1}(K\cos\theta+{}^1/_2\sin\theta\, dK/d\theta)\,[\exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t)-1],\ K_0=K(\theta_0) \end{gathered} \tag{4.6}$$

В результате подстановки в соотношения (2.5), (1.3) для $P$, $Q$, $p$, $q$ выражений $a$, $b$ из (4.6) и $r$ из (4.4) определим

$$\begin{gathered} p=\exp(-\varepsilon I_1 A^{-1} t)\,[p_0\cos(\gamma-\eta)-q_0\sin(\gamma-\eta)+k_0 C^{-1} r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma- \\ -\eta-\varphi_0)]+k C^{-1} r_0^{-1}\exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t)\sin\theta_0\sin\varphi \\ q=\exp(-\varepsilon I_1 A^{-1} t)\,[p_0\sin(\gamma-\eta)+q_0\cos(\gamma-\eta)-k_0 C^{-1} r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\gamma- \\ -\eta-\varphi_0)]+k C^{-1} r_0^{-1}\exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t)\sin\theta_0\cos\varphi \end{gathered} \tag{4.7}$$

$$\gamma=\frac{C}{I_3}\frac{C-A}{A}\frac{r_0}{\varepsilon}[1-\exp(-\varepsilon I_3 C^{-1} t)],\qquad p_0=\varepsilon P_0$$

$$q_0=\varepsilon Q_0,\ k_0=\varepsilon K_0$$

Отметим, что в отличие от соответствующих формул [2] выражения (4.7) содержат постоянную $k_0$ и переменную составляющие восстанавливающего момента $k(\theta)$.

Для тела с пружиной в формулы (4.7) нужно подставить выражение (2.16) для восстанавливающего момента $k=k(\theta)$ и это же выражение при $\theta=\theta_0$ для $k_0=k(\theta_0)$. В этом случае

$$\eta=r_0^{-1}I_3^{-1}\varepsilon^{-1}[k\cos\theta+{}^1/_2\lambda_1h^2z^2\sin^2\theta(h^2+z^2-$$
$$-2hz\cos\theta)^{-3/2}][\exp(\varepsilon I_3C^{-1}t)-1]$$

Тем самым решение системы первого приближения для медленных переменных в случае диссипативного момента (4.1) построено. Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Модуль осевой скорости вращения $r$ монотонно уменьшается по экспоненте согласно (4.4). Приращение угла прецессии $\psi-\psi_0$ медленно экспоненциально возрастает в соответствии с (4.5). Из (4.6) следует, что медленные переменные $a$, $b$ монотонно стремятся к нулю по экспоненте.

Согласно (4.7) слагаемые проекций $p$, $q$, обусловленные начальными значениями $p_0$, $q_0$, затухают по экспоненте. В то же время проекции $p$, $q$ содержат экспоненциально возрастающие члены, пропорциональные восстанавливающему моменту, что приводит к экспоненциальному росту величины $(p^2+q^2)^{1/2}$.

Сравнение полученных выражений для медленных переменных $a$, $b$, $p$, $q$ (4.6), (4.7) с соответствующими формулами [2] при отсутствии пружины (формально положим в них $\lambda_1=0$) дает совпадение указанных выражений.

Авторы благодарят Ф. Л. Черноусько и Л. Д. Акуленко за постановку задачи и полезные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771–778.
2. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 3–10.
3. *Лещенко Д. Д., Шамаев А. С.* Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 8–17.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
5. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
6. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
7. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
8. *Ярошевский В. А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
9. *Черноусько Ф. Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474–483.
10. *Кузмак Г. Е.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970. 347 с.
11. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
12. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 286 с.
13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

Одесса

Поступила в редакцию
18.IV.1989