МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1990

УДК 539.3

Ю. Д. КАПЛУНОВ

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ МАЛОЙ ИЗМЕНЯЕМОСТИ В УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧКАХ

Методом асимптотического интегрирования трехмерных динамических уравнений теории упругости построены двумерные уравнения, описывающие высокочастотные напряженно-деформированные состояния (НДС) малой изменяемости в оболочках. Обсуждается область применимости и оценивается погрешность предлагаемых уравнений. Для типичных случаев закрепления краев оболочки получены граничные условия.

Известно [1–3 и др.], что в окрестности частот среза уравнения колебаний упругой пластины имеют моды, которым соответствуют НДС, медленно меняющиеся по координатам срединной поверхности. Закон распределения главных компонент этих НДС по толщине пластины близок к синусоидальному. Существование указанных мод обусловлено тем, что дисперсионное уравнение Рэлея – Лэмба в окрестности частот среза имеет малые по модулю корни. Для этих корней в [1] получены простые приближенные формулы. Будем называть обсуждаемые НДС высокочастотными НДС малой изменяемости. Более строгое определение дается ниже. Асимптотический подход к исследованию этих НДС в пластинах для действительных значений волнового числа предложен в [4] в рамках трехмерной теории упругости. Вариант двумерных уравнений (не содержащих толщинной переменной), описывающих высокочастотные НДС малой изменяемости в пластинах, получен в [5] вариационным методом. В [6] разработанный в [5] метод применен к оболочкам. Получаемые ниже методом асимптотического интегрирования уравнения отличаются от уравнений работы [6] в главных членах, отражающих влияние кривизны оболочки. Проводимое в п. 5 сопоставление с аналитическим решением тестовой задачи о свободных центральносимметричных колебаниях сферической оболочки подтверждает асимптотическую точность предлагаемой в настоящей статье теории.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругую тонкую оболочку, совершающую гармонические колебания по закону $\exp(-i\omega t)$. Для физико-механических и геометрических параметров оболочки введем следующие обозначения: ρ – плотность материала оболочки; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; c_1, c_2 – скорости распространения волн растяжения – сжатия и сдвига в упругой среде; h – полутолщина оболочки; R – характерный радиус ее срединной поверхности; $\eta=h/R$ – основной малый параметр; $\beta=c_2/c_1=[{}^1/{}_2(1-2\nu)/(1-\nu)]^{1/2}$ – отношение скоростей волн.

Упругую среду, занимающую пространство оболочки, отнесем к триортогональной системе координат, задаваемой векторным равенством $\mathbf{P}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=\mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2)+\alpha_3\mathbf{n}$, где α_1, α_2 — параметры линий кривизны на срединной поверхности оболочки $\alpha_3=0$; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к срединной поверхности; α_3 — расстояние, отсчитываемое по нормали от срединной поверхности.

Коэффициенты Ламе в выбранной системе координат могут быть представлены в виде $H_i=A_i(1+\alpha_3/R_i)$ $(i=1, 2)$, $H_3=1$, где A_i, R_i — коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны поверхности $\mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2)$ соответственно.

Запишем уравнения движения оболочки как трехмерного упругого тела

$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_j}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\alpha_3}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}(\sigma_{ii}-\sigma_{jj})+\frac{2}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\sigma_{ij}+$$

$$+\left(\frac{2}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}+\frac{1}{H_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_3}\right)\sigma_{i3}+\rho\omega^2 v_i=0$$

$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_j}\frac{\partial\sigma_{3j}}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\alpha_3}-\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}\sigma_{ii}-\frac{1}{H_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_3}\sigma_{jj}+$$

$$+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_3}(H_iH_j)\sigma_{33}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}\sigma_{3i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\sigma_{3j}+\rho\omega^2v_3=0$$

$$\sigma_{ii}=\frac{E}{1+\nu}\left[\beta_1\left(\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_3}+\frac{1}{H_j}\frac{\partial v_j}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}v_i+\frac{1}{H_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_3}v_3\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_2}{H_i}\left(\frac{\partial v_i}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}v_3+\frac{1}{H_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}v_j\right)\right]$$

$$\sigma_{33}=\frac{E}{1+\nu}\left[\beta_1\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial v_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_j}\frac{\partial v_j}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}v_i+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}v_j+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_3}v_3+\frac{1}{H_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_3}v_3\right)+\beta_2\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_3}\right] \qquad (1.1)$$

$$\sigma_{i3}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial v_i}{\partial\alpha_3}-\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}v_i\right)$$

$$\sigma_{ij}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{H_j}\frac{\partial v_i}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{H_i}\frac{\partial v_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}v_i-\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}v_j\right) \qquad (i\neq j=1,2)$$

Здесь σ_{kl} — напряжения, v_m — перемещения; коэффициенты β_1, β_2 выражаются через коэффициент Пуассона по формулам $\beta_1=\nu/(1-2\nu)$, $\beta_2=(1-\nu)/(1-2\nu)$.

Традиционные граничные условия на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3=\pm h$ имеют вид ($Q_m^\pm$ — поверхностные нагрузки):

$$\sigma_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,\pm h)=Q_i^\pm,\quad \sigma_{33}(\alpha_1,\alpha_2,\pm h)=Q_3^\pm \qquad (1.2)$$

Будем полагать, что

$$\omega R/c_2=\eta^{-1}\mu,\quad \mu\sim\eta^0 \qquad (1.3)$$

где символ $\sim$ обозначает асимптотическую соизмеримость. Условие (1.3), накладываемое на параметр ω, говорит о том, что исследуемый частотный диапазон лежит за пределами применимости двумерной классической теории оболочек.

Получим приближенные двумерные уравнения, описывающие НДС, медленно меняющиеся по координатам α_1, α_2. Распространим для этого на высокочастотную область асимптотический метод сведения трехмерных статических задач теории упругости к двумерным [7].

Следуя [7], произведем в (1.1) растяжение масштабов независимых переменных по формулам

$$\alpha_i=R\eta^q\xi_i,\quad \alpha_3=R\eta\zeta \qquad (1.4)$$

Здесь $q<1$ — показатель изменяемости по переменным α_i искомого НДС. Считается, что дифференцирование по новым независимым переменным не меняет асимптотического порядка исходных величин.

НДС, удовлетворяющие требованиям, выражающимся формулами (1.3), (1.4) будем называть высокочастотными НДС малой изменяемости.

Следует отметить, что масштабное преобразование (1.4) применяется и при построении двумерной теории оболочек. Однако принимаемое здесь условие (1.3) приводит к кардинальному отличию асимптотик высокочастотных НДС малой изменяемости от нормальной асимптотики статического НДС оболочки [7, с. 409]. Асимптотический анализ показывает, что существуют два различных типа высокочастотных НДС малой изменяемости.

2. Высокочастотные НДС малой изменяемости первого типа. Высокочастотные НДС малой изменяемости первого типа наблюдаются при

$$\mu-\Lambda\sim\eta^b\ (b>0) \qquad (2.1)$$

где $\Lambda={}^1/_2\pi m\beta^{-1}(m\in\mathbf{N},\ m\sim\eta^0)$ — собственные частоты продольных колебаний нормального к срединной поверхности среза оболочки.

Число b, стоящее в показателе степени малого параметра, назовем показателем отклонения.

Асимптотика НДС этого типа имеет вид (здесь и ниже $i\neq j=1,2$; $k=1,\dots,3$):

$$v_3=hu_3,\quad \sigma_{kk}=E_1 s_{kk},\quad v_i=h\eta^{\delta_1}u_i,\quad \sigma_{i3}=E_1\eta^{\delta_1}s_{i3}$$
$$\sigma_{ij}=E_1\eta^{1-q+\delta_1}s_{ij},\quad E_1={}^1/{}_2E/(1+\nu)\tag{2.2}$$

Все безразмерные перемещения и напряжения в (2.2) имеют одинаковый асимптотический порядок, а $\delta_1=\min(1-q,b)$. Существование высокочастотных НДС малой изменяемости, имеющих асимптотику (2.2), доказывается последующими рассуждениями, а пока следует относиться к формулам (2.2) как к формальной подстановке.

Для последующих преобразований удобно представить искомое НДС в виде суперпозиции симметричной и антисимметричной относительно срединной поверхности оболочки составляющих (под симметричным и антисимметричным НДС здесь понимается то же, что и в теории пластин [8]). Указанная суперпозиция обладает в рассматриваемой задаче важным свойством. Одна из входящих в нее составляющих будет асимптотически главной по отношению к другой. Выпишем соотношения, реализующие эту суперпозицию

$$u_3=u_3{}^\circ+\eta^{\delta_3}u_3{}^1,\quad s_{kk}=s_{kk}{}^\circ+\eta^{\delta_3}s_{kk}{}^1,\quad u_i=u_i{}^\circ+\eta^{\delta_2-\delta_1}u_i{}^1\tag{2.3}$$
$$s_{i3}=s_{i3}{}^\circ+\eta^{\delta_2-\delta_1}s_{i3}{}^1,\quad s_{ij}=s_{ij}{}^\circ+\eta^{\delta_2-\delta_1}s_{ij}{}^1$$

где $\delta_2=\min(2-2q,b)$, $\delta_3=\min(1,\delta_2)$. Величины с верхним индексом 0 в (2.3) относятся к асимптотически главной составляющей искомого НДС, а величины с верхним индексом 1 — к асимптотически второстепенной его части (составляющая считается асимптотически главной, если принадлежащие ей величины являются асимптотически главными в двух первых соотношениях (2.3)). При этом одноименные величины с разными верхними индексами противоположны по четности. Например, если перемещение $u_3{}^\circ$ четно (нечетно) по ζ, то $u_3{}^1$ нечетно (четно) по ζ. Правомерность представления (2.3) будет также обоснована последующими выкладками.

Подставим формулы (1.3), (1.4), (2.2), (2.3) в (1.1), (1.2). Выражая там напряжения через перемещения и сохраняя члены, необходимые для получения окончательных двумерных уравнений в самом грубом приближении, придем для асимптотически главной составляющей поля перемещений к следующей системе

$$\frac{\partial^2u_3{}^\circ}{\partial\zeta^2}+\mu^2\beta^2u_3{}^\circ+\eta^{1-q+\delta_1}\beta^2\left(\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{div}\mathbf{u}_\tau{}^\circ+\eta^{1-q-\delta_1}\Delta u_3{}^\circ\right)-$$
$$-\eta^2\varkappa_2\left(u_3{}^\circ+\zeta\frac{\partial u_3{}^\circ}{\partial\zeta}\right)+\eta^{1+\delta_3}\varkappa_1\frac{\partial u_3{}^1}{\partial\zeta}+O(\eta^{2-q+\delta_2})=0\tag{2.4}$$
$$\frac{\partial^2\mathbf{u}_\tau{}^\circ}{\partial\zeta^2}+\mu^2\mathbf{u}_\tau{}^\circ+\frac{\eta^{1-q-\delta_1}}{1-2\nu}\operatorname{grad}\frac{\partial u_3{}^\circ}{\partial\zeta}+O(\eta^{2-2q}+\eta^{1+\delta_2-\delta_1})=0$$

с граничными условиями при $\zeta=1$ (выделение асимптотически главной симметричной (антисимметричной) составляющей НДС позволяет требовать выполнения граничных условий лишь на одной из лицевых поверхностей)

$$\beta_2\partial u_3{}^\circ/\partial\zeta+\beta_1(\eta^{1-q+\delta_1}\operatorname{div}\mathbf{u}_\tau{}^\circ-\eta^2\varkappa_2u_3{}^\circ+\eta^{1+\delta_3}\varkappa_1u_3{}^1)+O(\eta^{2-q+\delta_2})=F_3\tag{2.5}$$
$$\partial\mathbf{u}_\tau{}^\circ/\partial\zeta+\eta^{1-q-\delta_1}\operatorname{grad}u_3{}^\circ+O(\eta^{1+\delta_2-\delta_1})=\eta^{-\delta_1}\mathbf{F}_\tau$$

Здесь grad, div, Δ — двумерные дифференциальные операторы, действующие на срединной поверхности оболочки; векторы с нижним индексом τ имеют вид: $\mathbf{a}_\tau=a_1\mathbf{i}_1+a_2\mathbf{i}_2$ ($\mathbf{i}_j$ — единичные орты ортогональной системы координат, заданной на срединной поверхности оболочки; a_j — проекции на эти орты произвольного вектора $\mathbf{a}_\tau$); $\varkappa_j=R^j(R_1{}^{-j}+R_2{}^{-j})$; $F_j={}^1/{}_2E_1{}^{-1}(Q_j{}^+\pm\pm Q_j{}^-)$, $F_3={}^1/{}_4E_1{}^{-1}(Q_3{}^+\mp Q_3{}^-)$ (верхний знак соответствует случаю, когда асимптотически главная составляющая искомого НДС антисимметрична относительно срединной поверхности, а нижний — случаю, когда она симметрична).

В первом уравнении (2.4) и в первом граничном условии (2.5) оставлены некоторые члены с асимптотически малыми множителями, причем некоторые из них зависят от u_3^1. Необходимость этого обусловлена тем, что, как следует из определения частоты Λ и структуры (2.4), в диапазоне (2.1) $\partial u_3^\circ/\partial\zeta$ при $\zeta=1$ становится асимптотически малой, и требуется повысить точность системы уравнений и граничных условий.

Остановимся сначала на случае, когда НДС, определяемое u_3°, $\mathbf{u}_\tau^\circ$, антисимметрично по ζ. Из первого уравнения (2.4) имеем (w, u_{3r}° — неизвестные пока функции):

$$u_3^\circ=w(\xi_1,\xi_2)\cos\beta\mu\zeta+\eta^{1-q+\delta_1}u_{3r}^\circ(\xi_1,\xi_2;\zeta) \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в первое граничное условие (2.5), получаем:

$$\begin{gathered}-\beta_2\beta\mu w\sin\beta\mu+\eta^{1-q+\delta_1}(\beta_2\partial u_{3r}^\circ/\partial\zeta+\beta_1\operatorname{div}\mathbf{u}_\tau^\circ)-\\-\beta_1(\eta^2\varkappa_2 w\cos\beta\mu-\varkappa_1\eta^{1+\delta_3}u_3^1)+O(\eta^{2-q+\delta_2})=F_3\end{gathered} \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что в этом случае в (2.1) надо положить $m=2n$ ($n\in\mathbf{N}$, $n\sim\eta^0$). Выразим теперь все входящие в (2.7) трехмерные функции через двумерную функцию w. Для этого подставим сначала (2.6) во второе уравнение (2.4) и второе граничное условие (2.5). Решая неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение с независимой переменной ζ, запишем

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_\tau^\circ=\eta^{\delta_2-\delta_1}\frac{(\mathbf{F}_\tau\eta^{-\delta_2})\sin\Lambda\zeta}{\Lambda\cos\Lambda}+\frac{\eta^{1-q-\delta_1}}{\Lambda}\operatorname{grad}w\times\\\times\left(\frac{\sin\beta\Lambda\zeta}{\beta}-2\frac{\cos\beta\Lambda}{\cos\Lambda}\sin\Lambda\zeta\right)+O(\eta^{\delta_2})\end{gathered} \tag{2.8}$$

Для определения u_3^1 получим, подставляя в (1.1), (1.2) формулы (1.3), (1.4), (2.2), (2.3) и выделяя симметричную составляющую, уравнение

$$\partial^2u_3^1/\partial\zeta^2+\mu^2\beta^2u_3^1+\eta^{1-\delta_3}\varkappa_1\partial u_3^\circ/\partial\zeta+O(\eta^{1-q+\delta_2-\delta_3})=0 \tag{2.9}$$

с граничным условием при $\zeta=1$

$$\beta_2\partial u_3^1/\partial\zeta=-\eta^{1-\delta_3}\beta_1\varkappa_1u_3^\circ+\eta^{\delta_2-\delta_3}(\Phi_3\eta^{-\delta_2})+O(\eta^{1-q+\delta_2-\delta_3}) \tag{2.10}$$

где $\Phi_3={}^1/_4E_1(Q_3^+\pm Q_3^-)$ (правило выбора знака перед Q_3^- такое же, как и выше)

Решая задачу (2.9), (2.10) при учете (2.6), получим

$$\begin{gathered}u_3^1=\eta^{\delta_2-\delta_3}\frac{(\Phi_3\eta^{-\delta_2})\sin\beta\Lambda\zeta}{\beta_2\beta\Lambda\cos\beta\Lambda}+\eta^{1-\delta_3}w\left(\frac{\varkappa_1(\beta_2/2-\beta_1)}{\beta_2\beta\Lambda}\times\right.\\\left.\times\sin\beta\Lambda\zeta-\frac{\varkappa_1}{2}\zeta\cos\beta\Lambda\zeta\right)+O(\eta^{1-q+\delta_2-\delta_3}+\eta^b),\end{gathered} \tag{2.11}$$

Подставляя теперь (2.8), (2.11) в первое уравнение (2.4), находим

$$\begin{gathered}u_{3r}^\circ=\eta^{\delta_2-\delta_1}\frac{\operatorname{div}(\mathbf{F}_\tau\eta^{-\delta_2})\cos\Lambda\zeta}{\Lambda^2\cos\Lambda}-\eta^{1-q-\delta_1}\frac{\Delta w}{\Lambda}\left(\frac{\zeta}{2\beta}\sin\beta\Lambda\zeta+\right.\\+\frac{2\cos\beta\Lambda}{\Lambda\cos\Lambda}\cos\Lambda\zeta-\eta^{1+q-\delta_1}w\left\{\frac{1}{\beta\Lambda}\left[\varkappa_1^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)-\frac{\varkappa_2}{2}\right]\zeta\sin\beta\Lambda\zeta-\right.\\\left.-\frac{1}{4}\left(\frac{\varkappa_1^2}{2}+\varkappa_2\right)\zeta^2\cos\beta\Lambda\zeta\right\}-\eta^{q+\delta_2-\delta_1}\frac{(\Phi_3\eta^{-\delta_2})\varkappa_1\zeta\sin\beta\Lambda\zeta}{2\Lambda\beta_2\beta\cos\beta\Lambda}+O(\eta^{\delta_2})\end{gathered} \tag{2.12}$$

Наконец внося $\mathbf{u}_\tau^\circ$ по (2.8), u_3^1 по (2.11) и u_{3r}° по (2.12) в (2.7) и, кроме того, заменяя там по формуле (2.1) μ на Λ, приходим к двумерному уравнению относительно w:

$$\eta^{2-2q}T^*\Delta w+\eta^2 T_R^* w+(\mu-\Lambda)w+O(\eta^{2\delta_2})=P_3^* \tag{2.13}$$

$$T^*={}^1/_2\Lambda^{-1}\beta^{-2}-4\Lambda^{-2}\operatorname{tg}\Lambda,\quad T_R^*=-2\Lambda^{-1}[\varkappa_2({}^3/_4\beta_2-\beta_1)+$$
$$+{}^1/_8\varkappa_1^2\beta_2],\ P_3^*=2(-1)^{n+1}\Lambda^{-1}(F_3+\eta^{1-q}\Lambda^{-1}\operatorname{div}\mathbf{F}_\tau\operatorname{tg}\Lambda+$$
$$+{}^1/_2\eta\varkappa_1\Phi_3),\quad \Lambda=\pi n/\beta\quad (n\in\mathbf{N},\ n\sim\eta^0)$$

С учетом (2.1) заключаем, что при выводе уравнения (2.13) совершено пренебрежение членами порядка $O(\eta^{\delta_2})$ по сравнению с единицей. Остановимся теперь на обосновании законности проведенного вывода. Для этого достаточно доказать, что все входящие в (2.3), (2.6) безразмерные величины имеют одинаковый асимптотический порядок. Покажем, что все указанные величины асимптотически соизмеримы. Будем предполагать, что входящие в P_3^* безразмерные нагрузки соизмеримы, т. е. $F_3\sim\mathbf{F}_\tau\sim\Phi_3$. Обращаясь к последнему уравнению, имеем $\Phi_3\sim\eta^{\delta_2}w$. Внесем полученное соотношение в (2.8). Учитывая, что $\delta_1=\min(\delta_2,\ 1-q)$, приходим к выводу, что $\mathbf{u}_\tau^\circ\sim w$. Применяя такие же рассуждения к формулам (2.11), (2.12), получаем $u_3^1\sim u_{3r}^\circ\sim w$. Для остальных входящих в (2.3) величин их асимптотическая соизмеримость w доказывается аналогично.

Возвратимся в уравнении (2.13) к исходным координатам α_1, α_2 на срединной поверхности оболочки. Введем новое размерное перемещение $v_3^a(\alpha_1,\alpha_2)=hw(\alpha_1,\alpha_2)$, которое имеет смысл медленно меняющейся амплитуды толщинных продольных колебаний. Запишем, опуская O-член

$$T\Delta v_3^a+T_R v_3^a+(\omega h/c_2-\Lambda)v_3^a=P_3 \tag{2.14}$$

$$T=h^2T^*,\quad T_R=-\frac{2h^2}{\Lambda}\left[\left(1-\frac{1}{16\beta^2}\right)\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)+\frac{1}{8\beta^2R_1R_2}\right]$$

$$P_3=\frac{2(-1)^{n+1}h}{\Lambda}\left[F_3+\frac{h\Phi_3}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{h\operatorname{tg}\Lambda}{\Lambda}\operatorname{div}\mathbf{F}_\tau\right]$$

Замечание 1. Считается, что коэффициент T^* имеет порядок η^0. В тех ситуациях, когда это условие нарушается, требуется специальное рассмотрение.

Замечание 2. Полученное уравнение можно использовать для описания нестационарных явлений, вызванных действием быстро изменяющейся по времени нагрузки, заменив ω на $i\partial/\partial t$. При этом адекватному описанию будут поддаваться лишь такие волновые процессы, для которых $hc_2^{-1}i\partial/\partial t-\Lambda\sim\sim\eta^b$ $(b>0)$.

Замечание 3. При $R_1\to\infty$, $R_2\to\infty$ уравнение (2.14) переходит в уравнение, описывающее высокочастотные НДС малой изменяемости для пластин. Уравнения, полученные для случая пластин в [5], имеют более громоздкий вид, чем (2.14) при $T_R=0$, и, как можно убедиться при помощи развиваемого здесь подхода, произведенный там учет некоторых не вошедших в (2.14) членов не является асимптотически последовательным. Реального уточнения обсуждаемой теории нельзя добиться без повышения порядка уравнения (2.14) (так, например, в следующей итерации необходимо удерживать член типа $\Delta\Delta v_3^a$ и т. д.).

Замечание 4. Уравнение (2.14) сохраняет свой вид и когда $\omega R/c_2\sim\eta^{-r}\mu$ $(\mu\sim\eta^0,\ r>1)$. В этом случае в формуле растяжения масштаба по нормальной координате (1.4) следует положить $\alpha_3=R\eta^r\zeta$. Отсюда, в частности, следует, что интегрирование должно вестись в области $-\eta^{1-r}\leqslant\zeta\leqslant\eta^{1-r}$, ширина которой безгранично растет при $\eta\to 0$. Это приводит к значительно более громоздким оценкам погрешностей, совершаемых при выполнении выкладок, которые здесь не приводятся. Неравенство (1.4) принимает теперь вид $\mu\eta^{1-r}-\Lambda\sim\eta^b$ $(b>0)$, где $\Lambda={}^1/_2\pi m\beta^{-1}$ $(m\in\mathbf{N},\ m\sim\eta^{r-1})$. Таким образом, рассматриваемый случай соответствует колебаниям с большим числом волн по толщине и, повидимому, представляет существенно меньший интерес для приложений, чем случай $r=1$ $(m\sim\eta^0)$.

Для случая, когда u_3°, $\mathbf{u}_\tau^\circ$ определяют симметричное относительно срединной поверхности оболочки НДС, $\Lambda=\pi\beta^{-1}(n-{}^1/_2)$ $(n\in\mathbf{N},\ n\sim\eta^\circ)$, а в (2.6) следует заменить cos на sin. Несколько изменятся, сохраняя свою структуру и другие формулы. Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем лишь окончательный результат: уравнения (2.13), (2.14) сохраняют свой вид с точностью до замены tg на —ctg и $(-1)^{n+1}$ на $(-1)^n$.

Продолжим обсуждение выведенного уравнения. Разберем наиболее важный случай свободных лицевых поверхностей ($Q_i^{\pm}=Q_3^{\pm}\equiv 0$). Уравнения (2.13), (2.14) теперь становятся однородными, а показатели изменяемости и отклонения связаны равенством $2-2q=b$. Отсюда следует, что $\delta_1=1-q$, $\delta_2=2-2q$. Кроме того, надо считать $\delta_3=1$, а в (2.3) в показателе степени малого параметра вместо $\delta_2-\delta_1$ положить единицу. Таким образом, все величины, отвечающие асимптотически второстепенной составляющей НДС будут входить в соотношения (2.3) с множителем η. Это объясняется тем, что коэффициенты Ламе с погрешностью $O(\eta)$ постоянны по толщине и, как можно убедиться, с этой же погрешностью уравнения (1.1) при учете (1.3), (1.4) с точностью до метрики совпадают с уравнениями теории пластин. Усложнение соотношений (2.3) при наличии поверхностных сил на лицевых поверхностях оболочки связано с принимаемым в общем случае предположением об асимметрии нагрузки и совпадении интенсивности ее тангенциальных и нормальной компонент ($F_3\sim\mathbf{F}_\tau\sim\Phi_3$).

Возвращаясь к случаю свободных лицевых поверхностей, выразим в остаточном члене уравнения (2.13) δ_2 через показатель изменяемости q. После этой подстановки он станет иметь порядок $O(\eta^{4-4q})$. Таким образом, при выводе однородного уравнения (2.13) пренебрегалось членами порядка $O(\eta^{2-2q})$ по сравнению с единицей. Используя результаты [9, п. 2], заключаем, что интегралы этого уравнения можно построить с асимптотически исчезающей погрешностью лишь при

$$q<{}^2/_3 \quad (b>{}^2/_3) \tag{2.15}$$

Заключая обсуждение уравнения теории высокочастотных НДС малой изменяемости, отметим, что по найденному из уравнения (2.14) перемещению v_3^a с помощью формул этого пункта может быть приближенно восстановлено трехмерное НДС оболочки. При его построении можно заведомо пренебрегать членами порядка $O(\eta^{\delta_2})$ ввиду того, что такая погрешность допускается при выводе двумерного уравнения (2.14). Из этого, например, вытекает, что вследствие неравенства $1-q+\delta_1\geqslant\delta_2$ можно в пределах допускаемой погрешности не учитывать поправку, вносимую в трехмерное НДС оболочки остаточным членом формулы (2.6).

3. Высокочастотные НДС малой изменяемости второго типа. НДС второго типа имеют место в частотном диапазоне (2.1) при $\Lambda={}^1/_2\pi m$ ($m\in\mathbf{N}$, $m\sim\eta^0$). Таким значениям Λ соответствуют собственные частоты поперечных колебаний нормального к срединной поверхности среза оболочки.

НДС этого типа имеют следующую асимптотику

$$\begin{gathered} v_i=hu_i,\quad \sigma_{i3}=E_1 s_{i3},\quad v_3=h\eta^{\delta_1}u_3,\quad \sigma_{kk}=E_1\eta^{\delta_1}s_{kk} \\ \sigma_{ij}=E_1\eta^{1-q}s_{ij},\quad E_1={}^1/_2E/(1+\nu) \end{gathered} \tag{3.1}$$

Формулы, реализующие разбиение НДС оболочки на симметричную и антисимметричную относительно срединной поверхности составляющие, в этом случае имеют вид

$$\begin{gathered} u_i=u_i{}^0+\eta^{\delta_3}u_i{}^1,\quad s_{i3}=s_{i3}{}^0+\eta^{\delta_3}s_{i3}{}^1,\quad u_3=u_3{}^0+\eta^{\delta_2-\delta_1}u_3{}^1 \\ s_{kk}=s_{kk}{}^0+\eta^{\delta_2-\delta_1}s_{kk}{}^1,\quad s_{ij}=s_{ij}{}^0+\eta^{\delta_3}s_{ij}{}^1 \end{gathered} \tag{3.2}$$

Приводимые ниже выкладки аналогичны выкладкам, производившимся при выводе уравнения (2.14). В связи с этим будем сопровождать их лишь краткими пояснениями.

Подставим (3.1), (3.2) вместе с (1.4) в (1.1) и (1.2). Для асимптотически главной составляющей искомого НДС получим уравнения и граничные условия при $\zeta=1$

$$\partial^2\mathbf{u}_\tau{}^0/\partial\zeta^2+\mu^2\mathbf{u}_\tau{}^0+\eta^{1-q+\delta_1}\left[\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\partial u_3{}^0/\partial\zeta+\eta^{1-q-\delta_1}\left(\Delta\mathbf{u}_\tau{}^0+\frac{1}{1-2\nu}\times\right.\right.$$

$$\times \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_\tau{}^\circ \Big] - \eta^2(\varkappa_1 L_1 \mathbf{u}_\tau{}^\circ + \varkappa_2 \zeta \partial \mathbf{u}_\tau{}^\circ/\partial\zeta) + \eta^{1+\delta_3}\varkappa_1 \partial \mathbf{u}_\tau{}^1/\partial\zeta + O(\eta^{2-q+\delta_2}) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_3{}^\circ}{\partial\zeta^2} + \mu^2\beta^2 u_3{}^\circ + \eta^{1-q-\delta_1}\frac{\beta^2}{1-2\nu}\frac{\partial \mathbf{u}_\tau{}^\circ}{\partial\zeta} + O(\eta^{2-2q} + \eta^{1+\delta_2-\delta_1}) = 0 \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}\partial \mathbf{u}_\tau{}^\circ/\partial\zeta + \eta^{1-q+\delta_1} \operatorname{grad} u_3{}^\circ + \eta^2 L_2 \mathbf{u}_\tau{}^\circ - \eta^{1+\delta_3} L_1 \mathbf{u}_\tau{}^1 + O(\eta^{2-q+\delta_2}) = \mathbf{F}_\tau \\ \beta_2 \partial u_3{}^\circ/\partial\zeta + \eta^{1-q-\delta_1}\beta_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_\tau{}^\circ + O(\eta^{1+\delta_2-\delta_1}) = \eta^{-\delta_1} F_3 \quad (\zeta = 1)\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь в дополнение к уже введенным использовано обозначение

$$L_j \mathbf{a}_\tau = \sum_{m=1}^{2} \frac{R^j}{R_m{}^j} a_m \mathbf{i}_m \qquad (\mathbf{a}_\tau = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2)$$

Разберем случай, когда асимптотически главная часть НДС оболочки антисимметрична относительно срединной поверхности. Исходя из первого уравнения (3.3), запишем ($\boldsymbol{\psi}$, $\mathbf{u}_{\tau r}{}^\circ$ — неизвестные пока векторы):

$$\mathbf{u}_\tau{}^\circ = \boldsymbol{\psi}(\xi_1, \xi_2)\sin\mu\zeta + \eta^{1-q+\delta_1}\mathbf{u}_{\tau r}{}^\circ(\xi_1, \xi_2, \zeta) \tag{3.5}$$

Внося это представление в первое граничное условие (3.4), имеем

$$\begin{gathered}\mu\boldsymbol{\psi}\cos\mu + \eta^{1-q+\delta_1}(\partial \mathbf{u}_{\tau r}{}^\circ/\partial\zeta + \operatorname{grad} u_3{}^\circ) + \eta^2 L_2 \boldsymbol{\psi}\sin\mu - \\ - \eta^{1+\delta_3} L_1 \mathbf{u}_\tau{}^1 + O(\eta^{2-q+\delta_2}) = \mathbf{F}_\tau \qquad (\zeta = 1)\end{gathered} \tag{3.6}$$

Подставив (3.5) во второе уравнение (3.3) и второе граничное условие (3.4), получим

$$\begin{gathered}u_3{}^\circ = -\eta^{\delta_2-\delta_1}\frac{(F_3\eta^{-\delta_2})\cos\beta\Lambda\zeta}{\beta_2\beta\Lambda\sin\beta\Lambda} + \eta^{1-q-\delta_1}\frac{\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}}{\Lambda}\Big(\cos\Lambda\zeta - \\ - \frac{\sin\Lambda}{\beta_2\beta\sin\beta\Lambda}\cos\beta\Lambda\zeta\Big) + O(\eta^{\delta_2})\end{gathered} \tag{3.7}$$

Вектор $\mathbf{u}_\tau{}^1$ определим из уравнения

$$\partial^2 \mathbf{u}_\tau{}^1/\partial\zeta^2 + \mu^2 \mathbf{u}_\tau{}^1 + \eta^{1-\delta_3}\varkappa_1 \partial \mathbf{u}_\tau{}^\circ/\partial\zeta + O(\eta^{1-q+\delta_2-\delta_3}) = 0 \tag{3.8}$$

с граничным условием при $\zeta = 1$

$$\partial \mathbf{u}_\tau{}^1/\partial\zeta = \eta^{1-\delta_3} L_1 \mathbf{u}_\tau{}^\circ + \eta^{\delta_2-\delta_3}(\boldsymbol{\Phi}_\tau \eta^{-\delta_2}) + O(\eta^{1-q+\delta_2-\delta_3}) \tag{3.9}$$

где $\Phi_j = {}^1\!/_2 E_1{}^{-1}(Q_j{}^+ \mp Q_j{}^-)$ (выбор знака перед $Q_j{}^-$ производится как и выше). Выражая в (3.8), (3.9) $\mathbf{u}_\tau{}^\circ$ по (3.5), получим

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_\tau{}^1 = -\eta^{\delta_2-\delta_3}\frac{(\boldsymbol{\Phi}_\tau\eta^{-\delta_2})\cos\Lambda\zeta}{\Lambda\sin\Lambda} - \eta^{1-\delta_3}\boldsymbol{\psi}\Big(\frac{L_1 + \varkappa_1/2}{\Lambda}\cos\Lambda\zeta + \\ + \frac{\varkappa_1}{2}\zeta\sin\Lambda\zeta\Big) + O(\eta^{1-q+\delta_2-\delta_3} + \eta^{\delta})\end{gathered} \tag{3.10}$$

Внося теперь (3.7), (3.10) в первое уравнение (3.3), найдем

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_{\tau r}{}^\circ = -\eta^{\delta_2-\delta_1}\frac{2\operatorname{grad}(F_3\eta^{-\delta_2})\sin\beta\Lambda\zeta}{\Lambda^2\sin\beta\Lambda} + \eta^{1-q-\delta_1}\Big(\frac{\Delta\boldsymbol{\psi}}{2\Lambda}\zeta\cos\Lambda\zeta - \\ - \frac{2\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}\sin\Lambda}{\Lambda^2\sin\beta\Lambda}\sin\beta\Lambda\zeta\Big) + \eta^{1+q-\delta_1}\frac{\boldsymbol{\psi}}{4}\Big(\frac{\varkappa_1{}^2}{2} + \varkappa_2\Big)\zeta \times \\ \times\Big(\frac{1}{\Lambda}\cos\Lambda\zeta + \zeta\sin\Lambda\zeta\Big) + \eta^{q+\delta_2-\delta_1}\frac{(\boldsymbol{\Phi}_\tau\eta^{-\delta_2})\varkappa_1\zeta\cos\Lambda\zeta}{2\Lambda\sin\Lambda} + O(\eta^{\delta_2})\end{gathered} \tag{3.11}$$

Выражая в (3.6) $u_3{}^\circ$, $\mathbf{u}_\tau{}^1$, $\mathbf{u}_{\tau r}{}^\circ$ по формулам (3.7), (3.10), (3.11) и заменяя там μ на Λ в соответствии с (2.1), придем к двумерному уравнению относительно вектора ψ:

$$\eta^{2-2q}({}^1/_2\Lambda^{-1}\Delta\psi+B^*\operatorname{grad}\operatorname{div}\psi)+\eta^2B_R{}^*\psi+(\mu-\Lambda)\psi+O(\eta^{2\delta_2})=\mathbf{P}_\tau{}^* \quad (3.12)$$
$$B^*=4\beta\Lambda^{-2}\operatorname{ctg}\beta\Lambda,\quad B_R{}^*=-\Lambda^{-1}[{}^1/_4({}^1/_2\varkappa_1{}^2+\varkappa_2)+{}^1/_2\varkappa_1L_1+L_2]$$
$$\mathbf{P}_\tau{}^*=(-1)^n\Lambda^{-1}(\mathbf{F}_\tau+{}^1/_2\eta\varkappa_1\Phi_\tau+\eta^{1-q}4\beta\Lambda^{-1}\operatorname{grad}F_3\operatorname{ctg}\beta\Lambda),\quad \Lambda={}^1/_2\pi(n-{}^1/_2)$$
$$(n\in\mathbf{N},\ n\sim\eta^0)$$

Принимая в расчет (2.1), заключаем, что при выводе уравнения (3.12) так же, как и при выводе уравнения, описывающего высокочастотные НДС малой изменяемости первого типа, допускается погрешность $O(\eta^{\delta_2})$ по сравнению с единицей.

Возвратимся в (3.12) к исходным координатам и введем размерный вектор $\mathbf{v}_\tau{}^a(\alpha_1,\alpha_2)=h\psi(\alpha_1,\alpha_2)$, компоненты которого — амплитуды толщинных сдвиговых колебаний. Опуская O-член, запишем

$$ {}^1/_2h^2\Lambda^{-1}\Delta\mathbf{v}_\tau{}^a+B\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}_\tau{}^a+B_R\mathbf{v}_\tau{}^a+(\omega h/c_2-\Lambda)\mathbf{v}_\tau{}^a=\mathbf{P}_\tau \quad (3.13)$$
$$B=h^2B^*,\quad B_R\mathbf{v}_\tau{}^a=-\frac{h^2}{\Lambda}\left\{\left[\frac{3}{8}\left(\frac{1}{R_1{}^2}+\frac{1}{R_2{}^2}\right)+\frac{1}{4R_1R_2}\right]\mathbf{v}_\tau{}^a+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{v_1{}^a}{R_1}\mathbf{i}_1+\frac{v_2{}^a}{R_2}\mathbf{i}_2\right)+\frac{v_1{}^a}{R_1{}^2}\mathbf{i}_1+\frac{v_2{}^a}{R_2{}^2}\mathbf{i}_2\right\}$$
$$\mathbf{P}_\tau=\frac{(-1)^nh}{\Lambda}\left[\mathbf{F}_\tau+\frac{h\Phi_\tau}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{4h\beta\operatorname{ctg}\beta\Lambda\operatorname{grad}F_3}{\Lambda}\right]$$

Для случая, когда асимптотически главная составляющая искомого НДС симметрична относительно срединной поверхности оболочки ($\Lambda=\pi n$ $(n\in\mathbf{N},\ n\sim\eta^0)$, уравнения (3.13), (3.14) сохраняют вид с точностью до замены ctg на $-$tg и $(-1)^n$ на $(-1)^{n+1}$.

Сформулированные в предыдущем пункте замечания, а также рассуждения относительно области применимости полученного уравнения без изменений переносятся на высокочастотные НДС малой изменяемости, описываемые (3.13).

4. Граничные условия. Остановимся на вопросе о постановке граничных условий двумерным уравнениям (2.14), (3.13). Ограничимся пятью простейшими вариантами закрепления края оболочки $\alpha_i=\alpha_{i0}$ (полагаем, что край совпадает с α_j-линией), которые в терминах трехмерной теории упругости могут быть сформулированы в виде

$$\sigma_{ik}=0\ (\mathrm{I}),\quad v_k=0\ (\mathrm{II}),\quad \sigma_{ii}=\sigma_{ij}=0,\quad v_3=0\ (\mathrm{III})$$
$$\sigma_{ij}=\sigma_{i3}=0,\ v_i=0\ (\mathrm{IV}),\ \sigma_{ii}=\sigma_{i3}=0,\quad v_j=0\ (\mathrm{V})\ \ (i\neq j=1,2;$$
$$k=1,\ldots,3) \quad (4.1)$$

Сделаем несколько существенных для дальнейшего изложения предварительных замечаний. При рассмотрении оболочки с краями решения уравнений (2.14), (3.13) можно разделить на две компоненты с разными показателями изменяемости. Первая из них соответствует частному решению неоднородного уравнения и имеет показатель изменяемости q_1, равный показателю изменяемости внешней нагрузки. Вторая компонента определяется интегралом однородного уравнения. Ее показатель изменяемости q_2 связан с показателем отклонения формулой $2-2q_2=b$. При выводе граничных условий будем производить оценки по наибольшему из этих показателей. Таким образом, в формулах п. 2, 3 полагаем, что $q=\max(q_1,q_2)$. Нетрудно убедиться, что в формулах (2.2), (2.6), (2.8), (3.1), (3.5), (3.7) следует принять $\delta_1=1-q$, $\delta_2=2-2q$, а в формулах (2.3), (3.2) $-\delta_2-\delta_1\equiv$ $\equiv[2-2q-\min(2-2q_2,\ 1-q_1)]$, $\delta_3=\min(1,\ 2-2q)$. Важно также отметить, что общая погрешность, допускаемая при использовании уравнений (2.14), (3.13) в случае оболочки с краями, с учетом принятого обозначения принимает вид $O(\eta^{2-2q})$.

Получим сначала граничные условия к уравнению (2.14). Рассмотрим подробнее вариант I. Выражая с учетом сказанного σ_{ik} через s_{ik} по формулам (2.2), получаем

$$s_{ii}=0, \quad \eta^{1-q}s_{i3}=0, \quad \eta^{2-2q}s_{ij}=0 \tag{4.2}$$

Условимся при построении граничных условий допускать погрешность порядка $O(\eta^{1-q})$ по сравнению с единицей. Будем для определенности считать, что $\beta_1\neq 0$. В рамках этой погрешности можно игнорировать второе и третье граничное условие (4.2), а первое граничное условие (4.2) с учетом (1.1), (1.4), (2.2), (2.3) и (2.6) записать в виде (верхнее выражение в фигурных скобках соответствует антисимметричному, а нижнее — симметричному по ζ случаю):

$$\frac{\partial u_3^\circ}{\partial\zeta}=\mu\beta w\begin{Bmatrix}-\sin\beta\mu\zeta\\ \cos\beta\mu\zeta\end{Bmatrix}=0$$

Отсюда получаем для варианта I двумерное граничное условие на краю $\alpha_i=\alpha_{i0}$:

$$v_3^a=0 \tag{4.3}$$

Замена граничных условий свободного края (4.1) условием (4.3) приводит к появлению в первых невязки порядка $O(\eta^{1-q})$. Для снятия этой невязки в трехмерных граничных условиях на НДС, определяемое из решения уравнения (2.14) с граничным условием (4.3), должно быть наложено два дополнительных НДС с интенсивностью $O(\eta^{1-q})$ каждое. Первое из них определяется интегралом однородного уравнения (2.14), а второе является быстро меняющимся, и в окрестности края оболочки ему соответствуют интегралы типа плоского и антиплоского динамического погранслоя [9]. Уравнения плоского и антиплоского динамического погранслоя являются обобщением уравнений статического погранслоя, их асимптотически главная часть совпадает с уравнениями плоской и антиплоской задачи теории упругости в метрике срединной поверхности оболочки.

Вопрос о построении двумерных граничных условий с точностью до величин порядка $O(\eta^{2-2q})$ идейно близок к рассмотренному в статической теории [7, 10]. В нашем случае для построения таких граничных условий потребовалось бы изучить взаимодействие медленно меняющейся составляющей НДС оболочки, определяемой уравнением (2.14), с динамическим погранслоем, на чем здесь мы останавливаться не будем. Важно также отметить, что поправка порядка $O(\eta^{1-q})$ к определяемой из (2.14), (4.3) медленно меняющейся части НДС в значительной мере обесценивается тем, что такой же асимптотический порядок имеет и быстро меняющаяся составляющая НДС, которая в отличие от статики не локализована у краев, а трехмерная задача определения последней в случае оболочки общего очертания вызывает принципиальные трудности.

Такое же, как и для варианта I рассмотрение показывает, что для вариантов II, III, V двумерное граничное условие будет иметь вид (4.3). Отличие в граничных условиях, соответствующих этим вариантам, будет лишь в членах порядка $O(\eta^{1-q})$, т. е. за пределами установленной здесь точности. Для варианта IV на основании рассуждений, аналогичных приведенным, исходя из (1.1), (1.4), (2.2), (2.3), (2.6) и (2.8), получим граничное условие вида

$$\partial v_3^a/\partial\alpha_i=0 \tag{4.4}$$

Перейдем теперь к отысканию двумерных граничных условий для уравнения (3.13). Остановимся на варианте I. Воспользовавшись формулами (3.1) и приняв во внимание сделанные в начале этого пункта замечания, перепишем граничные условия (4.1) в безразмерных напряжениях

$$s_{i3}=0, \quad \eta^{1-q}s_{ii}=0, \quad \eta^{1-q}s_{ij}=0 \tag{4.5}$$

Для того чтобы получить из (4.5) двумерные граничные условия, следует приравнять нулю напряжения s_{i3}, s_{ij}, отбросив в них величины порядка $O(\eta^{1-q})$. Не останавливаясь подробно на обосновании этого факта, укажем лишь, что невязка, возникающая в исходных трехмерных граничных условиях, снимается наложением суперпозиции медленно и быстро меняющегося НДС с интенсивностью $O(\eta^{1-q})$ каждое. Исходя из (1.1), (1.4), (3.1), (3.2) и (3.5), получим

$$v_i^a=0, \quad \frac{1}{A_j}\frac{\partial v_j^a}{\partial \alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}v_j^a=0 \tag{4.6}$$

Граничные условия (4.6) будут иметь место и для варианта IV, а различие между двумерными граничными условиями для этих вариантов обнаруживается только в членах порядка $O(\eta^{1-q})$.

Для вариантов II и V граничные условия имеют вид

$$\mathbf{v}_\tau^a=0 \tag{4.7}$$

Для случая закрепления краев оболочки, соответствующего варианту III, все входящие в трехмерные граничные условия величины имеют одинаковый асимптотический порядок (см. 3.1). В связи с этим для получения двумерных граничных условий даже в самом грубом приближении надо в окрестности края оболочки вводить в рассмотрение динамический погранслой. Вызванные этим технические осложнения здесь обсуждаться не будут.

5. Сопоставление с двумерными уравнениями [6]. Влияние кривизны оболочки на формирование высокочастотных НДС малой изменяемости в уравнениях (2.14), (3.13) отражено соответственно членами с коэффициентами T_R, B_R, которые при $R_1\to\infty$, $R_2\to\infty$ обращаются в нуль. В связи с этим одна из главных задач предлагаемой статьи состояла в асимптотически точном определении указанных коэффициентов.

Продолжая обсуждение уравнений (2.14), (3.13), сопоставим их с уравнениями, полученными в [6]. Остановимся подробнее на уравнении, описывающем высокочастотные НДС малой изменяемости первого типа. После отбрасывания асимптотически второстепенных членов, уравнение п. 5 [6] для ветвей $F_\perp$, $L_\perp$ в наших обозначениях представимо в виде (2.14) с точностью до замены T_R на

$$T_R^w=\frac{h^2}{8\beta^2\Lambda}\left[(9-48\beta^2+32\beta^4)\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)+\frac{2(7-32\beta^2+32\beta^4)}{R_1R_2}\right] \tag{5.1}$$

Таким образом, сопоставляемые уравнения отличаются в асимптотически главных членах.

В качестве тестовой рассмотрим задачу о свободных центральносимметричных радиальных колебаниях упругой сферической оболочки. Этот простейший тест весьма удобен в связи с тем, что отклонение собственных частот таких колебаний $\mu=\omega h/c_2$ от частот среза $\Lambda={}^1/_2\pi m\beta^{-1}$ ($m\in\mathrm{N}$, $m\sim\eta^0$), как непосредственно следует из (2.13), (2.14), в главном определяется коэффициентом T_R. Оно имеет вид

$$\Lambda-\mu=T_R+O(\eta^4) \tag{5.2}$$

Если при определении собственных частот сферической оболочки исходить из уравнения работы [6], то в (5.2) следует заменить T_R на T_R^w.

Выпишем теперь точное уравнение центральносимметричных колебаний сферической оболочки [11]:

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2v_r}{r^2}+\beta^2\mu_1^2v_r=0 \tag{5.3}$$

где v_r – радиальное перемещение, r – расстояние от рассматриваемой точки до центра сферы, $\mu_1=\mu/h$.

Граничное условие на лицевых поверхностях $r=R\pm h$ имеет вид

$$\sigma_{rr}={}^1/_2E_1^{-1}(\beta_2\partial v_r/\partial r+2\beta_1/rv_r) \tag{5.4}$$

Общее решение уравнения (5.3) возьмем в форме (C_1, C_2 – константы):

$$v_r=r^{-2}[C_1(\beta\mu_1r\cos\beta\mu_1r-\sin\beta\mu_1r)+C_2(\beta\mu_1r\sin\beta\mu_1r+\cos\beta\mu_1r)] \tag{5.5}$$

Подставляя (5.5) в (5.4) и делая замену переменной $r=R+h\zeta$, после серии преобразований приходим к уравнению для определения μ ($\varphi^\pm=\varphi|_{\zeta=\pm1}$, где φ – произвольная функция)

$$(f_1^+f_2^--f_2^+f_1^-)\cos 2\beta\mu-(f_1^+f_1^-+f_2^+f_2^-)\sin 2\beta\mu=0 \tag{5.6}$$

$$f_1=-\frac{\mu^2}{2(1+\eta\zeta)}+\frac{2\eta^2}{(1+\eta\zeta)^3}\qquad f_2=-\frac{2\eta\beta\mu}{(1+\eta\zeta)^2}$$

Отбрасывая бесконечно малые более высокого порядка малости, отсюда получаем

$$\Lambda-\mu=-4\eta^2\Lambda^{-1}+O(\eta^4) \tag{5.7}$$

Подставляя теперь в (5.2) T_R при $R_1=R_2=R$, убеждаемся в совпадении (5.2) и (5.7). Внесем теперь в (5.2) $T_R{}^w$ вместо T_R при $R_1=R_2=R$. Будем иметь

$$\Lambda-\mu=-4\eta^2\Lambda^{-1}(5+4\beta^2-\beta^{-2})+O(\eta^4) \tag{5.8}$$

Сопоставляя (5.7) и (5.8), приходим к выводу, что в рассмотренном примере асимптотически главный член уравнения из [6], отражающий влияние кривизны оболочки, принимает значение, отличающееся от значения, получаемого из точного решения задачи теории упругости. Наблюдаемое расхождение, по-видимому, связано с тем, что в [6] не были учтены некоторые члены, входящие в поправку $u_{3r}{}^\circ$ в формуле (2.6). Отсюда вытекает, что уравнение из [6] в случае сферической оболочки дает не исчезающую при $\eta\to 0$ погрешность как при локальной аппроксимации параметров НДС трехмерного упругого тела, так и при определении его энергии.

Для высокочастотных НДС малой изменяемости второго типа коэффициент, отражающий влияние кривизны оболочки в уравнении [6] также отличается от коэффициента B_R в (3.13). Решение тестовой задачи о тангенциальных центрально-симметричных колебаниях сферической оболочки дает аналогичную (5.7) формулу

$$\Lambda-\mu=-3\eta^2\Lambda^{-1}+O(\eta^4) \tag{5.9}$$

Обращаясь к (3.13), получим совпадающую с (5.9) оценку.

В заключение автор выражает глубокую признательность А. Л. Гольденвейзеру за постоянное внимание к работе и ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигул У. К.* О корнях уравнения Лэмба для деформации плиты, антисимметричной относительно срединной поверхности // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1963. Т. 12. № 3. С. 284–293.
2. *Айнола Л. Я., Нигул У. К.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14. № 1. С. 3–63.
3. *Нигул У. К.* Волновые процессы деформации оболочек и пластин // Тр. 7-й Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск. 1969. М.: Наука, 1970. С. 846–883.
4. *Achenbach J. D.* An asymptotic method to analyze the vibrations of an elastic layer // Trans. ACME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 1. P. 65–72.
5. *Бердичевский В. Л.* Высокочастотные длинноволновые колебания пластин // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 6. С. 1319–1322.
6. *Бердичевский В. Л., Ле Хань Чау.* Высокочастотные длинноволновые колебания оболочек // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 4. С. 737–744.
7. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
8. *Коссович Л. Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 175 с.
9. *Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д.* Динамический погранслой в задачах колебаний оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 152–162.
10. *Гольденвейзер А. Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 996–1028.
11. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.IV.1989