

УДК 539.3:534.1

© 1990 г.

А. П. МАРКЕЕВ

ЭВОЛЮЦИЯ БЫСТРЫХ ВРАЩЕНИЙ  
ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Исследуется эволюция быстрых вращений цилиндрической оболочки в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите. Оболочка совершает упругие колебания без растяжений и сжатий, внутреннее демпфирование упругих колебаний моделируется силами вязкого трения. Предполагается, что оболочка достаточно жесткая, а диссипативные силы малы по сравнению с упругими силами. Показано, что кинетический момент оболочки стремится расположиться в плоскости орбиты; при этом, в зависимости от соотношения между моментами инерции недеформированной оболочки, ее ось стремится либо совпасть с кинетическим моментом, либо стать ортогональной ему.

**1. Введение.** Рассмотрим движение тела, имеющего форму цилиндрической оболочки, в центральном ньютоновском гравитационном поле. Предположим, что влиянием движения тела относительно центра масс на движение самого центра масс можно пренебречь и считаем орбиту центра масс круговой.

Срединная поверхность оболочки — цилиндр радиуса  $a$  и длины  $2l$ , толщина оболочки  $2h$ , оболочка однородная,  $\rho$ ,  $E$  и  $\sigma$  — ее плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

При движении по орбите оболочка может совершать упругие колебания. Считаем, что они не сопровождаются растяжениями и сжатиями. При отсутствии внешних сил такие колебания в рамках линейной теории упругости изучены в [1, 2]. Пусть  $Oxyz$  — система координат, образованная главными центральными осями инерции недеформированной оболочки, ось  $Oz$  (ось оболочки) направлена вдоль оси срединной поверхности. Положение частицы  $dm$  недеформированной оболочки задается в системе координат  $Oxyz$  радиусом-вектором  $\xi = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, z)$ , где  $\varphi$  — угол между проекцией  $\xi$  на плоскость  $Oxy$  и осью  $Ox$ . При наличии упругого смещения  $u(\xi, t)$  положению частицы  $dm$  отвечает радиус-вектор  $r = \xi + u$ . Упругое смещение можно представить в виде ряда по собственным формам колебаний оболочки ( $m$  — масса оболочки):

$$u = \sum_{n=2}^{\infty} [q_n^{(1)}(t) U_1^{(n)} + q_n^{(2)}(t) U_2^{(n)} + q_n^{(3)}(t) U_3^{(n)} + q_n^{(4)}(t) U_4^{(n)}] \quad (1.1)$$

$$U_1^{(n)} = \kappa \begin{vmatrix} -(n \cos n\varphi \cos \varphi + \sin n\varphi \sin \varphi) \\ -(n \cos n\varphi \sin \varphi - \sin n\varphi \cos \varphi) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad U_2^{(n)} = \kappa \begin{vmatrix} n \sin n\varphi \cos \varphi - \cos n\varphi \sin \varphi \\ n \sin n\varphi \sin \varphi + \cos n\varphi \cos \varphi \\ 0 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

$$U_3^{(n)} = \delta \begin{vmatrix} -nz (n \cos n\varphi \cos \varphi + \sin n\varphi \sin \varphi) \\ -nz (n \cos n\varphi \sin \varphi - \sin n\varphi \cos \varphi) \\ a \cos n\varphi \end{vmatrix},$$

$$U_4^{(n)} = \delta \begin{vmatrix} nz (n \sin n\varphi \cos \varphi - \cos n\varphi \sin \varphi) \\ nz (n \sin n\varphi \sin \varphi + \cos n\varphi \cos \varphi) \\ -a \sin n\varphi \end{vmatrix}$$

$$\kappa = [2/m (n^2 + 1)]^{1/2}, \quad \delta = [6/m (3a^2 + n^2 (n^2 + 1) l^2)]^{1/2}, \quad m = 8\pi a l h$$

Функции  $U_j^{(n)}$  в (1.1) удовлетворяют условию ортонормированности

$$\int_{\nu} U_i^{(n)} \cdot U_j^{(k)} dm = \delta_{ij} \delta_{nk} \quad (i, j=1, 2, 3, 4; n, k=2, 3, \dots)$$

Здесь интегрирование производится по всей недеформированной оболочке.

Исходя из (1.1) и (1.2) несложно проверить, что центры масс деформированной и недеформированной оболочек совпадают и, кроме того, при всех  $t$  выполняется равенство

$$\int_{\nu} \xi \times u dm = 0$$

Следовательно, система координат  $Oxyz$  является так называемой средней системой координат [3, 4]. В ней отсутствуют перемещения оболочки как абсолютно твердого тела.

Величины  $q_n^{(j)}$  ( $j=1, 2, 3, 4; n=2, 3, \dots$ ) в (1.1) — нормальные координаты при упругих колебаниях оболочки. Координаты  $q_n^{(1)}, q_n^{(2)}$  отвечают плоским упругим колебаниям, в этих колебаниях упругие смещения элементов оболочки происходят в плоскостях, перпендикулярных ее оси. Координаты  $q_n^{(3)}, q_n^{(4)}$  соответствуют пространственным упругим колебаниям, в которых упругие смещения имеют составляющие вдоль оси оболочки.

Выражения для кинетической и потенциальной энергии упругих деформаций записываются в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (q_n^{(1) \cdot 2} + q_n^{(2) \cdot 2} + q_n^{(3) \cdot 2} + q_n^{(4) \cdot 2}) \quad (1.3)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} [\omega_n^2 (q_n^{(1)2} + q_n^{(2)2}) + \Omega_n^2 (q_n^{(3)2} + q_n^{(4)2})]$$

$$\omega_n^2 = \frac{Eh^2 n^2 (n^2 - 1)^2}{3\rho(1 - \sigma^2) a^2 (n^2 + 1)}, \quad \Omega_n^2 = \omega_n^2 \frac{(n^2 + 1) [6(1 - \sigma) a^2 + n^2 l^2]}{3a^2 + n^2 (n^2 + 1) l^2}$$

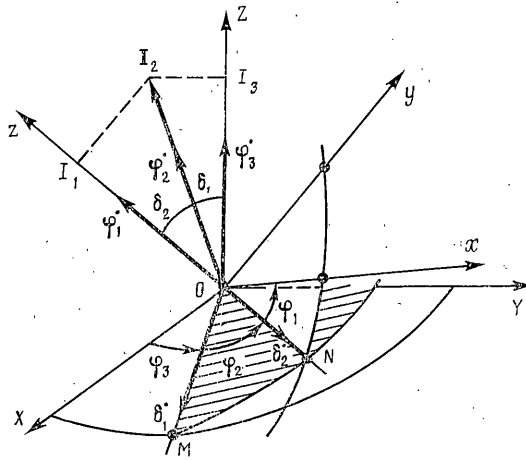
При относительных смещениях элементов оболочки происходит диссипация энергии. Примем, что соответствующие диссипативные силы могут быть заданы при помощи функции Рэлея

$$\Psi = \chi b \sum_{n=2}^{\infty} [\omega_n^2 (q_n^{(1) \cdot 2} + q_n^{(2) \cdot 2}) + \Omega_n^2 (q_n^{(3) \cdot 2} + q_n^{(4) \cdot 2})]$$

где  $b > 0$  — const,  $\chi$  — безразмерный параметр.

**2. Уравнения движения.** Уравнения движения оболочки относительно центра масс запишем в форме уравнений Рауса. За лагранжеву часть переменных Рауса примем величины  $q_n^{(j)}$  из (1.1), а в качестве гамильтоновой части возьмем канонически сопряженные переменные Андуайе  $\varphi_i, I_i$  [5].

Пусть  $OXYZ$  — кенигова система координат, ее оси  $OX$  и  $OY$  лежат в плоскости орбиты и имеют неизменные направления, ось  $OZ$  перпендикулярна плоскости орбиты. На фиг. 1  $I_2$  — кинетический момент оболочки относительно центра масс  $O$ , плоскость  $OMN$  перпендикулярна  $I_2$ , она пересекает плоскость  $OXY$  по прямой  $OM$ , а плоскость  $Oxy$  — по прямой  $ON$ . Смысл угловых переменных  $\varphi_i$  ясен из фиг. 1,  $I_2$  — модуль кинетического момента,  $I_3$  и  $I_1$  — проекции  $I_2$  на оси  $OZ$  и  $Oz$  соответственно. Переход от кениговой системы координат  $OXYZ$  к системе координат  $Oxyz$  осуществляется при помощи пяти последовательных поворотов на



Фиг. 1

углы  $\varphi_3, \delta_1; \varphi_2, \delta_2, \varphi_1$ . Углы  $\delta_1, \delta_2$  определяются равенствами

$$\cos \delta_1 = I_3/I_2, \quad \cos \delta_2 = I_1/I_2 \quad (2.1)$$

Единичный вектор  $\gamma$  радиуса-вектора точки  $O$  относительно притягивающего центра задается в системе координат  $Oxyz$  компонентами ( $\omega_0$  — среднее движение центра масс):

$$\gamma_1 = a_1 \sin \varphi_1 + b_1 \cos \varphi_1, \quad \gamma_2 = a_1 \cos \varphi_1 - b_1 \sin \varphi_1 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= (\cos \beta \sin \varphi_2 + \sin \beta \cos \varphi_2 \cos \delta_1) \sin \delta_2 + \sin \beta \sin \delta_1 \cos \delta_2 \\ a_1 &= -(\cos \beta \sin \varphi_2 + \sin \beta \cos \varphi_2 \cos \delta_1) \cos \delta_2 + \sin \beta \sin \delta_1 \sin \delta_2 \\ b_1 &= \cos \beta \cos \varphi_2 - \sin \beta \sin \varphi_2 \cos \delta_1, \quad \beta = \varphi_3 - \omega_0 t \end{aligned} \quad (2.3)$$

В рамках линейной теории упругости нелинейные относительно обобщенных координат и скоростей  $q_n^{(j)}, \dot{q}_n^{(j)}$  ( $j=1, 2, 3, 4; n=2, 3, \dots$ ) члены не учитываются в уравнениях движения и функцию Рауса можно [6] получить в виде

$$R = H^{(0)} - T + \Pi - \sum_{n=2}^{\infty} (q_n^{(1)} Q_n^{(1)} + q_n^{(2)} Q_n^{(2)} + q_n^{(3)} Q_n^{(3)} + q_n^{(4)} Q_n^{(4)}) + R_*$$

где  $T$  и  $\Pi$  определяются равенствами (1.3),  $R_*$  — линейная по  $\dot{q}_n^{(j)}$  квадратичная форма относительно  $q_n^{(j)}, \dot{q}_n^{(j)}$ , коэффициенты которой — функции переменных Андуайе и времени,

$$H^{(0)} = \frac{1}{2}(C^{-1} - A^{-1})I_1^2 + \frac{1}{2}A^{-1}I_2^2 + \frac{3}{2}\omega_0^2(C - A)\gamma_3^2 \quad (2.4)$$

$A$  и  $C$  — моменты инерции недеформированной оболочки относительно осей  $Ox$  и  $Oz$  соответственно, для тонкой оболочки  $A = \frac{1}{8}m(3a^2 + 2l^2)$ ,  $C = ma^2$ .

Формулы, определяющие величины  $Q_n^{(j)}$ , приведены в [6]. Вычисления показывают, что в случае колебаний цилиндрической оболочки без растяжений и сжатий

$$\begin{aligned} Q_2^{(1)} &= \frac{3a}{2} \sqrt{\frac{m}{10}} \left[ 3\omega_0^2(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) - \frac{(I_2^2 - I_1^2)}{A^2} \cos 2\varphi_1 \right], \\ Q_2^{(2)} &= \frac{3a}{2} \sqrt{\frac{m}{10}} \left[ 6\omega_0^2\gamma_1\gamma_2 - \frac{(I_2^2 - I_1^2)}{A^2} \sin 2\varphi_1 \right], \quad Q_2^{(3)} = Q_2^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$Q_n^{(j)} = 0 \quad (j=1, 2, 3, 4; n=3, 4, \dots)$$

Уравнения движения оболочки относительно центра масс запишутся в виде

$$\varphi_i^* = \partial R / \partial I_i, \quad I_i^* = -\partial R / \partial \varphi_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.6)$$

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial q_n^{(j)}} + \frac{\partial R}{\partial q_n^{(j)}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial q_n^{(j)}} \quad (j=1, 2, 3, 4; n=2, 3, \dots) \quad (2.7)$$

### 3. Уравнения, описывающие квазистатические режимы движения.

Пусть угловая скорость вращения оболочки как целой относительно центра масс велика по сравнению со средним движением центра масс, но мала по сравнению с величиной  $\omega$  наименьшей из частот упругих колебаний оболочки; кроме того будем считать, что диссипативные силы малы по сравнению с упругими силами. Эти предположения позволяют ввести в уравнения движения малые параметры. Пусть  $\mu = A\omega_0/I_2^0$ ,  $\varepsilon = I_2^0/A\omega$ , где  $I_2^0$  — начальная величина кинетического момента. Считаем, что выполняются неравенства  $\chi \ll \varepsilon \ll 1 \ll \mu^{-1}$  ( $\chi \sim \varepsilon^6$ ,  $1 < \delta < 2$ ).

При выполнении этих неравенств имеет место [6] следующее соотношение, характеризующее относительно быструю протекания различных динамических процессов в движении оболочки:  $T_3 \ll T_2 \ll T_1 \ll T$ . Здесь  $T$  — период обращения центра масс по орбите,  $T_1$  и  $T_2$  — характерные времена для движения оболочки относительно центра масс и для затухания ее собственных упругих колебаний соответственно,  $T_3$  — наибольший из периодов собственных упругих колебаний оболочки при отсутствии демпфирования. Считаем, что  $T_1 \sim 1$ .

Если в уравнениях (2.6), (2.7) положить  $\omega_n = \varepsilon^{-1}\lambda_n$ ,  $\Omega_n = \varepsilon^{-1}\Lambda_n$ , то уравнения (2.7) запишутся в виде уравнений с малым параметром  $\varepsilon^2$  при старших производных. Преобразованная система уравнений движения может быть исследована асимптотическими методами теории сингулярно возмущенных уравнений [7]. Затухающие собственные упругие колебания оболочки соответствуют части асимптотического решения типа погранслоя. На интервалах времени, превосходящих  $T_1$  (а мы интересуемся эволюцией движения оболочки относительно центра масс на промежутках времени, отвечающих достаточно большому числу оборотов центра масс по орбите), затухающей частью асимптотического решения можно пренебречь. Регулярная часть асимптотического решения отвечает квазистатическим режимам движения, когда упругие колебания оболочки представляют собой вынужденные колебания под действием гравитационных сил и сил инерции.

Приближенную систему дифференциальных уравнений, описывающую движение оболочки как целой относительно центра масс в квазистатическом режиме ее упругих колебаний, можно [6] записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_i^* = \frac{\partial H}{\partial I_i} + 2\chi\varepsilon^2 b \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_n^2} \sum_{j=1}^2 \left[ (Q_n^{(j)}, H^{(0)}) + \frac{\partial Q_n^{(j)}}{\partial t} \right] \frac{\partial Q_n^{(j)}}{\partial I_i} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Lambda_n^2} \sum_{j=3}^4 \left[ (Q_n^{(j)}, H^{(0)}) + \frac{\partial Q_n^{(j)}}{\partial t} \right] \frac{\partial Q_n^{(j)}}{\partial I_i} \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} I_i^* = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} - 2\chi\varepsilon^2 b \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_n^2} \sum_{j=1}^2 \left[ (Q_n^{(j)}, H^{(0)}) + \frac{\partial Q_n^{(j)}}{\partial t} \right] \frac{\partial Q_n^{(j)}}{\partial \varphi_i} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Lambda_n^2} \sum_{j=3}^4 \left[ (Q_n^{(j)}, H^{(0)}) + \frac{\partial Q_n^{(j)}}{\partial t} \right] \frac{\partial Q_n^{(j)}}{\partial \varphi_i} \right\} \end{aligned}$$

$$(i=1, 2, 3)$$

Здесь  $(Q_n^{(j)}, H^{(0)})$  — скобка Пуассона, а

$$H = H^{(0)} - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{1}{\lambda_n^2} (Q_n^{(1)} + Q_n^{(2)}) + \frac{1}{\Lambda_n^2} (Q_n^{(3)} + Q_n^{(4)}) \right] \quad (3.2)$$

Из (2.5) и (3.1), (3.2) следует, что пространственные квазистатические упругие колебания оболочки не влияют на эволюцию движения оболочки как целой, а из плоских упругих колебаний на эволюцию движения оболочки оказывают влияние только колебания, отвечающие собственной форме с наименьшей частотой  $\omega_2$ .

Учитывая, что  $\omega_0 \sim \mu$ , из (2.2) — (2.5) можно получить, что  $\partial Q_2^{(j)} / \partial t \sim \mu^3$ , а порядок малости скобок Пуассона  $(Q_2^{(j)}, H^{(0)})$  ( $j=1, 2$ ) не превосходит  $\mu^2$ . Поэтому при достаточно малых  $\mu$  величинами  $\partial Q_2^{(j)} / \partial t$  в системе уравнений (3.1) можно пренебречь и с учетом (2.5) они запишутся в виде

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} + \chi \varepsilon^2 \frac{2b}{\lambda_2^2} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial Q_2^{(j)}}{\partial I_i} (Q_2^{(j)}, H^{(0)}) \quad (3.3)$$

$$I_i^* = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} - \chi \varepsilon^2 \frac{2b}{\lambda_2^2} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial Q_2^{(j)}}{\partial \varphi_i} (Q_2^{(j)}, H^{(0)})$$

$$H = H^{(0)} - \varepsilon^2 \frac{9ma^2}{80\lambda_2^2} \left[ \frac{(I_2^2 - I_1^2)^2}{A^4} + 6\omega_0^2 (a_1^2 - b_1^2) \frac{(I_2^2 - I_1^2)}{A^2} + 9\omega_0^4 (1 - \gamma_3^2)^2 \right] \quad (3.4)$$

В дальнейшем полагаем, что  $\varepsilon \sim \mu^{1/2}$ ,  $\chi \sim \mu^{3/2}$ .

**4. Быстрая эволюция.** Если в правых частях уравнений (3.3) отбросить слагаемые, порядок малости которых равен  $\mu^2$  или выше, то получим следующую систему

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{A-C}{AC} I_1 + \varepsilon^2 \frac{9ma^2}{20\lambda_2^2 A^4} I_1 (I_2^2 - I_1^2), \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{I_2}{A} - \varepsilon^2 \frac{9ma^2}{20\lambda_2^2 A^4} I_2 (I_2^2 - I_1^2),$$

$$\dot{\varphi}_3 = 0$$

$$I_1^* = \chi \varepsilon^2 \frac{9ma^2 b (C-A)}{5\lambda_2^2 A^5 C} I_1 (I_2^2 - I_1^2)^2, \quad I_2^* = 0, \quad I_3^* = 0 \quad (4.1)$$

Уравнения (4.1) описывают квазистатические режимы движения в отсутствие гравитационных моментов. Если оболочка абсолютно твердая ( $\varepsilon=0$ ), то ее движение является классической регулярной прецессией симметричного твердого тела в случае Эйлера — Пуансо; если оболочка деформирующаяся ( $\varepsilon \neq 0$ ), а внутреннее трение отсутствует ( $\chi=0$ ), то, согласно (4.1), движение оболочки относительно центра масс также будет регулярной прецессией, но угловые скорости прецессии и собственного вращения изменятся на величины порядка  $\varepsilon^2$ .

Если оболочка вязкоупругая ( $\varepsilon \neq 0$ ,  $\chi \neq 0$ ), то ее движение будет регулярной прецессией с медленно меняющимися (при  $A \neq C$ ) параметрами. Решения системы (4.1) аппроксимируют решения системы (3.3) с погрешностью  $\sim \mu^{1/2}$  на интервале времени  $\tau_1 \sim (\chi \varepsilon^2)^{-1}$ .

Из третьего, пятого и шестого уравнений системы (4.1) следует, что кинетический момент  $I_2$  постоянен по величине и направлению в абсолютном пространстве. Однако имеется эволюция движения оболочки вокруг  $I_2$ . Из четвертого уравнения системы (4.1) видно, что существуют два типа стационарных движений оболочки:  $I_1=0$  и  $I_1=\pm I_2$ . Первое из этих движений неустойчиво, если  $A < C$  и асимптотически устойчиво, если  $A > C$ ; стационарные движения второго типа неустойчивы при  $A > C$  и асимптотически устойчивы при  $A < C$ .

Следовательно, если  $A > C$  ( $l > \sqrt{6}a/2$ ), то движение оболочки вокруг вектора  $I_2$  эволюционирует с возрастанием времени так, что предельным движением является вращение вокруг оси, перпендикулярной оси обо-

лочки, а при  $A < C$  ( $l < \sqrt{6}a/2$ ) предельным движением будет вращение вокруг оси оболочки.

Описанную эволюцию вращения оболочки под действием диссипативных сил назовем быстрой эволюцией (в отличие от рассматриваемой ниже медленной диссипативной эволюции, в которой кинетический момент не будет постоянным в абсолютном пространстве). Характерное время быстрой диссипативной эволюции равно  $\tau_1$ .

**5. Медленная эволюция ( $l > \sqrt{6}a/2$ ).** Пусть  $A > C$ . Тогда на этапе быстрой диссипативной эволюции  $I_1 \rightarrow 0$ . При  $I_1 = 0$  правые части уравнений (3.3) не зависят от  $\varphi_1$  и из них можно выделить подсистему, описывающую изменение переменных  $\varphi_2, \varphi_3, I_2, I_3$ . Если вместо  $\varphi_3$  ввести новую переменную  $\beta$  из (2.3), то правые части этой подсистемы не будут явно зависеть от  $t$ . В результате получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 &= \frac{\partial \Gamma}{\partial I_2} + \chi \varepsilon^2 \frac{2b}{\lambda_2^2} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial Q_2^{(j)}}{\partial I_2} (Q_2^{(j)}, H^{(0)}) \\ \dot{\beta} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial I_3} + \chi \varepsilon^2 \frac{2b}{\lambda_2^2} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial Q_2^{(j)}}{\partial I_3} (Q_2^{(j)}, H^{(0)}) \\ \dot{I}_2 &= -\partial \Gamma / \partial \varphi_2 - \kappa_1 I_2 \gamma_3^2 [\sin^2 \beta \sin^2 \delta_1 + (\partial \gamma_3 / \partial \varphi_2)^2] \\ \dot{I}_3 &= -\partial \Gamma / \partial \beta - \kappa_1 I_2 \gamma_3 (\sin \beta \cos \varphi_2 + \cos \beta \sin \varphi_2 \cos \delta_1) \times \\ &\quad \times [\sin^2 \beta \sin^2 \delta_1 + (\partial \gamma_3 / \partial \varphi_2)^2] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $\Gamma = H - \omega_0 I_3$ ,  $H$  — функция (3.4), вычисленная при  $I_1 = 0$ , а  $\kappa_1 = 81 \chi \varepsilon^2 \omega_0^4 m a^2 b c / (5 A^2 \lambda_2^2)$ . В последних двух уравнениях в (5.1) отброшены слагаемые, пропорциональные  $\chi \varepsilon^2 \omega_0^6$ .

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= -\kappa_1 I_2 \langle \gamma_3^2 [\sin^2 \beta \sin^2 \delta_1 + (\partial \gamma_3 / \partial \varphi_2)^2] \rangle \\ \dot{I}_3 &= -\kappa_1 I_2 \langle \gamma_3 (\sin \beta \cos \varphi_2 + \cos \beta \sin \varphi_2 \cos \delta_1) \times \\ &\quad \times [\sin^2 \beta \sin^2 \delta_1 + (\partial \gamma_3 / \partial \varphi_2)^2] \rangle \end{aligned} \quad (5.2)$$

где угловые скобки означают двойное усреднение по  $\varphi_2$  и  $\beta$ . Решения системы (5.2) аппроксимируют<sup>1</sup> величины  $I_2, I_3$  с погрешностью порядка  $\mu$  на интервале времени  $\tau_2 \sim (\chi \varepsilon^2 \mu^4)^{-1}$ .

Произведя усреднение, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= -1/64 \kappa_1 I_2 (7 + 10 I_3^2 / I_2^2 - 9 I_3^4 / I_2^4) \\ \dot{I}_3 &= -1/16 \kappa_1 I_3 (5 - 3 I_3^2 / I_2^2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Эта система описывает медленную диссипативную эволюцию быстрых вращений оболочки, характерное время эволюции равно  $\tau_2$ .

Из (2.1) и (5.3) получаем усредненное уравнение для угла  $\delta_1$  между кинетическим моментом и нормалью к плоскости орбиты

$$\dot{\delta}_1 = 1/64 \kappa_1 \sin \delta_1 \cos \delta_1 (13 - 9 \cos^2 \delta_1) \quad (5.4)$$

Особые точки  $\delta_1 = 0, \pi$  этого уравнения неустойчивы, а особая точка  $\delta_1 = \pi/2$  асимптотически устойчива. Для значений  $\delta_1$ , отличных от  $0, \pi/2, \pi$ , из (5.4) получаем

$$\cos^8 \delta_1 (13 - 9 \cos^2 \delta_1)^9 / \sin^{26} \delta_1 = c \exp(-13 \kappa_1 t / 8) \quad (5.5)$$

где  $c > 0$  — постоянная интегрирования.

<sup>1</sup> Здесь и далее при оценке точности решений усредненных систем уравнений мы опираемся на соответствующие теоретические результаты по методу усреднения в системах, близких к гамильтоновым. См. Сидоренко В. В. Эволюция быстрых вращений упругого кольца в гравитационном поле: Препринт № 93. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1987.

Из (5.5) видно, что с ростом времени угол  $\delta_1$  стремится к  $\pi/2$ . Следовательно, на этапе медленной диссипативной эволюции кинетический момент стремится попасть в плоскость орбиты.

Таким образом, если  $A > C$ , то предельное движение представляет собой быстрое вращение оболочки вокруг оси, находящейся в плоскости орбиты, причем ось вращения ортогональна оси оболочки.

**6. Медленная эволюция ( $I < \sqrt{ba}/2$ ).** В случае  $A < C$  быстрая диссипативная эволюция приводит к движениям, в которых  $I_1 = \pm I_2$ . Положив в (3.3)  $I_1 = \pm I_2$ , получим систему уравнений, правые части которых не содержат угловых переменных  $\varphi_1, \varphi_2$ , а уравнения для  $I_2, I_3$  имеют вид

$$\begin{aligned} I_2 \dot{\phantom{I}} &= -\partial\Gamma/\partial\varphi_2 - \kappa_2 I_2 (1 + \cos^2 \delta_1 + \cos 2\beta \sin^2 \delta_1)^2 \\ I_3 \dot{\phantom{I}} &= -\partial\Gamma/\partial\beta - 2\kappa_2 I_3 (1 + \cos^2 \delta_1 + \cos 2\beta \sin^2 \delta_1) \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $\Gamma = H - \omega_0 I_3$ ,  $H$  — функция (3.4), вычисленная при  $I_1 = \pm I_2$ , а  $\kappa_2 = 81\chi\epsilon^2\omega_0^4 m a^2 b / (20C\lambda_2^2)$ . В уравнениях (6.1) отброшены слагаемые, пропорциональные  $\chi\epsilon^2\omega_0^6$ .

Усредненные по  $\beta$  уравнения  $I_2 \dot{\phantom{I}} = -1/2\kappa_2 I_2 (3 + 2I_3^2/I_2^2 + 3I_3^4/I_2^4)$ ,  $I_3 \dot{\phantom{I}} = -2\kappa_2 I_3 (1 + I_3^2/I_2^2)$  аппроксимируют  $I_2, I_3$  с погрешностью порядка  $\mu$  на интервале времени порядка  $\tau_2$ .

Усредненное уравнение для  $\delta_1$

$$\delta_1 \dot{\phantom{\delta}} = 1/2\kappa_2 \sin \delta_1 \cos \delta_1 (1 + 3 \cos^2 \delta_1)$$

имеет неустойчивые особые точки  $\delta_1 = 0, \pi$  и асимптотически устойчивую  $\delta_1 = \pi/2$ . Аналогично п. 6, легко увидеть, что на этапе медленной диссипативной эволюции кинетический момент стремится расположиться в плоскости орбиты.

Таким образом, в случае  $A < C$  предельное движение представляет собой быстрое вращение оболочки вокруг своей оси, которая расположена в плоскости орбиты.

**7. Эволюция в случае сферической динамической симметрии.** В случае  $A = C$  быстрая диссипативная эволюция отсутствует. Можно показать, что в этом случае правая часть системы уравнений (3.3) не зависит от  $\varphi_1$ , а усредненные по  $\varphi_2$  и  $\beta$  уравнения для  $I_1, I_2, I_3$  имеют вид

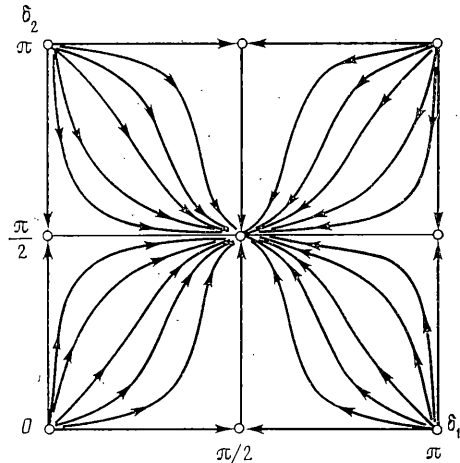
$$\begin{aligned} I_1 \dot{\phantom{I}} &= -4\kappa_3 I_1 [2(3 + 2I_3^2/I_2^2 + 3I_3^4/I_2^4) - (1 - I_1^2/I_2^2) \times \\ &\quad \times (15I_3^4/I_2^4 - 6I_3^2/I_2^2 - 1)] \\ I_2 \dot{\phantom{I}} &= -\kappa_3 I_2 [8(3 + 2I_3^2/I_2^2 + 3I_3^4/I_2^4) - 16(1 - I_1^2/I_2^2) \times \\ &\quad \times (3I_3^4/I_2^4 + 1) - (1 - I_1^2/I_2^2)^2 \times \\ &\quad \times (15I_3^4/I_2^4 - 6I_3^2/I_2^2 - 1)] \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} I_3 \dot{\phantom{I}} &= -4\kappa_3 I_3 [8(1 + I_3^2/I_2^2) - \\ &\quad - 16(1 - I_1^2/I_2^2) I_3^2/I_2^2 - \\ &\quad - (1 - I_1^2/I_2^2)^2 (3 - 5I_3^2/I_2^2)] \\ \kappa_3 &= 81\chi\epsilon^2\omega_0^4 m a^2 b / (320A\lambda_2^2) \end{aligned}$$

Решения системы (7.1) аппроксимируют  $I_1, I_2, I_3$  с погрешностью порядка  $\mu$  на интервале времени  $\tau_2$ .

Вместо (7.1) удобнее исследовать усредненную систему уравнений для углов  $\delta_1$  и  $\delta_2$  кинетического момента с нормалью к плоскости орбиты и с осью оболочки

$$\begin{aligned} \delta_1 \dot{\phantom{\delta}} &= \kappa_3 \sin \delta_1 \cos \delta_1 [8(3 \cos^2 \delta_1 + 1) - 16 \sin^2 \delta_2 (3 \cos^2 \delta_1 - 1) + \\ &\quad + \sin^4 \delta_2 (15 \cos^2 \delta_1 - 11)] \end{aligned}$$



Фиг. 2

$$\delta_2^* = -\kappa_3 \sin \delta_2 \cos \delta_2 [4(3 \cos^4 \delta_1 - 6 \cos^2 \delta_1 - 5) + \sin^2 \delta_2 (15 \cos^4 \delta_1 - 6 \cos^2 \delta_1 - 1)]$$

Можно показать, что в квадрате  $0 \leq \delta_i \leq \pi$  ( $i=1, 2$ ) система уравнений (7.2) имеет ровно девять особых точек  $(\delta_1, \delta_2)$ :  $(k\pi/2, n\pi/2)$ ,  $(k, n=0, 1, 2)$ , причем восемь из них неустойчивы, а одна  $(\pi/2, \pi/2)$  асимптотически устойчива. Траектории системы (7.2) представлены на фиг. 2.

В предельном движении кинетический момент лежит в плоскости орбиты и ортогонален оси оболочки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука, Т. I. М.; Л.: Гостехиздат, 1955. 504 с.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: Глав. ред. общетех. лит. и номогр., 1935. 674 с.
3. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика упругого летательного аппарата // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 5. С. 135-197.
4. Canavin J. R., Likins P. W. Floating reference frames for flexible spacecraft // J. Spacecraft and Rockets. 1977. V. 14. № 12. P. 724-732.
5. Дебри А. Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1968. № 2. С. 3-9.
6. Маркеев А. П. Влияние продольных упругих колебаний тела на его быстрые вращения в гравитационном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 38-45.
7. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию  
28.X.1988