МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1990

УДК 539.3


А. Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБЩЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Рассматриваются трехмерные динамические уравнения теории упругости. Обсуждаются свойства их интегралов в случае, когда тело тонкое и его лицевые поверхности не закреплены. Устанавливается связь таких интегралов с интегралами двумерных внутренних уравнений теории оболочек и уравнений погранслоя. Предлагается связанная с этим трактовка принципа Сен-Венана для тонких упругих тел, а также уточненный и обобщенный метод постановки граничных условий в теории оболочек.

1. Будем считать, что точки трехмерной упругой среды, занятой оболочкой, задаются равенством

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)+\alpha_3\mathbf{n} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор срединной поверхности $P$, $(\alpha_1, \alpha_2)$ — параметры линий кривизны на $P$; $\alpha_3$ — расстояние точки трехмерной среды от $P$; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к $P$.

Примем, что в такой триортогональной системе координат записаны дифференциальные уравнения линейной анизотропной динамической теории упругости, относительно напряжений $\sigma_{ij}$ перемещений $v_i$ и компонентов деформации $e_{ij}$ (всюду $i$, $j$=1, 2, 3). Эти уравнения здесь не приводятся. Считается, что они берутся в форме заимствованной из монографии [1, гл. 26]. Переход от статики к динамике в этих уравнениях можно достигнуть, выразив компоненты массовых сил по формулам $q_i=-\rho v_i''$.

Под оболочкой будем подразумевать упругое тело, занимающее некоторую часть трехмерного пространства (1.1), в котором $\alpha_3$ ограничено неравенствами $-h\leqslant\alpha_3\leqslant+h$, а $h$ (полутолщина оболочки) мало по сравнению с размерами срединной поверхности $P$.

Лицевыми поверхностями и торцами оболочки назовем соответственно поверхности $\alpha_3=\pm h$ и линейчатые поверхности, образованные нормалями к $P$, проведенными в каждой краевой точке.

Считается, что для оболочки, рассматриваемой как трехмерное тело, сформулирована задача теории упругости, т. е. заданы компоненты поверхностных и массовых сил, а также поставлены торцевые условия, отражающие характер закрепления ее краев, и принимается, что основная общая проблема теории тонких оболочек заключается в приближенном построении соответствующего напряженно-деформированного состояния оболочки в достаточном удалении от ее торцов или других поверхностей искажения. Таким образом основная цель теории оболочек формулируется так же как в элементарной теории балок и стержней.

2. В основу математического подхода к решению сформулированной общей проблемы теории тонких оболочек можно положить существование двух описываемых ниже приближенных семейств интегралов уравнений теории упругости.

Первое из этих семейств назовем внутренними интегралами трехмерных уравнений тонких оболочек и отнесем к ним приближенные решения трехмерных уравнений теории упругости, точно удовлетворяющих заданным (вообще неоднородным) лицевым условиям и содержащим произволы, которые можно использовать для выполнения торцевых условий. Эти интегралы записываются так

$$
\begin{gathered}
\tau_i=(1+(\alpha_3/R_j))\sigma_{ii}=RE[T_i^*/2h- \\
-\eta^{2-2q-b+c+d}R\zeta(3G_i^*/2h^2)+\eta^{2-2q-b}(\tau_i^{2\prime}/Eh)] \\
\tau_{ij}=(1+(\alpha_3/R_j))\sigma_{ij}=RE[S_{ij}^*/2h+ \\
+\eta^{2-2q-b+c+d}R\zeta(3H_{ij}^*/2h^2)+\eta^{2-2q-b}(\tau_{ij}^{2\prime}/Eh)] \\
\tau_{i3}=(1+(\alpha_3/R_j))\sigma_{i3}=RE\eta^{2-3q-b+c+d}(N_i^*/2h)+ \\
+\eta^{-q}[\zeta\tau_{i3}^{1}+\eta^{1-2q-b+c+d}(\zeta^2-{}^1/_3)\tau_{i3}^{2}+\eta^{2-2q-b}\tau_{i3}^{3\prime} \\
\tau_3=(1+(\alpha_3/R_1)(1+(\alpha_3/R_2))\sigma_{33}=\eta^{-c}[\tau_3^{0}+\zeta\tau_3^{1}+\eta^{1-2q-b+c+d}\zeta^2\tau_3^{2}+ \\
+\eta^{2-4q-2b+2c+d}\zeta^3\tau_3^{3}+\eta^{2-2q-b}\tau_3^{4\prime}] \\
v_i=R\eta^{-1+q-b}[u_i^*-\eta^{1-2q+c+d}\zeta\gamma_i^*+\eta^{2-2q}v_i^{2\prime}/R] \\
v_3=R\eta^{-1-b+c+d}[w^*+\eta^{1-c}\zeta(v_3^{1}/R)+\eta^{2-2q}(v_3^{2\prime}/R)]
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

В (2.1) величины, отмеченные звездочкой (их физический смысл будет указан ниже) зависят от двух переменных ($\xi_1$, $\xi_2$), связанных с параметрами координатной системы (1.1) формулами преобразования масштабов

$$
\alpha_i=R\eta^q\xi_i \quad (i=1,\ 2), \quad \alpha_3=R\eta^1\zeta \tag{2.2}
$$

($R$ — характерный радиус кривизны срединной поверхности $P$; $\eta=h/R$ — безразмерная полутолщина, служащая в последующих рассуждениях основным малым параметром). Вспомогательные величины, отмеченные надбуквенными индексами (без штрихов) в формулах (2.1) так же зависят лишь от ($\xi_1$, $\xi_2$) (их можно выразить, через величины со звездочкой прямыми действиями), а величины, отмеченные штрихом, являются остаточными членами и зависят от $\xi_1$, $\xi_2$, $\zeta$. В показателях степеней $\eta$ стоят числа $b$, $c$, $d$, $q$, которые пока будем считать зависящими от выбора.

**3.** Поясним смысл утверждения, что формулами (2.1) определяется некоторое приближенное семейство внутренних интегралов уравнений теории упругости.

Отбросим в (2.1) остаточные члены (отмеченные штрихами) и примем *Основное предположение*: в (2.1) все искомые величины (основные, отмеченные звездочкой и вспомогательные, перечисленные в п. 2) вместе со своими производными любого порядка по $\xi_1$, $\xi_2$ имеют вид $O(\eta^\rho)$ с одинаковым показателем $\rho$.

Выполним в уравнениях теории упругости замены (2.1), (2.2) и учтем, что независимая переменная $\zeta$ имеет вид $O(1)$. Тогда сформулированное предположение будет означать, что относительная асимптотическая оценка каждого слагаемого в полученных равенствах определяется показателем явно входящего в него множителя вида $\eta^k$. Опираясь на это, можно убедиться, что с точностью до величин вида $O(\eta^{2-2q-b})$ уравнения теории упругости и лицевые условия оговоренного вида будут выполняться если в (2.1) величины, отмеченные звездочкой, являются интегралами следующей системы дифференциальных уравнений, с независимыми переменными $\xi_1$, $\xi_2$ (соответствующие выкладки элементарны, но весьма громоздки. Для уравнений теории упругости, записанных в координатной форме, они приведены в монографии [1], а для тензорных уравнений в работе [2]):

$$
\begin{gathered}
L_i(T_i^*,\ S_{ij}^*)+\eta^{2-2q-b+c+d}(R/R_i)N_i^*+\eta^{2q-2a-b}2\Lambda u_i^*=0 \\
T_i^*=\frac{2\eta^{-b}}{1-\nu^2}(\varepsilon_i^*+\nu\varepsilon_j^*), \qquad S_{ij}^*=\frac{\eta^{-b}}{1+\nu}\omega^* \\
\varepsilon_i^*=\varepsilon_i^*(u_i^*,\ w^*), \quad \omega^*=\omega^*(u_i^*) \\
L(T_i^*)+\eta^{2-4q-b+c+d}F(N_i^*)+\eta^{-2a-b+c+d}2\Lambda w^*=0 \\
L_j(G_i^*,\ -H_{ij}^*)-N_i^*=0, \quad G_i^*=G_i^*(\varkappa_i^*,\ \varepsilon_i^*) \\
H_{ij}^*=H_{ij}^*(\tau^*,\ \omega^*), \quad \varkappa_i^*=\varkappa_i^*(\gamma_j^*), \quad \tau^*=\tau^*(\gamma_i^*,\ \omega_i^*) \\
\gamma_i^*=\gamma_i^*(u_i^*,\ w^*), \quad \omega_i^*=\omega_i^*(u_i^*)
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Здесь всюду считается, что $i\neq j=1,\ 2$. Кроме того приняты следующие обозначения

$$
\begin{gathered}
L_i(T_i^*, S_{ij}^*) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial T_i^*}{\partial \xi_i} + \frac{R\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(T_i^* - T_j^*) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ij}^*}{\partial \xi_j} + \\
+ \frac{R\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(S_{ij} + S_{ji}) \\
L(T_i^*) = R(T_1^*/R_1 + T_2^*/R_2) \\
\varepsilon_i^*(u_i^*, w^*) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_i} + \frac{R\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j^* - \eta^{c+d}\frac{R}{R_i}\omega^* \\
\omega^*(u_i^*) = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi_2} - \frac{R\eta^q}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_1^* + \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2^*}{\partial \xi_1} - \frac{R\eta^q}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_2^* \\
F(N_i^*) = \frac{1}{A_1}\frac{\partial N_1^*}{\partial \xi_1} + \frac{R\eta^q}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2}N_1^* + \frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2^*}{\partial \xi_2} + \frac{R\eta^q}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}N_2^* \\
G_i^*(\varkappa_i^*, \varepsilon_i^*) = -\frac{2}{3(1-\nu^2)}\left[\varkappa_i^* + \nu\varkappa_j^* + \eta^{2q-c-d}R\left(\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_i}\right)\varepsilon_i^* - \right. \\
\left. - \frac{\nu}{1-\nu}\eta^{2q-c-d}R\left(\frac{1}{R_i} + \frac{\nu}{R_j}\right)(\varepsilon_i^* + \varepsilon_j^*)\right] \\
H_{ij}(\tau^*, \omega^*) = \frac{2}{3(1+\nu)}\left[\tau^* - \eta^{2q-c-d}\frac{R}{R_j}\omega^*\right] \\
\varkappa_i^*(\gamma_i^*) = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial \gamma_i^*}{\partial \xi_i} - \frac{R\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\gamma_j^* \\
\tau^*(\gamma_i^*, \omega_i^*) = -\frac{1}{A_j}\frac{\partial \gamma_i}{\partial \xi_j} + \frac{R\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\gamma_j^* + \eta^{2q-c-d}\frac{\omega_i^*}{2R_j} \\
\gamma_i^* = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial w^*}{\partial \xi_i} - \eta^{2q-c-d}\frac{R}{R_i}u_i^* \\
\omega_i^* = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} + \frac{R\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_i^*
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

В первом и шестом равенствах (3.1) последние слагаемые левой части учитывают Даламберовы силы инерции. Считается, что $\eta^{-2a}\Lambda = R^2(\rho\omega^2/E)$ в стационарной динамике; $\eta^{-2a}\Lambda = (-\rho/E)R^2(\partial^2/\partial t^2)$ в нестационарной динамике ($\rho$ — плотность, $E$ — модуль упругости; $\Lambda$ — число, соизмеримое $\eta^0$; $a$ — показатель динамичности, т. е. асимптотическая характеристика интенсивности рассматриваемого динамического процесса).

Показано (в [1] для уравнений теории упругости в координатной форме, а в [2] в тензорной символике), что соотношения (3.1), (3.2) эквивалентны двумерным уравнениям одного из вариантов теории оболочек Кирхгоффа — Лява.

А именно, традиционные уравнения двумерной теории оболочек, записанные в необычном порядке, получатся в обозначениях [1] если вернутся от $\xi_1$, $\xi_2$ к первоначальным независимым переменным по формулам (2.2) и выразить отмеченные звездочкой безразмерные величины через традиционные искомые величины классической теории оболочек следующим образом

$$
\begin{gathered}
(T_i, S_{ij}) = RE(T_i^*, S_{ij}^*), \quad N_i = -\eta^{2-3q-b+c+d}REN_i^* \\
(G_i, H_{ij}) = \eta^{2-2q-b+c+d}R^2E(G_i^*, H_{ij}^*) \\
u_i = \eta^{-1+q-b}Ru_i^*, \quad w = \eta^{-1-b+c+d}Rw^* \\
(\varepsilon_i, \omega) = \eta^{-1-b}(\varepsilon_i^*, \omega^*) \\
(\varkappa_i, \tau) = \eta^{-1-2q-b+c+d}(1/R)(\varkappa_i^*, \tau^*) \\
\gamma_i = \eta^{-1-q-b+c+d}\gamma_i^*, \quad \omega_i = \eta^{-1-b}\omega_i^*
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

*Замечания.* 1. Описанный результат имеет силу лишь тогда, когда лицевые условия выражают отсутствие каких бы то ни было закреплений лицевых поверхностей оболочки. В противном случае также можно построить аналог внутреннего интеграла, но он не будет содержать произволов для выполнения торцевых условий.

2. Можно проверить, что (3.1), (3.2) после подстановок (2.2), (3.3) переходят в классические уравнения двумерной теории оболочек, записанные в линиях кривизны [1]. Отметим в связи с этим, что (3.1), (3.2) записываются сложней традиционных соотношений, но обладают важным преимуществом; если известны показатели $a$, $b$, $c$, $d$, $q$ (их возможные значения обсуждаются ниже), то (3.1), (3.2) определяют не только структуру уравнений теории оболочек но и задают асимптотику каждого их слагаемого.

4. Асимптотика напряженно-деформированного состояния оболочки, соответствующего внутреннему интегралу, задается взятыми без остаточных членов формулами (2.1). Она в силу основного предположения п. 3 явно определяется числами $a$, $b$, $c$, $d$, $q$. Однако последние нельзя выбирать произвольно. Должны быть оставлены только непротиворечивые комбинации значений $a$, $b$, $c$, $d$, $q$, вытекающие из следующих соображений.

Пусть $a$, $b$, $c$, $d$, $q$ фиксированы произвольно. Тогда в каждом отдельно взятом уравнении (3.1), (3.2), а следовательно, и в соответствующем двумерном уравнении теории оболочек асимптотика любого слагаемого будет определена стоящим при нем множителем вида $\eta^r$. Поэтому, оставив в каждом равенстве (3.1), (3.2) только асимптотически главные слагаемые и, отбросив стоящие при них множители вида $\eta^\rho$, получим упрощенные уравнения, которые назовем предельной системой. Непротиворечивой комбинацией значений $a$, $b$, $c$, $d$, $q$ назовем такую совокупность значений этих чисел, которой соответствует непротиворечивая же предельная система, т. е. уравнения, имеющие решения со свойствами, согласующимися с основным предположением п. 3.

Укажем некоторые непротиворечивые комбинации чисел $a$, $b$, $c$, $d$, $q$ и соответствующие им предельные системы. При этом будем учитывать, что, как правило, в предельных системах выделяется головная предельная система, из которой могут быть определены асимптотически главные неизвестные, и вспомогательная предельная система, позволяющая построить оставшиеся неизвестные (в предположении, что главные неизвестные уже определены).

*Комбинация I*: $a\leqslant 0$, $b=0$ $(0\leqslant q<{}^1/_2,\ c=0)$, $d=0$.

Здесь и ниже соотношения, относящиеся к $q$ и $c$, объединяются скобками поскольку, как показано в [1], эти числа связаны соотношениями

$$c=0 \text{ при } q\leqslant {}^1/_2;\quad c=2q-1 \text{ при } {}^1/_2\leqslant q<1 \tag{4.1}$$

Предельную головную систему в этом случае образуют уравнения безмоментной теории, определяющие неизвестные $T_i^*$, $S_{ij}^*$, $u_i^*$, $w^*$:

$$L_i(T_i^*,\ S_{ij}^*)+\eta^{2q-2a}2\Lambda u_i^*=0$$

$$T_i^*=\frac{2}{1-\nu^2}(\varepsilon_i^*+\nu\varepsilon_j^*),\qquad S_{ij}^*=\frac{\omega^*}{1+\nu}$$

$$\varepsilon_i^*=\varepsilon_i^*(u_i^*,\ w^*),\quad \omega^*=\omega^*(u_i^*) \tag{4.2}$$

$$L(T_i^*)+\eta^{-2a}2\Lambda w^*=0 \tag{4.3}$$

(эта и последующие системы расшифровываются по формулам (3.2)).

Предельную вспомогательную систему образуют последовательность формул

$$\begin{gathered}\varkappa_i^*=\varkappa_i^*(\gamma_i^*),\quad \tau^*=\tau^*(\gamma_i^*,\ \omega_i^*),\quad \gamma_i^*=\gamma_i^*(u_i^*,\ w^*)\\ G_i^*=G_i^*(\varkappa_i^*,\ \varepsilon_i^*),\quad H_{ij}^*=H_{ij}^*(\tau^*,\ \omega^*),\quad N_i^*=L_i(G_i^*,\ -H_{ij}^*)\end{gathered} \tag{4.4}$$

позволяющих выразить прямыми действиями асимптотически второстепенные неизвестные $G_i^*$, $H_{ij}^*$, $N_i^*$.

*Комбинация II*: $a>0$, $b=0$ ($q$, $c$ — любые); $d+c=2a$.

Предельную головную систему в этом случае образуют уравнения плоской теории оболочек [3]:

$$L_i(T_i^*, S_{ij}^*)+\eta^{2q-2a}2\Lambda w^*=0$$

$$T_i^*=\frac{2}{1-\nu^2}(\varepsilon_i^*+\nu\varepsilon_j^*), \quad S_{ij}^*=\frac{\omega^*}{1+\nu}$$

$$\varepsilon_i^*=\varepsilon_i^*(u_i, 0), \quad \omega^*=\omega^*(u_i^*) \tag{4.5}$$

Во вспомогательную предельную систему входят уравнение

$$L(T_i^*)+2\Lambda w^*=0 \tag{4.6}$$

для определения $w^*$ и последовательность формул (4.4) для определения $G_i^*$, $H_{ij}^*$, $N_i^*$.

*Комбинация III*: $a\leqslant 2q-1$, $b=0$ ($^1/_2\leqslant q<1$, $c=2q-1$) $d+c=0$.

Головную предельную систему для определения неизвестных $w^*$, $G_i^*$, $H_{ij}^*$, $N_i^*$ в этом случае составляют уравнения изгибной теории оболочек [3]. В нее входит уравнение

$$F(N_i^*)+\eta^{4q-2}L(T_i^*)+2\Lambda\eta^{4q-2-2a}w^*=0 \tag{4.7}$$

и соотношения

$$\gamma_i^*=\gamma_i^*(0, w), \quad \varkappa_i^*=\varkappa_i^*(\gamma_i^*), \quad \tau^*=\tau^*(\gamma_i^*, 0)$$

$$G_i^*=G_i^*(\varkappa_i^*, 0), \quad H_{ij}=H_{ij}(\tau^*, 0), \quad N_i^*=L_i(G_i^*, -H_{ij}^*) \tag{4.8}$$

Вспомогательную предельную систему в этом случае составят уравнения (4.5), определяющие асимптотически второстепенные неизвестные $u_i^*$, $T_i^*$, $S_{ij}^*$.

*Комбинация IV*: $a\leqslant 2q-1$, $b=0$ ($^1/_2\leqslant q<1$, $c=2q-1$) $d+c=4q-2$.

Ей соответствует головная предельная система уравнений плоской теории оболочек (4.5) и вспомогательная система уравнений изгибной теории, т. е. уравнение $F(N_i^*)+L(T_i^*)+2\Lambda\eta^{4q-2-2a}w_*=0$ и соотношения (4.8).

Помимо указанных выше существует еще

*Вспомогательная комбинация*: $b=0$ ($0\leqslant q<^1/_2$, $c=0$), $d=0$.

Она имеет силу лишь для статических задач теории оболочек (поэтому в ней не учитывается число $a$) и приводит к головной предельной системе

$$\varepsilon_i^*(u_i^*, w^*)=0, \quad \omega^*(u_i^*)=0 \tag{4.9}$$

т. е. к уравнениям бесконечно-малых изгибаний срединной поверхности.

Как известно, в статическом случае (при $\Lambda=0$) все решения системы (4.9) являются также и решениями системы (4.2), (4.3). Поэтому вспомогательная комбинация не является новой: ее можно рассматривать как частный случай комбинации I, напоминающий о существовании чисто моментного напряженно-деформированного состояния оболочки.

Поясним, что в некоторых из предельных систем в коэффициентах содержатся множители вида $\eta^s$. В рамках рассматриваемой непротиворечивой комбинации все $s$ заведомо неотрицательны. Соответствующие слагаемые в пределе надо сохранять лишь тогда, когда $s=0$. В частности, в уравнении (4.7) при $q=^1/_2$ надо сохранить второе слагаемое левой части. При этом уже не будет иметь места расчленение полной предельной системы на головную и вспомогательную: уравнения (4.2) и (4.7) вместе с соотношениями (4.8) составят при $q=^1/_2$ полную совместную предельную систему, совпадающую по смыслу с уравнениями приближенной теории напряженных состояний с большой изменяемостью [1].

В заключение параграфа отметим, что уравнение (4.6), соответствующее комбинации II, служит для определения $w^*$ и, следовательно, теряет смысл в статической теории оболочек, когда $\Lambda=0$. В этом находит отражение специфика динамических задач теории оболочек: в них уравнения плоской теории оболочек могут образовать головную предельную систему при любых значениях $q$, в то время как в статике они в этой роли появляются лишь при $q>^1/_2$ (комбинация IV). Наоборот, уравнения безмоментной теории могут образовать предельную систему в динамике лишь при малых (неположительных) показателях динамичности, а в статике, когда это условие заведомо выполняется, предельная безмоментная теория имеет широкую область существования. Физически это означает, что при не слишком большом показателе изменяемости ($q<1/2$) роль искривленности срединной поверхности в динамике не так велика как в статике.

5. Остановимся на физическом смысле чисел $a$, $b$, $c$, $d$, $q$. Под $a$ — подразумевается показатель динамичности, т. е. асимптотическая характеристика скорости протекания обсуждаемых динамических процессов. Этот параметр в стационарных задачах, как правило, надо считать заданным условием задачи.

Число $q$ является показателем изменяемости искомого напряженно-деформированного состояния в том направлении, которое не является квазистационарным. Его значение, вообще говоря, заранее не известно. Однако в конкретно сформулированных задачах для $q$ могут быть приняты определенные априорные предположения (об этом подробнее смотри для задач статики в [1, приложение], а для задач вынужденных колебаний в [3]).

Число $c$ — связано с $q$ формулой (4.1) и характеризует качественные изменения, испытываемые напряженно-деформированным состоянием при увеличении показателя изменяемости.

Числом $b$ задается асимптотическая оценка той роли, которую играет в искомом деформированном состоянии оболочки так называемые псевдоизгибания т. е. формоизменения, мало отличающиеся от изгибаний срединной поверхности. В работах [4, 5] показано, что существование (отсутствие) псевдоизгибаний существенным образом, т. е. асимптотически, влияет на поведение оболочки при ее колебаниях, потери устойчивости и деформировании под статической нагрузкой. Смысл этого утверждения в последнем случае заключается в следующем. Назовем асимптотически модельным напряженно-деформированное состояние некоторой простейшей оболочки (например, непологой сферической), нагруженной достаточно плавно меняющейся нагрузкой и закрепленной так, что она остается безмоментной всюду, включая край. Тогда справедливо утверждение [4, 5]: жесткость оболочки будет асимптотически меньше модельной жесткости тогда и только тогда, когда ее срединная поверхность имеет виртуальные (согласованные с тангенциальными закреплениями) псевдоизгибания с не слишком большим показателем изменяемости ($q<1/2$), а внешняя нагрузка совершает на перемещениях любого из этих псевдоизгибаний не слишком малую (асимптотически) работу.

Построение двумерной теории оболочек на основе внутренних интегралов (2.1), (3.1), (3.2), как указано в п. 3, осуществляется с точностью до величин вида $O(\eta^{2-2q-b})$. Это значит, что число $b$ оказывает влияние и на точность двумерной теории, используемой для построения соответствующих напряженно-деформированных состояний. При этом наименьшие погрешности получатся при $b=0$ (отрицательные значения $b$ физического смысла не имеют).

Число $d$, как следует из двух последних равенств (2.1), служит характеристикой относительных асимптотических порядков тангенциальных перемещений $v_i$ с одной стороны и прогиба $v_3$ — с другой.

6. Отметим, что рассмотренные в п. 4 непротиворечивые комбинации значений ($a$, $b$, $c$, $d$, $q$) не обладают достаточной полнотой. Они базируются на масштабных преобразованиях (2.2), в которых первым равенством вместе с основным предположением п. 3 предполагается рассмотрение лишь так называемых равноизменяющихся решений (с одинаковыми показателями изменяемости в обоих координатных направлениях). Заменив обсуждаемое равенство на $\xi_i=R\eta^{q_i}\alpha_i$, можно увеличить число непротиворечивых комбинаций, охватив ими разноменяющиеся решения. К последним принадлежат, в частности, краевые эффекты и некоторые решения, встречающиеся в сильно динамических задачах теории стационарных колебаний. На связанных с этим деталях останавливаться не будем, заметим только, что выявление новых непротиворечивых ком-

бинаций значений ($a$, $b$, $c$, $d$, $q_1$, $q_2$) должно также базироваться на основном предположении п. 3.

Равноизменяющиеся решения, разобранные в п. 3, вместе с разноизменяющимися решениями типа краевых эффектов в совокупности содержат достаточно произволов, чтобы из них можно было составить решения весьма широкого класса краевых задач двумерной линейной теории оболочек. На этом основан так называемый метод расчленения. В принятых здесь терминах он в простейших случаях сводится к тому, что основное напряженное состояние строится по безмоментной теории (непротиворечивая комбинация $a\leqslant 0$, $b=0$, $c=0$, $d=0$, $0\leqslant q<{}^1/_2$) с выполнением тангенциальных граничных условий, а невязки в нетангенциальных условиях устраняются при построении простого краевого эффекта (непротиворечивая комбинация $q_1={}^1/_2$, $q_2<q_1$).

В рамках такого подхода построение приближенного решения краевой задачи теории оболочек сводится к решению предельных краевых задач, заключающихся в интегрировании предельных уравнений с учетом краевых условий. Они выражаются линейными краевыми равенствами и могут в общем случае содержать множители вида $\eta^k$ в коэффициентах. Однако при помощи принципа суперпозиции от этих множителей можно избавиться и получить некоторую совокупность предельных краевых задач, определяющих асимптотически главную часть искомого решения, и таких, что в них не только дифференциальные уравнения (с независимыми переменными $\xi_1$, $\xi_2$), но и краевые условия не будут зависеть от малого параметра $\eta$. Для таких задач основное предположение (п. 3) надо, вообще говоря, считать оправданным, а исключение могут составить лишь случаи, когда упомянутые (не зависящие от $\eta$) предельные краевые задачи, не имеют ограниченных решений. В статике к ним могут относится, например, ($a$) задачи с бесконечной областью определения, ($b$) задачи, для которых в области определения содержатся особые точки (например, острие типа вершины конуса) или особые линии (например, линии изменения знака кривизны в торе или, вообще, плоская замкнутая линия касания срединной поверхности с плоскостью [1]).

В теории стационарных колебаний также возможны особые (в обсуждаемом смысле) случаи. Они имеют место, когда в области определения появляются так называемые переходные линии [6].

Список особых случаев можно было бы значительно пополнить. Однако попадание в этот список далеко не всегда означает неприменимость метода расчленения: в теории приближенных методов расчета оболочек, как и в любой другой асимптотической теории, существует проблема устранения некорректности предельных задач [1, 7, 8]. Основным приемом решения этой проблемы является модификация метода расчленения.

Таким образом можно утверждать, что внутренний интеграл (2.1), (3.1), (3.2) и вытекающая из него двумерная теория оболочек обладает достаточной полнотой. Это утверждение может потребовать дополнительных обсуждений или оказаться неверным лишь при следующих ситуациях:

$a$) когда изменяемость искомого состояния окажется настолько большой, что отбрасывание величин вида $O(\eta^{2-2q-b})$ станет слишком грубым;

$b$) в некоторых особых случаях, когда связанная с этим некорректность окажется неустранимой (например, при наличии особенности типа острия конуса).

Вне этих особых ситуаций, внутренний интеграл (2.1), (3.1), (3.2) обладает достаточной полнотой, а непротиворечивые комбинации, входящих в него параметров ($a$, $b$, $c$, $d$, $q$) достаточно полно характеризуют многообразие асимптотических свойств напряженно-деформированного состояния тонкой упругой оболочки.

**7.** Обратимся к построению второго семейства приближенных интегралов уравнений теории упругости. Назовем их краевыми и в конкретных рассуждениях ограничимся случаем, когда оболочка очерчена по замкнутой в поперечном направлении поверхности вращения, а ее край (края) лежит в плоскости ортогональной оси вращения.

Сохраним координатную систему (1.1) и примем, что в ней $\mathbf{r}$ — радиус-вектор поверхности вращения, отнесенной к географической системе координат ($\alpha_1$, $\alpha_2$), а $\alpha_1$- и $\alpha_2$-линии совпадают с меридианами и параллелями, соответственно. В этом случае система (1.1) является триортогональной. В ней уравнения теории упругости можно записать так, как это сделано в [1, гл. 26].

Введем обозначения монографии [1]:

для несимметричных напряжений

$$S_{ik}=(1+\alpha_3/R_j)\sigma_{ik},\ S_{3i}=S_{i3}=(1+\alpha_3/R_j)\sigma_{3k}$$
$$S_{33}=(1+\alpha_3/R_1)(1+\alpha_3/R_2)\sigma_{33}\ \ (i,\ k=1,\ 2;\ j\neq i=1,\ 2) \tag{7.1}$$

для безразмерных перемещений

$$V_m=h^{-1}v_m\ \ (m=1,\ 2,\ 3) \tag{7.2}$$

Примем, что один из торцов оболочки задается уравнением $\alpha_1=\alpha_{10}$ и введем дополнительные обозначения

$$\partial_1=\frac{R}{A_1}\eta^r\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\qquad \partial_2=\frac{R\eta^p}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2},\qquad \partial_3=R\eta^1\frac{\partial}{\partial\alpha_3} \tag{7.3}$$

где $A_1^2$, $A_2^2$ — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, а $r$, $p$ — числа, подчиняющиеся неравенствам $p<r\leqslant 1$, под $\partial_1$, $\partial_2$, $\partial_3$ подразумеваются символы дифференцирования по безразмерным переменным $\xi$, $\xi_2$, $\zeta$, где

$$\xi_1=\frac{\eta^{-r}}{R}\int A_1\,d\alpha_1,\qquad \xi_2=\frac{\eta^{-p}}{R}\int A_2\,d\alpha_2,\qquad \zeta=\eta^{-1}\frac{\alpha_3}{R}$$

Для оболочки вращения, когда $A_1$, $A_2$ зависят только от $\alpha_1$, переменные ($\xi_1$, $\xi_2$, $\zeta$) можно принимать за параметры новой координатной системы, в которой $\xi_1$- и $\zeta$-линии совпадают по смыслу с $\alpha_1$- и $\alpha_3$-линиями исходной координатной системы. При этом поверхность $\alpha_1=\mathrm{const}$, содержащая торец оболочки, перейдет в поверхность $\xi_1=\mathrm{const}$.

Выполняя в общих уравнениях теории упругости замены (7.1)—(7.3), получим систему, которую удобно для дальнейшего записать в виде двух групп уравнений.

Группа I:

$$\eta^{1-r}\partial_1S_{12}+\left(1+\frac{\eta}{\rho_2}\zeta\right)\partial_3S_{32}+\eta^{1-p}\partial_2S_{22}+\eta\left[Rk_1(S_{22}-S_{11})+Rk_2(S_{12}+S_{21})+\frac{2}{\rho_2}S_{23}\right]=0$$

$$E\left\{\eta^{1-r}\left(1+\frac{\eta}{\rho_2}\zeta\right)\partial_1V_2+\eta^{1-p}\left(1+\frac{\eta}{\rho_1}\zeta\right)\partial_2V_1+\right.$$
$$\left.+\eta\left[-Rk_2\left(1+\frac{\eta}{\rho_1}\zeta\right)V_2-Rk_1\left(1+\frac{\eta}{\rho_2}\zeta\right)V_1\right]\right\}-2(1+\nu)\left(1+\frac{\eta}{\rho_1}\zeta\right)S_{12}=0 \tag{7.4}$$

$$E\left(1+\frac{\eta}{\rho_1}\zeta\right)\left[\left(1+\frac{\eta}{\rho_2}\zeta\right)\partial_3V_2+\eta^{1-p}\partial_2V_3-\eta\frac{V_2}{\rho_2}\right]-2(1+\nu)\left(1+\frac{\eta}{\rho_2}\zeta\right)S_{23}=0$$

Группа II:

$$\eta^{1-r}\partial_1S_{11}+\eta^{1-p}\partial_2S_{21}+\left(1+\frac{\eta}{\rho_2}\zeta\right)\partial_3S_{31}+$$
$$+\eta\left[Rk_2(S_{11}-S_{22})+Rk_1(S_{12}+S_{21})+\frac{2}{\rho_1}S_{13}\right]=0 \tag{7.5}$$

$$\eta^{1-r}\partial_1S_{13}+\eta^{1-p}\partial_2S_{23}+\partial_3S_{33}+\eta\left(Rk_2S_{13}+Rk_1S_{23}-\frac{S_{11}}{\rho_1}-\frac{S_{22}}{\rho_2}\right)=0$$

$$E\left(1+\frac{\eta}{\rho_2}\zeta\right)\left[\eta^{1-r}\partial_1V_1+\eta\left(Rk_1V_2+\frac{V_3}{\rho_1}\right)\right]-$$

$$-\left[\left(1+\frac{\eta}{\rho_1}\zeta\right)S_{11}-\nu\left(1+\frac{\eta}{\rho_2}\zeta\right)S_{22}-\nu S_{33}\right]=0$$

$$E\left(1+\frac{\eta}{\rho_1}\zeta\right)\left[\eta^{1-p}\partial_2 V_2+\eta\left(Rk_2V_1+\frac{V_3}{\rho_2}\right)\right]-$$

$$-\left(1+\frac{\eta}{\rho_2}\zeta\right)S_{22}+\nu\left(1+\frac{\eta}{\rho_1}\zeta\right)S_{11}+\nu S_{33}\Bigg]=0$$

$$E\left(1+\frac{\eta}{\rho_1}\zeta\right)\left(1+\frac{\eta}{\rho_2}\zeta\right)\partial_3V_3-S_{33}+\nu\left(1+\frac{\eta}{\rho_1}\zeta\right)S_{11}+\nu\left(1+\frac{\eta}{\rho_2}\zeta\right)S_{22}=0$$

$$E\left(1+\frac{\eta}{\rho_2}\zeta\right)\left[\left(1+\frac{\eta}{\rho_1}\zeta\right)\partial_3V_1+\partial_1V_3-\eta\frac{V_1}{\rho_1}\right]-2(1+\nu)\left(1+\frac{\eta}{\rho_1}\zeta\right)S_{13}=0$$

В этих равенствах $k_i=(1/A_1A_2)\partial A_i/\partial\alpha_j$, $\rho_i=R_i/R$ $(i\neq j=1,\ 2)$ ($k_i$ — геодезическая кривизна $\alpha_i$-линии; для оболочки вращения $k_1=0$).

В системе (7.4), (7.5) содержится малый параметр $\eta$ и ее решения можно искать при помощи итерационных процессов, используя как и раньше, основное предположение (п. 3), т. е. считая, что явно входящие малые множители определяют относительную асимптотику каждого слагаемого в (7.4), (7.5). Под краевыми интегралами будем подразумевать получаемые таким образом (с определенной степенью приближения) решения уравнений теории упругости, удовлетворяющие условиям отсутствия напряжений на лицевых поверхностях.

В [9] показано какую роль играют такие краевые интегралы в теории высокочастотных установившихся колебаний. Здесь, имея в виду только статические задачи, будем считать, что $r=1$ и запишем кратко уравнения (7.4), (7.5) в виде двух равенств

$$\begin{aligned} &L_0(P)+\eta^{1-p}L_{1-p}(Q)+\eta^1L_1(P)=0\\ &N_0(Q)+\eta^{1-p}N_{1-p}(P)+\eta^1N_1(Q)=0\end{aligned}\tag{7.6}$$

в которых под $P$ и $Q$ подразумеваются две группы искомых величин теории упругости

$$P=(S_{12},\ S_{32};\ V_1),\quad Q=(S_{11},\ S_{22},\ S_{33},\ S_{31};\ V_1,\ V_3)\tag{7.7}$$

Под $L$, $N$ подразумеваются дифференциальные операторы, не содержащие в коэффициентах другие малые множители кроме $\eta^p$.

Опустим в (7.6) слагаемые с $L_1$ и $N_1$, т. е. примем, что всегда допустимо отбрасывание величин вида $O(\eta^1)$ и будем искать для системы (7.6) решения двух типов:

$$G^a=P^a+\eta^{1-p}Q_*{}^a \quad \text{и} \quad G^b=Q^b+\eta^{1-p}P_*{}^b\tag{7.8}$$

Здесь $G=P+Q$ — полная совокупность искомых величин теории упругости, $P$ и $Q$ в отдельности определяются соотношениями (7.7), индексами $a$ и $b$ отличаются величины, относящиеся к решениям разных типов и принимается, что все компоненты величин ($P^a$, $Q_*{}^a$), а также ($Q^b$, $P_*{}^b$) в отдельности асимптотически соизмеримы друг другу. Легко проверить, что с точностью до величин порядка $O(\eta^1+\eta^{2-2p})$ система (7.6) выполнится если подчинить величины типа $a$ уравнениям

$$L_0(P^a)=0,\quad N_0(Q_*{}^a)+N_{1-p}(P^a)=0\tag{7.9}$$

а величины типа $b$ уравнениям

$$N_0(Q^b)=0,\quad L_0(P_*{}^b)+L_{1-p}(Q^b)=0\tag{7.10}$$

Под полным краевым интегралом $G$ уравнений теории упругости будем понимать сумму решений типа $a$ и $b$:

$$G=G^a+G^b=(P^a+\eta^{1-p}P_*{}^b)+(Q^b+\eta^{1-p}Q_*{}^a)\tag{7.11}$$

С точностью до величин вида $O(\eta^{1-p})$ ее можно заменить суммой

$$G=P^a+Q^b \tag{7.12}$$

в которой $P^a$ и $Q^b$ удовлетворяют системам уравнений, коротко записанных первыми равенствами (7.9), (7.10). Сравнение развернутых систем (7.4), (7.5) с их краткой записью (7.6) показывают, что уравнения

$$L_0(P^a)=0\ (a);\quad N_0^{(b)}(Q^b)=0\ (b) \tag{7.13}$$

расшифровываются так: система $(a)$:

$$\partial_1 S_{12}+\partial_3 S_{32}=0 \tag{7.14}$$
$$E\partial_1 V_2-2(1+\nu)S_{12}=0,\quad E\partial_3 V_2-2(1+\nu)S_{23}=0$$

система $(b)$:

$$\partial_1 S_{11}+\partial_3 S_{13}=0;\ \partial_1 S_{13}+\partial_3 S_{33}=0 \tag{7.15}$$
$$E\partial_1 V_1-(S_{11}-\nu S_{22}-\nu S_{33})=0,\ -S_{22}+\nu S_{11}+\nu S_{33}=0$$
$$E\partial_3 V_3-(S_{33}-\nu S_{11}-\nu S_{22})=0,\quad E(\partial_3 V_1+\partial_1 V_3)-2(1+\nu)S_{13}=0$$

Они представляют собой уравнения антиплоской и плоской задач теории упругости (по переменным $\xi_1$, $\zeta$) и не содержат символов дифференцирования по $\xi_2$. Последнее обстоятельство означает, что если таким же свойством обладают и торцевые условия, накладываемые на краевой интеграл, то его можно строить, рассматривая $\xi_2$ как параметр. В этом смысле и говорилось в [9] применительно к оболочкам вращения о меридианальных полосах, работающих так, как если бы они не влияли друг на друга. Физически картина рисуется несколько по другому: на сечениях $\alpha_2=\text{const}$ напряжения в нуль не обращаются. Однако это не меняет отмеченную математическую ситуацию.

Решение систем (7.14), (7.15) удовлетворяющее условиям отсутствия напряжений на лицевых поверхностях, назовем построенными с точностью до величин вида $O(\eta^{1-p})$ антиплоским ($P^a$) и плоским ($Q^b$) краевыми интегралами. В сумме они составляют построенный с той же точностью полный краевой интеграл.

Составив линейные комбинации из равенств (7.9), (7.10), получим систему

$$L_0(P^a+\eta^{1-p}P_*^b)+\eta^{1-p}L_{1-p}(Q^b)=0 \tag{7.16}$$
$$N_0(Q^b+\eta^{1-p}Q_*^a)+\eta^{1-p}N_{1-p}(P^a)=0$$

которая позволяет построить более точное выражение (7.11) для полного краевого интеграла. Помня, что в (7.6) были отброшены члены с $\eta^1$, легко увидеть, что (7.16) построено ценой отбрасывания величин вида $O(\eta^1+\eta^{2-2p})$.

Равенства (7.6) относительно $P^a+\eta^{1-p}P_*^b$ и $Q^b+\eta^{1-p}Q_*^b$ образуют систему, которая отличается от (7.13), слагаемыми с $L_{1-p}$ и $N_{1-p}$. Другими словами, для уточненных неизвестных $P^a$ и $Q^b$ получены неоднородные уравнения антиплоской и плоской задач теории упругости со свободными членами, входящими как в уравнения равновесия так и в уравнения состояния. В частности, неоднородности в уравнениях равновесия можно трактовать как фиктивные массовые силы. Их компоненты получаются в результате сопоставления уравнений (7.4), (7.5) при $r=1$ с (7.6) и записываются так

$$X_1=\eta^{1-p}[\partial_2 S_{21}+\eta^p Rk_1(S_{12}+S_{21})] \tag{7.17}$$
$$X_2=\eta^{1-p}[\partial_2 S_{22}+\eta^p Rk_1(S_{22}-S_{11})],\ X_3=\eta^{1-p}[\partial_2 S_{23}+\eta^p Rk_1 S_{32}]$$

Здесь для оболочек вращения надо положить $k_1=0$.

8. Обсудим формулировку граничных условий в двумерной теории оболочек. Пусть интересующий нас торец оболочки задается уравнением $\alpha_1=\alpha_{10}$ и характер его закрепления выражен трехмерными граничными условиями в виде равенств $W_j=W_{j0}$ ($j=1, 2, 3$), в которых $W_j$ — некоторые искомые величины теории упругости, а $W_{j0}$ — заданные функции. Примем, что решение задачи теории упругости приближенно выражается суммой внутреннего и краевого интегралов и учитывая, что в первом из

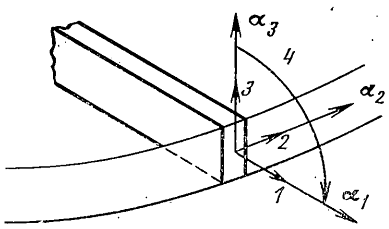
них искомые величины меняются по $\alpha_3$ полиномиально, перепишем торцевые условия так

$$W_j+\sum_n \alpha_3{}^n W_{j,n}=W_{j0}(\alpha_1,\alpha_3) \qquad (\alpha_1=\alpha_{10};\ j=1,2,3) \tag{8.1}$$

Будем пока считать $W_{j,n}$ — известными функциями $\xi_2$, а (8.1) рассматривать как торцевые условия для краевого интеграла, который должен быть построен в области

$$\alpha_{10}\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_{10}+l; \quad -h\leqslant\alpha_3\leqslant+h \tag{8.2}$$

Причем помимо (8.1) краевой интеграл должен подчиняться на лицевых поверхностях условиям отсутствия напряжений, а на торце $\alpha_1=\alpha_{10}+l$ — условиям отсутствия перемещений ($l$ — произвольное число, достаточно большое по сравнению с $2h$). При фиксированных $W_{j,n}$ в (8.1) и $l$ в (8.2) краевой интеграл определится однозначно, а вместе с тем однозначно определятся и $R_k$ — силы и моменты, развивающиеся на торце $\alpha_1=\alpha_{10}$. В соответствии с (п. 1, п. 2) двумерная теория оболочек, базирующаяся на использовании внутренних интегралов, должна достаточно хорошо аппроксимировать НДС трехмерной оболочки вдали от краев (или других концентраторов напряжений). Это значит что $W_{j,n}$ в (8.1) надо подчинить таким равенствам, выполнение которых гарантирует затухание краевого интеграла. Эти равенства должны рассматриваться как граничные условия для внутренних интегралов уравнений трехмерной теории упругости, а следовательно ими и определяются граничные условия двумерной теории оболочек.




Будем сначала считать, что краевой интеграл строится с отбрасыванием величин порядка $O(\eta^{1-p})$, т. е. на основании однородных уравнений антиплоской и плоской задач теории упругости. Тогда условия затухания краевого интеграла на основании принципа Сен-Венана выразятся четырьмя равенствами

$$R_k=0 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{8.3}$$

где под $R_k$ подразумеваются силовые факторы, направления которых изображены на фигуре.

Поясним, что в (8.3) не включено в качестве условия применимости принципа Сен-Венана требование обращения в нуль крутящего момента $H$. Оно и не является необходимым, так как в антиплоской задаче теории упругости предполагается, что $S_{23}\neq0$, а это напряжение и будет уравновешивать крутящий момент $H$.

Построение краевого интеграла можно уточнить, считая, что он имеет вид $P^a+\eta^{1-p}P_*{}^b$, $Q^b+\eta^{1-p}Q_*{}^a$ и удовлетворяет уравнениям (7.16). Можно считать, что вторые слагаемые левых частей представляют собой свободные члены, а входящие в них $P^a$ и $Q^b$ являются затухающими антиплоским и плоским НДС, построенными указанным выше способом. Это значит, что затухающими будут и компоненты эффективной нагрузки, вычисленные по формулам (7.17). Отсюда, применив снова принцип Сен-Венана, заключаем, что уточненные условия затухания краевого интеграла имеют вид

$$R_k+\delta R_k=0 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{8.4}$$

где под $\delta R_k$ подразумеваются силовые факторы с направлениями, изображенными на фигуре и вычисленные с учетом фиктивной локализованной вблизи $\alpha_1=\alpha_{10}$ массовой нагрузки (7.17).

Граничные условия, сформулированные в виде соотношений (8.3) или (8.4), по сравнению с традиционными граничными условиями имеют следующие преимущества:

во-первых их число равно четырем и не возникает вопроса об устранении несоответствия между этим числом и порядком двумерных уравнений теории оболочек;

во-вторых они более универсальны: равенства (8.3), (8.4) сохраняют силу и при сложно закрепленных краях (когда, например, край оболочки заделан на одной части толщины и свободен — на другой);

в-третьих точность граничных условий можно варьировать и добиваться ее адэкватности с точностью дифференциальных уравнений теории оболочек (традиционные граничные условия связаны с отбрасыванием величин вида $O(\eta^{1-p})$, тогда как соответствующие дифференциальные уравнения можно построить, отбрасывая лишь величины вида $O(\eta^{2-2p})$;

в-четвертых рассуждения, связанные с выводом условий (8.3), (8.4), имеют «сопроматовский характер» и их легче приспособить к специфике закрепления края оболочки.

Наряду с этим приходится отметить и громоздкость выкладок, ведущих к расшифровке граничных соотношений (8.3), (8.4). Для простейших случаев (свободный край, шарнирная опора, защемление) они описаны в [1]. Выявилось, что следует различать традиционные или канонические граничные условия (в основном соответствующие (8.3)) и приведенные граничные условия (соответствующие (8.4)).

Известная поправка Кирхгоффа из равенств (8.3) не следует и с этой точки зрения на свободном крае канонические условия надо формулировать так

$$T=S=N=G=0 \tag{8.5}$$

Однако аккуратные рассуждения показывают, что переход от (8.3) к (8.4) порождают поправки, асимптотически главная из которых и заключается в известной поправке Кирхгоффа (это было впервые показано для теории изгиба пластин в работе [11]).

Приведенные граничные условия, вытекающие из (8.4), для свободного края имеют вид

$$T=S=N+\partial H/\partial s=G+3Dh\partial H/\partial s=0 \tag{8.6}$$

$$D=\frac{384}{\pi^5}\sum\frac{1}{(2n-1)^5}\approx 0{,}4200$$

Они содержат поправки не только для $N$, но и для $G$. Можно показать, что $\partial H/\partial s=O(\eta^0 N)$, $h\partial H/\partial s=O(\eta^{1-p}G)$, т. е. что первая из двух поправок существенней чем вторая. Приведенные граничные условия выведены асимптотическим методом в [10] и подтвердились на основе физических рассуждений, описанных в [12].

Канонические граничные условия в двумерной теории оболочек можно увязать с вариационными принципами [1]. Приведенные граничные условия с вариационными принципами не увязываются [13]. Это не является признаком порочности асимптотических подходов: выполнение двумерных вариационных принципов означает лишь формально-математическое благополучие, но ни в коей мере не свидетельствует о достижении асимптотической точности, на которую притендует данная двумерная теория.

В [13] для двумерной теории оболочки указана модификация вариационных принципов, позволяющая сохранить их при повышении требований к асимптотической точности. Это достигается за счет переноса кривой, на которой выставляются граничные условия, на некоторое асимптотически малое расстояние в глубь оболочки. Другой (как представляется, более естественный) способ сохранения вариационных принципов в двумерной теории оболочек, заключается в применении метода последовательных приближений, в котором исходное приближение подчиняется традиционным граничным условиям двумерной теории оболочек.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. *Гольденвейзер А. Л.* О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука, 1969. С. 161–176 с.
3. *Гольденвейзер А. Л.* О вынужденных гармонических колебаниях оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 168–177.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Изгибания поверхностей и сверхнизкие частоты колебаний тонких оболочек // Изв. АН СССР. 1977. № 5. С. 106–117.
5. *Gol'denveizer A. L.* The role of surface bendings in the shell theory // Theory of sells. Amsterdam: North-Holland Publ., 1983. P. 315–322.
6. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
7. *Gol'denveizer A. L.* Asymptotic method in the theory of shells // Proc. 15th Intern. Congr. Theory Appl. Mech. Toronto; Amsterdam et al.: North-Holland, 1980. P. 91–104.
8. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотический метод в теории оболочек // Успехи механики. 1982. Т. 5. Вып. 1/2. С. 137–182.
9. *Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д.* Динамический погранслой в задачах колебаний оболочек // Изв АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 152–162.
10. *Колос А. В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 771–781.
11. *Friedrichs K. O.* Kirchhof's boundary conditions and the edge effect for elastic plates // Proc. Symp. Appl. Math. 1950. V. 3. P. 117—124.
12. *Koiter W. T., Simwomds J. G.* Foundation of shell theory // Appl. Mech. Proc. 13th Intern. Congr. of Theor. and Appl. Mech. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1973. P. 151–176.
13. *Бердичевский В. Л.* Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 664–687.

Москва

Поступила в редакцию
14.VIII.1989