

УДК 539.3

© 1990 г.

В. А. МЕРЗЛЯКОВ

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ
СОСТОЯНИЕ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ
ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК**

Задачам упругого расчета напряженно-деформированного состояния тонких оболочек вращения, подверженных локальным воздействиям, посвящено много работ. Подробный обзор и направления дальнейших исследований даны в [1-3]¹. В монографиях [4, 5] для расчета локально нагруженных упругих оболочек вращения применяются тригонометрические ряды Фурье по окружности оболочки и метод дискретной ортогонализации в меридиональном направлении. В статье [6] исследовано осесимметричное упругопластическое состояние сферической оболочки под действием кольцевой нагрузки. В отличие от этого рассматривается задача определения упругопластического напряженно-деформированного состояния первоначально ненапряженных, изотропных оболочек вращения, находящихся под действием нагрузок, локализованных в окружном и меридиональном направлениях. Задача решается на основе гипотез Кирхгофа — Лява в геометрически линейной постановке; в качестве физических уравнений используются соотношения теории малых упругопластических деформаций. Для расчета оболочек применяются тригонометрические ряды Фурье по окружной координате и метод дискретной ортогонализации в меридиональном направлении. Проводится численный анализ конкретных задач и обсуждаются некоторые качественные и количественные эффекты.

1. Рассмотрим упругопластическое напряженно-деформированное состояние первоначально ненапряженной, изотропной оболочки вращения, находящейся под действием нагрузок, изменяющихся в окружном и меридиональном направлениях. Задача решается на основе гипотез Кирхгофа — Лява в геометрически линейной постановке. Предполагается, что в процессе нагружения элементы оболочки деформируются по траекториям, мало отличающимся от прямолинейных.

Положение точки срединной поверхности оболочки определим длиной дуги меридиана s и центральным углом θ в параллельном круге. Расстояние произвольной точки оболочки от срединной поверхности обозначим через ξ . Уравнения меридиана срединной поверхности представим в виде $r=r(s)$, $z=z(s)$, где r — радиус параллельного круга, z — расстояние по оси вращения от начальной плоскости $z=z_0$. Связь между усилиями N_s , N_θ , S , моментами M_s , M_θ , H и деформациями срединной поверхности запишем

$$\begin{aligned} N_s &= D_N(\varepsilon_s + \nu \varepsilon_\theta + P_s), \quad (s \neq \theta), \quad S = 1/2(1-\nu)D_N(\varepsilon_{s\theta} + P) \\ M_s &= D_M(\kappa_s + \nu \kappa_\theta + I_s), \quad (s \neq \theta), \quad H = (1-\nu)D_M(\kappa_{s\theta} + I) \\ D_N &= 2Gh/(1-\nu), \quad D_M = Gh^3/[6(1-\nu)] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь G , ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона; $h=h(s)$ — толщина оболочки; P_s , P_θ , P , I_s , I_θ , I — интегральные характеристики (интегрирование ведется от $-h/2$ до $+h/2$):

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{h} \int \beta_s d\xi, \quad (s \neq \theta), \quad P = \frac{1}{h} \int \beta_{s\theta} d\xi \\ I_s &= \frac{12}{h^3} \int \beta_s \xi d\xi, \quad (s \neq \theta), \quad I = \frac{6}{h^3} \int \beta_{s\theta} \xi d\xi \end{aligned} \quad (1.2)$$

¹ См. также *Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Ольшанский В. П.* Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований). М., 1988. 192 с. — Деп. ВИНТИ 12.02.88; № 1222-В88.

При получении соотношений (1.1) использовалось, что в случае плоского напряженного состояния зависимости между напряжениями $\sigma_s, \sigma_\theta, \sigma_{s\theta}$ и деформациями $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{s\theta}$ записаны в форме закона Гука, но с дополнительными членами, учитывающими пластические деформации [7]:

$$\sigma_s = [2G/(1-\nu)] (\varepsilon_s + \nu\varepsilon_\theta + \beta_s), \quad (s \neq \theta), \quad \sigma_{s\theta} = 2G(\varepsilon_{s\theta} + \beta_{s\theta}) \quad (1.3)$$

Для конкретизации дополнительных членов $\beta_s, \beta_\theta, \beta_{s\theta}$ используем соотношения теории малых упругопластических деформаций, линеаризованные методом упругих решений

$$\beta_s = \omega [\nu\varepsilon_\tau - (1-\nu)\varepsilon_s - (1-2\nu)\varepsilon_\theta], \quad (s \neq \theta), \quad \beta_{s\theta} = -\omega\varepsilon_{s\theta} \\ \varepsilon_\tau = [(1-2\nu)/(1-\nu)]\beta_\tau - [\nu/(1-\nu)](\varepsilon_s + \varepsilon_\theta), \quad \beta_\tau = \omega(\varepsilon_\tau - \varepsilon_\theta) \quad (1.4)$$

Здесь $\omega = 1 - S/(2GG)$, $\varepsilon_\theta = \frac{1}{3}(\varepsilon_s + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\tau)$, S — интенсивность касательных напряжений; Γ — интенсивность деформаций сдвига. Предполагаем, что существует функция $S = F_*(\Gamma)$, не зависящая от вида напряженного состояния и определяющаяся из опыта на простое растяжение цилиндрических образцов $\sigma = f_*(\varepsilon)$. При этом $S = \sigma/\sqrt{3}$, $\Gamma = (1 + \nu^*)\varepsilon/\sqrt{3}$, $\nu^* = \frac{1}{2} - (1-2\nu)\sigma/[4(1+\nu)G\varepsilon]$, где σ и ε — напряжение и деформация при одноосном растяжении цилиндрических образцов, ν^* — коэффициент поперечной деформации.

В качестве разрешающих функций выберем переменные [8]:

$$y_1 = rN_s, \quad y_2 = rQ_s^*, \quad y_3 = rS^*, \quad y_4 = rM_s, \\ y_5 = u, \quad y_6 = w, \quad y_7 = v, \quad y_8 = \vartheta_s \quad (1.5)$$

где N_s и $Q_s^* = Q_s + 1/r \partial H / \partial \theta$ — меридиональное и приведенное поперечное усилия; $S^* = -S - 2 \sin \varphi H / r$ — приведенное сдвигающее усилие; Q_s — поперечное усилие; u, w, v — компоненты перемещения срединной поверхности в меридиональном, поперечном и окружном направлениях; ϑ_s — меридиональный угол поворота; φ — угол, образованный нормалью к срединной поверхности и осью вращения.

Использование линейных геометрических уравнений, уравнений равновесия в форме В. В. Новожилова и соотношений пластичности (1.1) позволяет получить для выбранных разрешающих функций (1.5) систему разрешающих дифференциальных уравнений в частных производных [8]:

$$\partial Y / \partial s = P(s, \theta) Y + F(s, \theta) \quad (1.6)$$

где $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_8\}$ — вектор разрешающих функций; $P(s, \theta) = \{p_{ij}(s, \theta)\}$ — дифференциальный оператор; $F(s, \theta) = \{f_i(s, \theta)\}$ — вектор правых частей; $i, j = 1, 2, \dots, 8$. На торцах оболочки должны выполняться граничные условия, сформулированные для разрешающих функций или их линейных комбинаций

$$DY = b \quad (1.7)$$

где D — матрица граничных условий на торцах оболочки, b — вектор значений разрешающих функций на контурах оболочки. Специфика уравнений (1.6) заключается в том, что дифференциальный оператор $P(s, \theta)$ не зависит от напряженного состояния, а члены, учитывающие пластические деформации, входят лишь в $F(s, \theta)$.

Систему уравнений (1.6) будем решать методом последовательных приближений, в каждом из которых интегральные характеристики $P_s, P_\theta, P, I_s, I_\theta, I$ известны из предыдущего приближения. Поэтому разложение в виде тригонометрических рядов по окружной координате этих членов, заданных нагрузок и искомых функций

$$y_i(s, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [y_{in}(s) \cos n\theta + y_{in}'(s) \sin n\theta] \quad (i=1, 2, 4, 5, 6, 8)$$

$$y_i(s, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [y_{in}(s) \sin n\theta + y_{in}'(s) \cos n\theta] \quad (i=3, 7) \quad (1.8)$$

дает возможность разделить переменные в системе (1.6) и для каждой гармоники тригонометрических рядов получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dY_n/ds = A_n(s)Y_n + f_n(s) \quad (1.9)$$

где Y_n — вектор амплитудных значений вектора (1.5). Компоненты матриц $A_n(s)$ и векторов $f_n(s)$ зависят от номера гармоники. Аналогично разделяются переменные в граничных условиях (1.7).

2. Рассмотрим некоторые особенности алгоритма определения упруго-пластического напряженного состояния оболочек вращения при локальных воздействиях. Меридиан, окружность и толщину оболочки разбиваем на определенное число интервалов (K_s , K_θ и K_ζ в направлениях s , θ и ζ). Таким образом, оболочка оказывается покрытой трехмерной пространственной сеткой. Поверхностная нагрузка задается в узлах срединной поверхности при $\zeta=0$. В этих же узлах определяются значения вектора разрешающих функций (1.5). В узлах сетки, покрывающей всю оболочку, вычисляются значения деформаций, напряжений, соответствующих интенсивностей и дополнительных членов β_s , β_θ , $\beta_{s\theta}$, β_ζ (1.4), учитывающих пластические деформации. Интегральные характеристики (1.2) находятся численно, методом Симпсона. Амплитудные значения интегральных характеристик, входящие в правые части системы (1.9), для всех номеров удерживаемых в решении гармоник определяются численно. Численное интегрирование по окружной координате θ производится следующим образом (рассмотрим, например, вычисление коэффициента при $\cos n\theta$ для некоторой функции $\psi(\theta)$):

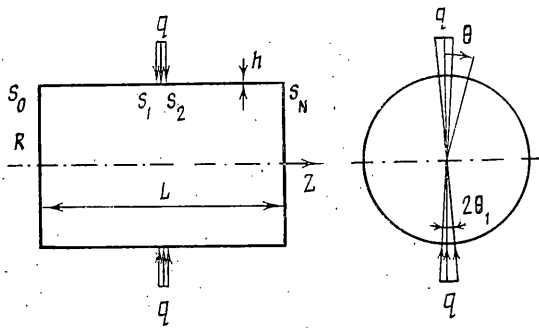
$$\begin{aligned} \psi_n &= \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \cos n\theta \, d\theta = \sum_{j=1}^{K_\theta-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \psi(\theta) \cos n\theta \, d\theta = \\ &= \sum_{j=1}^{K_\theta-1} \left[\frac{\psi(\theta_j) + \psi(\theta_{j+1})}{2} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \cos n\theta \, d\theta \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{K_\theta-1} \left[\frac{\psi(\theta_j) + \psi(\theta_{j+1})}{2} (\sin n\theta_{j+1} - \sin n\theta_j) \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.9) интегрируем методом Рунге — Кутты с дискретной ортогонализацией и нормализацией частных решений по С. К. Годунову. При этом используется независимость оператора $A_n(s)$ от напряженно-деформированного состояния, что позволяет вычислить этот оператор лишь в первом приближении используемого метода упругих решений. Решение системы (1.9) разыскивается в виде

$$Y_n = Y_n^0 + Y_n^* \quad (2.2)$$

где Y_n^0 — общее решение однородной системы, Y_n^* — частное решение неоднородной системы. При использовании метода упругих решений Y_n^0 не меняется в процессе последовательных приближений и его можно также определить лишь в первом приближении. Эти особенности позволяют существенно сократить время решения задачи на ЭВМ.

3. При аппроксимации ступенчатой нагрузки усеченным рядом Фурье возникает эффект Гибса. Для исследования влияния эффекта Гибса на напряженно-деформированное состояние упругих оболочек вращения рассмотрим бочкообразную оболочку, подверженную на правом торце $S=S_N$ действию локального усилия ($N_r=g(\theta)$, $N_z=S^*=M_s=0$) [4, 5]. Левый торец $s=s_0$ жестко заземлен ($u=w=v=$



Фиг. 1

$=\varphi_s=0$). Геометрические размеры оболочки и свойства материала: радиус $r = (\sin \varphi - 0,25) M$; $1,2933 \leq \varphi \leq 1,8433$; толщина $h = 0,01$ м, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

В монографиях [4, 5] эта задача рассмотрена в случае, когда локальная нагрузка, заданная ступенчатой функцией

$$N_r = 0, \quad \theta \in [-\sqrt{\pi}/40, \sqrt{\pi}/40], \quad N_r = q_0, \quad \theta \in [-\sqrt{\pi}/40, \sqrt{\pi}/40] \quad (3.1)$$

заменяется интегрально эквивалентной ей нагрузкой

$$N_r = q_0 \exp(-400\theta^2) \quad (3.2)$$

В отличие от [5, 6] представим в виде ряда Фурье непосредственно функцию (3.1):

$$N_r = q_0 \left[\frac{1}{40\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(1/40\pi^{1/2}n)}{n} \cos n\theta \right] \quad (3.3)$$

В применяемых тригонометрических рядах в обоих случаях учитываем $N=61$ членов, количество интервалов вдоль меридиана принимаем $K_s=148$.

В табл. 1 в некоторых точках срединной поверхности приведены значения прогибов W/q_0 , вычисленных при задании нагрузки ступенчатой функцией (3.1) (первые столбцы) и функцией (3.2) (вторые столбцы). На основании приведенных результатов можно заключить, что эффект Гиббса, возникающий при аппроксимации ступенчатой нагрузки усеченным рядом Фурье, практически не оказывает влияния на напряженно-деформированное состояние оболочки.

4. Рассмотрим упругопластическое напряженное состояние цилиндрической оболочки, находящейся под действием радиальной нагрузки, приложенной к двум диаметрально противоположным площадкам, ограниченными линиями главных кривизн (фиг. 1). Торцы оболочки жестко заземлены при $s=s_0$ и $s=s_N$. Оболочка изготовлена из материала, механические свойства которого задаются следующей диаграммой растяжения: $\sigma=0$; $3 \cdot 10^8$; $3,7 \cdot 10^8$ Па; $\epsilon=0$; $0,004282$; $0,05$, коэффициент Пуассона $\nu=0,3$. Локальная нагрузка, действующая на цилиндрическую оболочку

$$q(s, \theta) = \begin{cases} 0, & s \in [s_1, s_2], \theta \in [-\theta_1, \theta_1], \theta \in [\pi - \theta_1, \pi + \theta_1] \\ q_0, & s \in [s_1, s_2], \theta \in [-\theta_1, \theta_1], \theta \in [\pi - \theta_1, \pi + \theta_1] \end{cases} \quad (4.1)$$

Симметрия геометрии оболочки, условий закрепления и действующей нагрузки позволяет рассматривать восьмую часть оболочки $0 \leq s \leq L/2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, при этом на торце, соответствующем плоскости симметрии $s=L/2$ задаются граничные условия $Q_s^* = S^* = u = \varphi_s = 0$. Локальную нагрузку представим в виде [2, 4, 5, 8]:

$$q(s, \theta) = \frac{2q_0}{\pi} \left(\theta_1 + \sum_{n=1}^N \frac{\sin 2n\theta_1}{n} \cos 2n\theta \right) \quad (4.2)$$

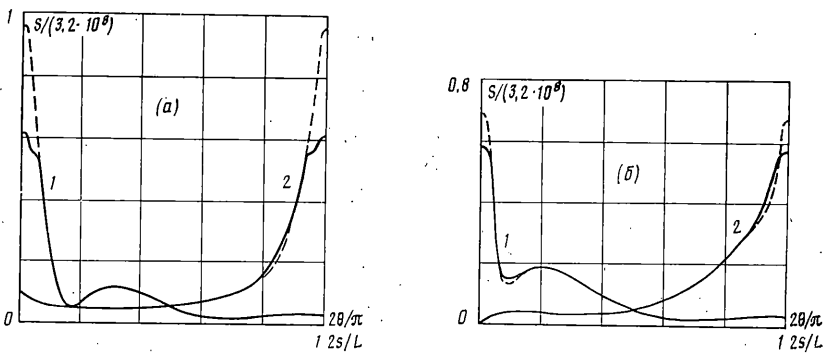
Геометрические размеры оболочки и областей нагружения $L=1,2$ м; $R=L/\pi$ м; $h=0,01$ м; $s_1=0,58$ м; $s_2=0,62$ м; $50R\theta_1=1$. Интенсивность нагрузки $q_0=3 \cdot 10^7$ Па. При

Таблица 1

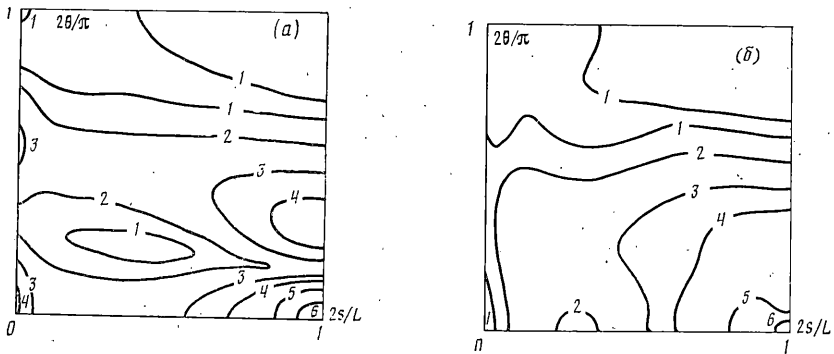
s	$\theta=0$		$\theta=0,17$	
	$\epsilon_s \cdot 10^5$	$\epsilon_\theta \cdot 10^5$	$\epsilon_s \cdot 10^5$	$\epsilon_\theta \cdot 10^5$
1,02	2854	2791	1260	1257
1,43	224	222	159	157

Таблица 2

s=L		s=s2	
$\epsilon_s \cdot 10^5$	$\epsilon_\theta \cdot 10^5$	$\epsilon_s \cdot 10^5$	$\epsilon_\theta \cdot 10^5$
-45	149	676	482
-45	150	1313	779



Фиг. 2



Фиг. 3

решении задачи учитываем $N=41$ членов ряда с номерами $2n$, где $n=0, 1, \dots, 40$. Пространственная сетка строилась с равномерным шагом по толщине и окружности и неравномерным шагом вдоль меридиана; в окрестности приложенной нагрузки узлы сетки сгущались. Количество интервалов по толщине оболочки принималось равным $K_r=6$; по окружности $K_\theta=180$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) и вдоль меридиана $K_s=86$ ($0 \leq s \leq L/2$).

При размерах нагруженной области, превышающих толщину оболочки, значения напряжения, найденных по трехмерной теории и с использованием гипотез Кирхгофа — Лява, практически совпадают [1, 3]. В самой близкой окрестности границы нагруженной области (не превышающей толщины оболочки) погрешность, вносимая гипотезами Кирхгофа — Лява, может быть значительной.

Рассматриваемое нагружение вызывает как растягивающие, так и сжимающие напряжения с преобладанием сжимающих напряжений. При этом под нагрузкой внешняя поверхность оболочки сжата, а внутренняя — растянута. На фиг. 2 приведены графики изменения интенсивности касательных напряжений на внешней (2, а) и внутренней (2, б) поверхностях. Цифрой 1 отмечены графики изменения по окружности оболочки в сечении $s=L/2$; цифрой 2 — вдоль меридиана при $\theta=0$. Сплошные линии соответствуют упругопластическому, а штриховые — упругому решению. На наружной поверхности интенсивность касательных напряжений в области максимальных значений снизилась на 50%. Для элементов оболочки, расположенных в окрестности внутренней поверхности, эти изменения не столь значительны.

На фиг. 3 приведены изолинии интенсивности касательных напряжений на внешней (3, а) и внутренней (3, б) поверхностях, полученные в упругопластическом решении. Кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют уровням напряжений $5 \cdot 10^6$, $1 \cdot 10^7$, $2 \cdot 10^7$, $3 \cdot 10^7$, $7 \cdot 10^7$, $15 \cdot 10^7$ Па соответственно. Анализируя результаты, приведенные на фиг. 3, можно отметить более быстрое затухание напряженного состояния в окружном направлении, характерное для оболочек нулевой кривизны. Уравновешенность нагрузки приводит к небольшому краевому эффекту в районе жесткой заделки торцов оболочки.

5. Рассмотрим упругопластическое напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки, находящейся под действием радиальной нагрузки, приложенной к одной прямоугольной площадке. Левый торец оболочки жестко закреплён ($s=s_0$: $u=w=v=\theta_s=0$), правый торец свободен в осевом направлении ($s=s_N$: $Q_s^*=S^*=M_s=w=0$). Материал тот же, что и в предыдущей задаче. Локальную нагрузку представим в виде

$$q(s, \theta) = \frac{2q_0}{\pi} \left(\frac{\theta_1}{2} + \sum_{n=1}^N \frac{\sin n\theta_1}{n} \cos n\theta \right) \quad (5.1)$$

Геометрические размеры оболочки и области нагружения $R=0,2$ м; $L=0,195$ м; $h=0,006$ м; $(s_2-s_1)\theta_1 R=0,625 \cdot 10^{-4}$ м². При решении задачи учитываем $N=41$ членов ряда с номерами $n=0, 1, \dots, 40$. Параметры пространственной сетки $K_t=6$; $K_e=180$ ($0 \leq \theta \leq \pi$); $K_s=104$. Характер напряженно-деформированного состояния качественно такой же, как и в предыдущей задаче, однако краевые эффекты на торцах оболочки значительно сильнее, что можно объяснить неуравновешенностью нагрузки. Значения меридиональных и окружных деформаций, полученных в упругом (первая строка) и упругопластическом (вторая строка) решениях, для двух точек по меридиану при $\theta=0$, $\zeta=-h/2$ приведены в табл. 2. Отметим существенное перераспределение деформаций в окрестности области приложения нагрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григориук Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теорий пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 411 с.
2. Нерубайло Б. В. Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1983. 248 с.
3. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. М.: Мир, 1982. 542 с.
4. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1981. 544 с. (Методы расчета оболочек: Т. 4).
5. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1973. 288 с.
6. Астахова А. Я. Расчет упругопластических оболочек вращения при действии сосредоточенных нагрузок // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 147-152.
7. Шевченко Ю. Н., Прохоренко И. В. Теория упругопластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. Киев: Наук. думка, 1981. 296 с. (Методы расчета оболочек: Т. 3).
8. Шевченко Ю. Н., Мерзляков В. А. Расчет термоупругопластического неосесимметричного деформирования оболочек вращения // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 5. С. 43-53.

Киев

Поступила в редакцию
10.III.1989