

УДК 539.375  
© 1990 г.

И. В. СИМОНОВ

УГОЛ ТРАЕКТОРИИ ТРЕЩИНЫ,  
ПЕРВОНАЧАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ГРАНИЦЕ  
РАЗДЕЛА ДВУХ УПРУГИХ СРЕД

Исходя из универсального закона поведения напряжений около края разреза на поверхности соединения двух линейно упругих материалов, дается теоретическое описание начальной фазы развития такого разреза (трещины) в процессе монотонного нагружения. Обсуждаются следующие критерии разрушения: потока энергии [1], максимума окружного растягивающего напряжения [2, 3] и минимума плотности энергии деформаций [4, 5] при учете прочности шва. Общие формулы приведены к виду с неявной зависимостью от структурного параметра (или радиуса ядра разрушения [4]). Поэтому число безразмерных параметров, определяющих угол траектории трещины, по сравнению со случаем однородной среды [1-4] и в отличие от [5], где изучалось срагивание межфазной трещины на примере одной частной задачи, увеличилось всего лишь на единицу. Отмечается неудовлетворительность критерия потока энергии. Он почти всегда указывает на распространение трещины по границе раздела, а это противоречит наблюдениям [6, 7]. Сопоставляются зависимости углов траектории от параметров по различным критериям. Классифицированы варианты ветвления плоской трещины в поле сдвиговых и растягивающих напряжений на базе решения [8]. Оценен угол ветвления и критическая нагрузка для круглой межфазной трещины под действием растягивающих напряжений по решению [9].

**1. Асимптотика решений задач теории упругости около края межфазной трещины.** Главные члены асимптотического ряда, описывающего ограниченное по энергии напряженно-деформированное состояние около точки гладкости контура бесконечно тонкой щели на границе раздела двух упругих тел, склеенных вне щели, представляют собой сумму асимптотик решений соответствующих плоской и антиплоской задач. По отношению к плоской задаче (считается здесь основной), видоизменяя результаты [10], запишем эту асимптотику в терминах комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили [11]:

$$2\Phi = \chi_2 - \chi_1, \quad \Psi = \chi_1 - z d\Phi/dz \quad (z = x + iy = re^{i\theta}, \quad r \rightarrow 0) \quad (1.1)$$

$$\chi_k \sim (\lambda z)^{-1/2} [\lambda B z^{i\alpha} + (-1)^k \bar{B} z^{-i\alpha}] \quad (y \geq 0), \quad \chi_k(z) = (-1)^k \overline{\chi_k(\bar{z})} \quad (y \leq 0)$$

$$2\pi\alpha = \ln \lambda = \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad \beta = \frac{\kappa_1 - 1 - \mu(\kappa_2 - 1)}{\kappa_1 + 1 + \mu(\kappa_2 + 1)}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

где коэффициент  $B = b_1 + ib_2$  зависит от задачи в целом,  $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$  — плоская деформация,  $\kappa_j = (3 - \nu_j)(1 + \nu_j)^{-1}$  — обобщенное плоское напряженное состояние,  $\mu_j, \nu_j$  — модули сдвига и коэффициенты Пуассона, индекс  $j$  фиксирует среду и часто опускается ( $y > 0$  — среда 1,  $y < 0$  — среда 2, ось  $x$  расположена на границе раздела по нормали к контуру щели).

По формулам связи напряжений с  $\Phi$  и  $\Psi$  находим

$$\sigma \sim e^{\alpha(\theta - \pi)} \{ 2 \cos(\gamma + \Theta/2) - (1/4 + \alpha^2)^{1/2} [\cos(\gamma^0 + \Theta/2) - \cos(\gamma^0 - 3/2\Theta)] - \cos(\gamma - 3/2\Theta) \} + e^{\alpha(\pi - \theta)} \cos(\gamma + 3/2\Theta) \quad (1.2)$$

$$\tau \sim e^{\alpha(\theta - \pi)} \{ (1/4 + \alpha^2)^{1/2} [\sin(\gamma^0 + \Theta/2) - \sin(\gamma^0 - 3/2\Theta) + \sin(\gamma - 3/2\Theta)] + e^{\alpha(\pi - \theta)} \sin(\gamma + 3/2\Theta) \quad (0 \leq \Theta \leq \pi) \quad (1.3)$$

$$(\sigma, \tau, \sigma^0) = r^{1/2} |B|^{-1} (\sigma_\theta, \sigma_{r\theta}, \sigma_r) \\ \gamma = \arg B + \alpha \ln r, \quad \gamma^0 = \gamma - \arctg 2\alpha$$

Формула для  $\sigma^\circ$  отличается от (1.2) знаком первого слагаемого. При  $-\pi \leq \Theta \leq 0$  изменится знак перед  $\pi$  в показателях экспонент.

Асимптотики (1.1)–(1.3) удовлетворяют условиям  $\sigma = \tau = 0$  на берегах щели ( $\Theta = \pm\pi$ ), непрерывности напряжений  $\sigma$ ,  $\tau$  и вектора смещений на ее продолжении ( $\Theta = 0$ ) и используются ниже для оценки начального угла траектории трещины после достижения нагрузки предельного значения. Предварительно выявим пределы изменения параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ . Поскольку  $|\beta| \leq 0,5$  и можно считать  $0 \leq \beta \leq 0,5$  (достигается переменной местами среды 1 и среды 2), то  $0 \leq \alpha \leq 0,178$ . При  $\alpha = \beta = 0$  выражения (1.2), (1.3) не отличаются от аналогичных выражений для случая однородной среды. Поэтому ниже подразумевается  $\alpha \neq 0$ . Оценка  $\gamma$  получается с привлечением соображения о бесконечной тонкости щели. Необходимо учесть наличие прикраевой зоны налегания берегов трещины длины  $l$  (нормировка на характерную внешнюю длину) – иначе асимптотика (1.1) указывает на взаимопересечение берегов трещины. Длину  $l$  считаем столь малой, что имеется область  $0 < l \leq |z| \ll 1$ , где справедлива промежуточная асимптотика (1.1)–(1.3). В этой области решение монотонно, осцилляции начинаются при  $|z| \sim l$ . При  $l = 0(1)$  анализ ветвления проведен в п. 5. Из условия малости  $l$ , а также из соглашения

$$-\pi/2 \leq \arg B \leq 3\pi/2 \quad (1.4)$$

последует ограничение на вариацию параметра  $\gamma$ . Из решения внутренней задачи ( $0 \leq |z| \ll 1$ ) аналогично [8] находим

$$l = 4 \exp \{ \alpha^{-1} (m_* \pi - \pi/2 - B) \} \quad (1.5)$$

где число  $m_*$  выбирается из условия (1.4) и принципа максимальности  $l(m)$  на интервале (0,1). Следовательно  $m_* = 0$  при  $|\arg B| < \pi/2$  и  $m_* = 1$  при  $\arg B > \pi/2$ . Полагая  $10^{-3} \leq r \leq 10^{-1}$ ,  $l \ll r \ll 1$ , учитывая (1.5), а также условие  $\sigma(0) < 0$ , приходим к выводу

$$-\pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2 \quad (1.6)$$

Существенно, что границы изменения  $\gamma$  не зависят от величины  $r$  (в определении  $\gamma$  расстояние  $r$  входит) и что эти границы такие же как и в случае трещины в однородной среде и в однородном поле напряжений, где по физическому смыслу  $\gamma$  есть угол действия сил на бесконечности по отношению к перпендикуляру к плоскости трещины. Формально напряжения в (1.2), (1.3) зависят только от двух параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  – величина  $r$  влияет неявно.

В задаче о плоской трещине на границе раздела в однородном поле напряжений  $\sigma_\infty$ ,  $\tau_\infty$  [8] с точностью до  $O(\alpha^3)$ :

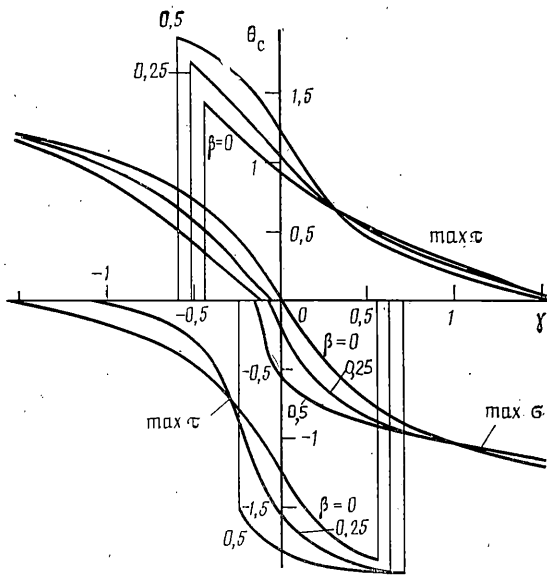
$$\gamma \approx \pm \arctg(\tau_\infty/\sigma_\infty) - (k-2)\alpha, \quad \arg B \approx \gamma + k\alpha, \quad k = \ln r^{-1} \approx 0,7 \quad (1.7)$$

около правого (знак плюс) и около левого (знак минус) краев трещины. При этом полагаем  $\tau_\infty \geq 0$ . Тогда  $l \leq 10^{-4}$  у правого края всегда и  $l < 1$  у левого края при  $\sigma_\infty/\tau_\infty \approx 0,1-0,5$  ( $0 \leq \beta \leq 0,5$ ). Анализ показывает, что  $-(k-2)\alpha \leq \gamma \leq \pi/2$  у левого края и  $-\pi/2 \leq \gamma \leq -(k-2)\alpha$  у другого края. Значит в совокупности  $\gamma$  пробегает весь интервал значений (1.6) и оценка (1.6) не ухудшаема.

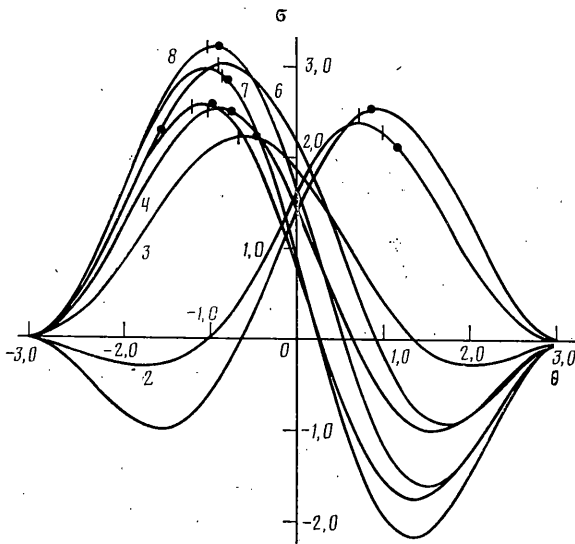
**2. О критерии потока энергии.** По формулам [1] вычислим компоненты  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$  вектора  $\Gamma$  ( $\Gamma$ -интеграла):

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= -2q\pi|B|^2, \quad \Gamma_y = 0 \quad (\alpha \neq 0) \\ \Gamma_x &= -2q\pi|B|^2, \quad \Gamma_y = 4\pi q b_1 b_2 \quad (\alpha = 0) \\ q &= (\kappa_1 + 1)/4\mu_1 + (\kappa_2 + 1)/4\mu_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Результат при  $\alpha \neq 0$  совпадает с результатом вычисления  $\Gamma$  по асимптотике внутреннего решения [8], как у вершины трещины поперечного сдвига. Внутреннее решение при  $\alpha = 0$  вырождается, а предел при  $\alpha \rightarrow 0$  не совпадает со значением  $\Gamma$  при  $\alpha = 0$ . Согласно критерию потока энергии [1], направление вектора потока энергии  $\Gamma$  указывает на направление развития трещины в изотропной среде. Естественное обобщение кри-



Фиг. 1



Фиг. 2

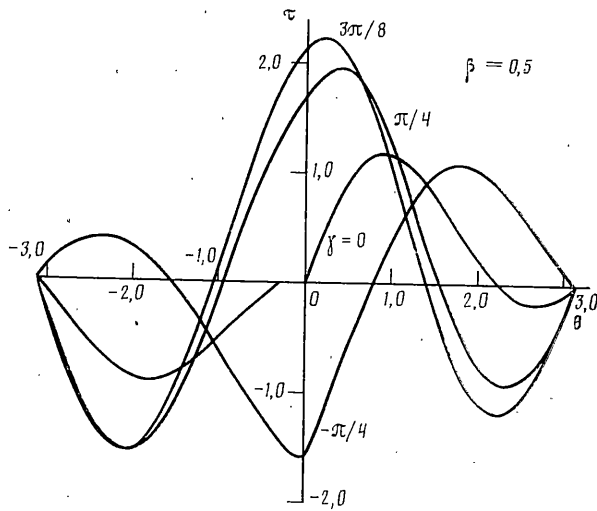
терия на случай кусочно-однородной среды ( $\alpha \neq 0$ ,  $\Gamma_y = 0$ ) приводит к предсказанию развития трещины по границе раздела сред, что противоречит экспериментальным наблюдениям [6, 7]. Этот вывод является серьезным основанием для исключения критерия потока энергии в формулировке [1] из рассмотрения.

**3. Критерий максимального окружного растягивающего напряжения.** Зависимости угла  $\Theta_c$  от  $\gamma$ , рассчитанные согласно критерию

$$\sigma'(\Theta_c) = 0, \quad \sigma''(\Theta_c) \leq 0 \quad (3.1)$$

с учетом (1.2) при различных значениях  $\beta$  показаны на фиг. 1 (три центральных графика). Для материалов, чувствительных к сдвигу, там же изображены критические углы  $\Theta_c^\circ$  по критерию  $\tau'(\Theta) = 0$ ,  $|\tau|''(\Theta) \leq 0$ . Пределы изменения  $\Theta_c^\circ$  по  $\gamma$  таковы:  $0 \leq \Theta_c^\circ \leq 1,236$ ,  $\beta = 0$ ;  $0 \leq \Theta_c^\circ \leq 1,19$ ,  $\beta = 0,5$  ( $-\pi/2 \leq \gamma \leq -0,12$ );  $-1,22 \leq \Theta_c^\circ \leq 0$ ,  $\beta = 0$ ;  $-1,17 \leq \Theta_c^\circ \leq 0$ ,  $\beta = 0,5$  ( $-0,16 \leq \gamma \leq \pi/2$ ).

Значения  $\sigma_m = \max \sigma(\Theta)$  при  $-\pi/2 \leq \gamma \leq 0$  практически постоянны, а при  $0 \leq \gamma \leq \pi/2$  — относительно быстро убывают по закону  $2 \operatorname{ch} \pi \alpha \cos \gamma$  от зна-



Фиг. 3

чений  $2 \operatorname{ch} \pi \alpha$  при  $\gamma=0$  до нуля при  $\gamma=\pi/2$ . Так как  $1 \leq \operatorname{ch} \pi \alpha = (1-\beta^2)^{-1/2} \leq 2/\sqrt{3}$ , то функция  $\sigma_m(\gamma)$  слабо зависит от параметров  $\mu_j, \nu_j$ .

Поведение угла  $\Theta_c^\tau(\gamma, \beta)$  хорошо видно на графиках, а пределы изменения  $\tau_m = \max_{|\theta| \leq \pi} |\tau(\theta)|$  таковы:  $1,98 \geq \tau_m \geq 0,51, \beta=0, 0,14 \leq \gamma \leq \pi/2, 1,01 \leq$

$\tau_m \leq 2,28, \beta=0,5, 0,29 \leq \gamma \leq \pi/2, 0,77 \leq \tau_m \leq 2,0, \beta=0, -1,874 \leq \Theta_c^\tau \leq 0, -\pi/2 \leq \gamma \leq 0,5, 0,65 \leq \tau_m \leq 1,518, \beta=0,5, -2 \leq \Theta_c^\tau \leq -1,497, 0,23 \leq \gamma \leq 0,5$ .

Сопоставим  $\sigma_m$  и  $\tau_m$  при различных значениях  $\gamma$ :

$\gamma$	$0,45\pi$	$0,4\pi$	$0,3\pi$	$0,2\pi$	$0,1\pi$	0	$-0,4\pi$	$-0,45\pi$
$\tau_m/\sigma_m$	6	3	1,5	1	0,5	0,25	0,5	1

Итак при значениях  $\gamma$ , близких к  $\pi/2$ , максимумы касательного напряжения в несколько раз превосходят максимумы растягивающего напряжения и можно ожидать разрушения сколом. Наоборот, при значениях  $\gamma$ , близких к нулю, будет  $\sigma_m \gg \tau_m$  и более вероятно разрушение отрывом.

На фиг. 2 значениям  $\gamma = -\pi/4, \pi/8, \pi/4, 3\pi/4$  соответствуют номера кривых  $\sigma = \sigma(\theta), 1, 3, 4, 5$  ( $\beta=0$ ) и  $2, 6, 8, 7$  ( $\beta=0,5$ ). Смещения кривых  $\sigma(\theta), \tau(\theta)$  (фиг. 2, 3) при варьировании параметра неоднородности  $\beta$  относительно невелики при выбранных значениях  $\gamma$ , также как и значений  $\Theta_c$ . Чувствительность  $\Theta_c^\sigma$  к параметру  $\beta$  наибольшая в окрестности точки  $\gamma=0$  и, например, при  $\gamma=0$  качественно меняется характер разрушения при переходе от случая  $\beta=0$  (трещина развивается по границе раздела) к случаю  $\beta \neq 0$  (трещина идет под углом в слабый материал, конечно, при сильной адгезионной связи).

Для замыкания критерия (3.1) необходимо задать еще три числа  $K_c^1, K_c^2$  и  $K_a$  — трещиностойкости среды 1 и 2 и клеевой прослойки (или сварного шва). Угол траектории определяется из очевидного условия обращения одного из неравенств (3.2) в равенство:

$$K(\Theta_c^\sigma) \leq K_c^j, K(0) \leq K_a \quad (j=1, \Theta > 0; j=2, \Theta < 0) \quad (3.2)$$

$$K(\Theta) = |B|\sigma$$

Судя по графикам (фиг. 1), критерий (3.1), (3.2) однозначно решает задачу о локальном ветвлении трещины, но только при дополнительном задании некоторого радиуса  $r=r_c$ , от которого неявно зависит значение угла  $\Theta_c$  и который войдет в определение предельной нагрузки из уравнения:

$$|B| = K_c^{(j)}/\sigma(\Theta_c; r_c) \quad \text{или} \quad |B| = K_a/\sigma(0; r_c) \quad (3.3)$$

Линейный размер  $r_c$  зависит от структуры материала и определяет порядок величины макроскопического объема материала (обычно малого по сравнению с характерными размерами образца), где должен быть

достигнут определенный уровень напряженно-деформированного состояния, с тем, чтобы в этом объеме началось разрушение — недостаточно этого достичь лишь в какой-нибудь точке [4, 7, 12, 13]. Разные критерии разрушения по-своему определяют этот уровень, зачастую приводят к близким, неразличимым в экспериментах результатам, а в отношении определения порядка величины  $\gamma_c$  выбор критерия представляется не столь существенным. Имеются попытки экспериментального [12] и аналитического [13] определения  $\gamma_c$ .

Как правило один из материалов оказывается существенно прочнее другого. Пусть это будет материал 2. Тогда нижние ветви графиков (фиг. 1) не реализуются и при соответствующих значениях  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq \pi/2$  при  $\beta=0$ ) разрушение пойдет по линии склейки, так как из многочисленных графиков  $\sigma(\Theta)$  и  $\tau(\Theta)$  видно, что максимумы величин  $\sigma$  и  $|\tau|$  достигаются при  $\Theta=0$ . Другими словами, в случаях разнопрочных материалов и сильной адгезионной связи примерно на половине множества нагрузок трещина имеет тенденцию распространяться по линии склейки, на другой половине — ветвиться в слабый материал. Судя по графикам углового распределения  $\sigma(\Theta)$  (фиг. 2), снижение трещиностойкости шва до  $K_a < 2/3 K_c$  значительно сужает указанные области ветвления, а при  $K_a < 1/3 K_c$  — практически сводит меру таких областей к нулю и разрушение при любых нагрузках будет происходить по границе раздела. Реальные углы траектории трещины в однородной среде лучше описываются теорией разрушения Си [13, 14]. Ее обобщение рассматривается ниже.

**4. Критерий минимума плотности энергии деформаций.** Сформулируем аналог критерия Си для начала срастивания трещины [4]:

$$S'(\Theta_c) = 0, S''(\Theta_c) \geq 0 \quad (4.1)$$

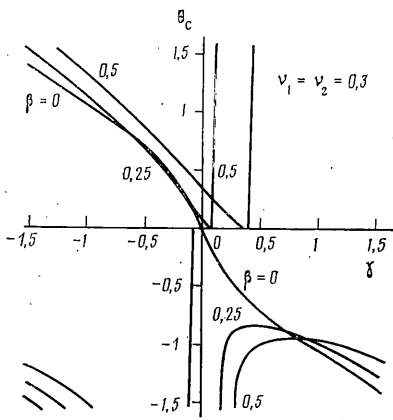
$$e(\Theta_c) \leq e_c^j \quad (\Theta_c \neq 0), K(0) = K_a \quad (\Theta = 0) \quad (4.2)$$

$$S = 2\mu_j e r_c |B^{-2}| = 1/2 (1 - \nu_j) (\sigma + \sigma^0)^2 + \tau^2 - \sigma^0 \quad (4.3)$$

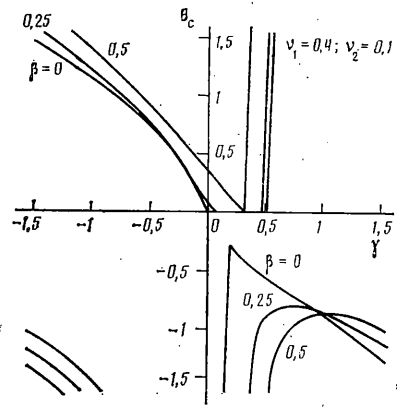
где  $S$  и  $e$  — нормированная и размерная плотность энергии деформации,  $e_c^j$  — предельно допустимые значения  $e(\Theta)$  в точках минимума (4.1), параметры среды  $j$  (условие (4.2) для дальнейшего не существенно).

Угол траектории  $\Theta_c$  в отличие от угла, определяемого по критерию  $\sigma_0$  будет зависеть еще и от коэффициентов Пуассона. Расчеты корней уравнения (4.1) и зависимостей  $S_m(\gamma) = S(\Theta_c, \gamma)$  по формуле (4.3) отражены на фиг. 4–7 ( $\beta=0, 0,25, 0,5, \nu_1 = \nu_2 = 0,3; \nu_1 = 0,4, \nu_2 = 0,4; \nu_1 = 0,4, \nu_2 = 0,1$ ). Интервал, на котором разыскивался минимум функции  $S(\Theta)$ , при расчетах был сужен до  $|\Theta| \leq \pi/2$  по причине, обсуждаемой ниже. При рассмотренных сочетаниях  $\nu_1$  и  $\nu_2$  кривые  $\Theta_c(\gamma, \beta)$  имеют одинаковое поведение. При  $\gamma < 0$ , а также при  $\gamma > 0$  и  $\beta=0$  они близки к линейным зависимостям, при  $\gamma > 0, \beta=0,25, 0,5$  кривизны этих линий уже значительны, а расхождения с зависимостями  $\Theta_c^0(\gamma)$  существенны. В целом поведение функций  $\Theta_c^s(\gamma)$  и  $\Theta_c^\sigma(\gamma)$  качественно подобно и не имеет ничего общего с зависимостями  $\Theta_c^r(\gamma)$ . При  $\gamma \rightarrow \pm \pi/2$  (чистый сдвиг, если  $\beta=0$ ) наблюдаются отмеченные ранее в случае однородной среды расхождения в углах  $\Theta_c^\sigma$  и  $\Theta_c^s$  величиной  $10-35^\circ$  [4]. Существенным отличием случая  $\beta=0$  от случая  $\beta \neq 0$  является разрывность функций  $\Theta_c^s(\gamma)$  при  $\beta \neq 0$ . Максимальное различие между углами  $\Theta_c^\sigma$  и  $\Theta_c^s$  наблюдается при  $\beta=0,25 \div 0,5$  в зоне  $0 \leq \gamma \leq 0,4$ . Поэтому эксперименты по ветвлению межфазной трещины с целью выбора критерия разрушения целесообразно проводить в этих диапазонах изменения параметров  $\beta$  и  $\gamma$ . В случае плоской трещины, погруженной в однородное поле напряжений [8], нагрузка должна удовлетворять условию:  $\tau_\infty / \sigma_\infty = \text{tg}[(k-2)\alpha + b_0], 0 \leq \leq b_0 \leq 0,4$ .

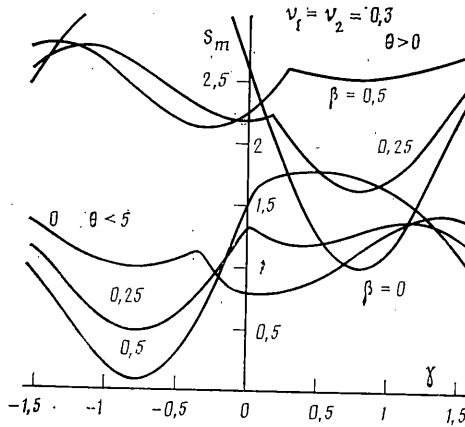
На кривых  $\sigma(\Theta)$  (фиг. 2) точками ( $\nu_1=0,4, \nu_2=0,1$ ) и черточками ( $\nu_1=0,1, \nu_2=0,4$ ) отмечены положения углов  $\Theta_c^s$ . Видно, что они близки к положениям максимумов  $\sigma(\Theta)$ , но имеются случаи ( $\beta=0,5, \gamma=-\pi/4, \pi/8$ ), когда расхождения велики. Обращают на себя внимание точки глубокого минимума функции  $S_m(\gamma)$ . Там реализуется напряженно-дефор-



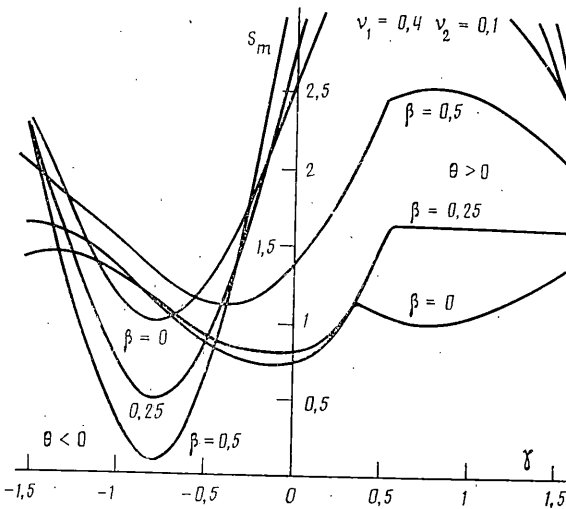
Фиг. 4



Фиг. 5

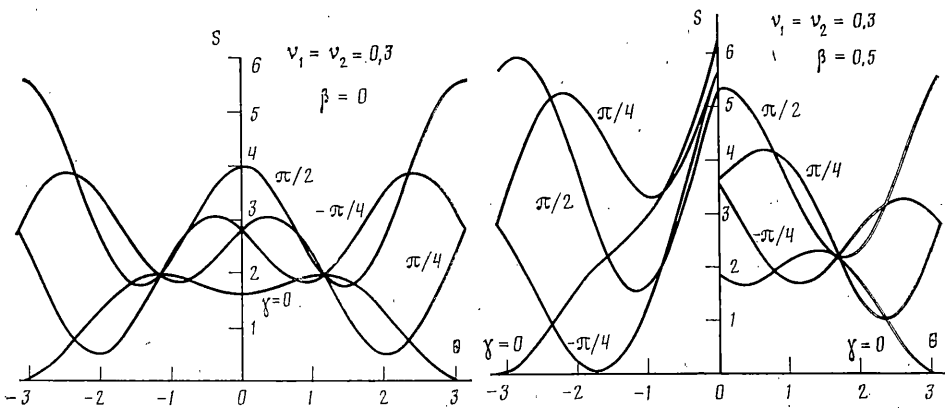


Фиг. 6



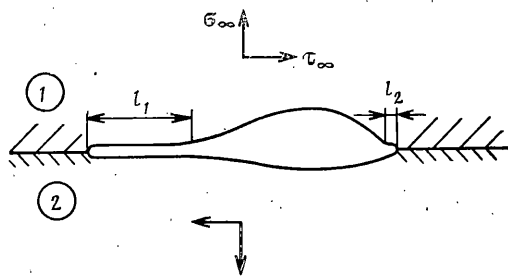
Фиг. 7

мированное состояние, близкое к невозмущенному состоянию, и возникают сомнения в том, что трещина пойдет в направлении  $\Theta = \Theta_c^s$ . Такие глубокие минимумы видны также на графиках  $S(\Theta)$  (фиг. 8, 9). Минимум  $S$  часто попадает в область  $|\Theta| > \pi/2$  и иногда  $S(\pm\pi) = 0$ . В то же время согласно критерию тах  $\sigma$  углы  $|\Theta_c| < \pi/2$ . Из этих соображений критерий (4.2) был изменен: минимум функции  $S(\Theta)$  разыскивался на отрезке  $|\Theta| \leq \pi/2$ . Вычисления показывают корректность  $S$ -критерия с та-



Фиг. 8

Фиг. 9



Фиг. 10

кой поправкой. Абсолютный минимум существует внутри интервала  $|\Theta| < \pi/2$  почти при всех значениях  $\gamma$  (он является локальным минимумом функции  $S(\Theta)$  на интервале  $|\Theta| < \pi$ ).

Аналогично п. 3 следует полагать, что если одна среда много прочнее другой, то соответствующая ей ветвь  $\Theta_c^s(\gamma)$  не реализуется, трещина при таких значениях  $\gamma$  не ветвится.

Рассматриваемая теория позволяет определять параметры разрушения материала  $r_c$  и  $K_{Ic}$  по результатам измерений угла траектории трещины. Приведем иллюстративный пример расчета радиуса  $r_c$ , используя данные [6], где описаны испытания на растяжение и разрушение пластины из склеенных по торцам пластин из эпоксидной смолы ( $\nu_1=0,33$ ,  $\mu_1=0,57$  ГПа,  $K_{Ic}=0,689$  МН/М<sup>3/2</sup> и алюминиевого сплава ( $\nu_2=0,33$ ,  $\mu_2=25,9$  ГПа  $\Rightarrow \alpha=0,076$ ) толщиной  $h \approx 3$  мм и длиной шва  $L \approx 76$  мм. Варьировался размер  $a$ , искусственно созданной межфазной трещины в центре пластины. Установлено, что при  $a > a^* \approx 4$  мм разрушение начинается от вершины трещины: она развивается под углом  $30-35^\circ$  к линии шва по смоле (цифру 35 указывают авторы [6],  $30^\circ$  — измеренное значение угла  $\Theta_c$  по фотографии, приведенной в [6],  $a=12,7$  мм). Близкие по величине значения углов  $\Theta_c$  получены в схожих экспериментах [7]. Из графиков (фиг. 1, 4, 5) определим разброс значений  $\gamma$ :

$$\gamma^s = -0,55 \div -0,61, \quad \gamma^s = -0,34 \div -0,41 \quad (\Theta = 0,52 \div 0,61)$$

Из соотношения (1.7) найдем связь  $r_c^0$  величинами  $a$ ,  $\gamma$  и  $\alpha$  ( $\tau_\infty = 0$ ) и проведем вычисления:

$$r_c^0 = a \exp(\gamma/\alpha - 2); \quad r_c^0 = (0,078 \div 0,20) \cdot 10^{-1} \text{ мм (S)}; \quad r_c^0 = (1,2 \div 0,3) \cdot 10^{-3} \text{ мм (}\sigma\text{)} \quad (4.5)$$

Сравним теперь эти значения с аналитической оценкой  $r_c$  [13], полученной приравниванием правой части (4.1) значению  $S_c$  при испытании материала на простое растяжение:

$$r_c^0 = (1+\nu)(1-2\nu)\pi^{-1}K_{Ic}^2/\sigma_B^2 = 0,036. \quad (4.6)$$

Величина  $\sigma_B = 5$  кГ/мм<sup>2</sup> взята из справочника, что не вполне корректно, но здесь важен порядок величины  $r_c$  (в [6] указано разрушающее напряжение  $\sigma_\infty \approx 1,4$  кГ/мм<sup>2</sup> при отсутствии трещины, оно, естественно, меньше принятого значения  $\sigma_B$  из-за концентрации напряжений в углах склейки). Оценка (4.6) коррелируется с разбросом экспериментальных значений радиуса  $r_c$  для плексигласа [12], близка к рассчитанному значению  $r_c^0$  в (4.5) по  $S$ -критерию ( $\Theta_c = 30^\circ$ ) и на порядок величины отличается от значений  $r_c^0$ , вычисленных исходя из  $\sigma_{\max}$ -критерия. Этот вывод — еще один аргумент в пользу критерия Си. Вследствие  $r_c^0/h \sim 10^{-2}$ , оправдана плоская

деформация при выводе (4.5), (4.6). В [7] приводится значение  $r_c^0 \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$  мм для эпоксидной смолы по данным из эксперимента значениям  $\Theta_c$  и исходя из  $\sigma_{\max}$  — критерия и теории плоского напряженного состояния, что вызывает сомнения, так как отношение  $r_c^0/h$  имеет порядок  $10^{-3}$ .

По измеренным в эксперименте углам ветвления межфазной трещины при использовании графиков  $\gamma = \gamma^S(\Theta_c)$  и формулы (4.5) для определения  $r_c$  можно оценить вязкость разрушения  $K_{Ic}$  из формулы (4.6):  $K_{Ic}^2 = \pi r_c^0 \sigma_B^2 [(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$ , но, быть может, точность такого метода определения параметра  $K_{Ic}$  будет невелика по сравнению с другими методами. Из формулы (4.5) и численного примера следует повышенная чувствительность параметра  $r_c$  к точности определения угла  $\Theta_c$ . Она возрастает с уменьшением  $\alpha$ . Для однородной и кусочно-однородной среды с такими параметрами  $\mu_j$  и  $\nu_j$ , что  $\alpha=0$ , указанный метод определения радиуса  $r_c^0$  теряет силу. Из (1.7), (4.5) также следует важный вывод. Если  $r_c^0$  — инвариант, то угол ветвления  $\Theta_c$  слабо меняется с изменением длины трещины  $a$  при прочих равных условиях. При  $\alpha=0,1$  и  $-1 < \Theta_c < 0$  оценка приращения угла  $\Theta_c$  составляет  $\approx 10^\circ$ , если длину трещины увеличить в четыре раза, что может быть зафиксировано в экспериментах.

*Замечание.* Из условия  $\mu = [1-2\nu_1-2\beta(1-\nu_1)][1-2\nu_2+2\beta(1-\nu_2)]^{-1} \geq 0$  следует  $\nu_1 \leq 1/2(1-2\beta)(1-\beta)^{-1}$ , поэтому отдельным расчетным значениям параметров  $\beta$  и  $\nu_1$  ( $\beta=0,25, 0,5, \nu_1=0,4$ ) соответствуют отрицательные значения отношения относительного модуля сдвига  $\mu = \mu_1/\mu_2$ . Но, поскольку эти значения малы по модулю, то такие случаи близки к реальным ситуациям  $\mu = +0$ .

**5. Анализ ветвления у края закрытой трещины.** Рассмотрим межфазную трещину, закрытую у конца ( $l=O(1)$ ). На поверхности скольжения поставим условие постоянства касательного напряжения в предельном состоянии:  $\sigma_{r\theta} = \tau_0$ ,  $\Theta = \pm\pi$ . Это условие можно рассматривать как срезку неограниченных сил трения в законе Кулона или как закон пластического сопротивления сдвигу. Оно не меняет асимптотику напряжений при  $\tau_0=0$ .

По отношению к нагрузкам это случай, когда из (1.5) не следует  $l \ll 1$ , например, когда в окрестности трещины действуют сжимающие нормальные напряжения при не очень сильных сдвиговых напряжениях. Применительно к плоской трещине (подробнее см. п. 6) это будут варианты нагрузок  $\sigma_\infty < 0$  и  $0 \leq \sigma_\infty/\tau_\infty \leq 0,1 \div 0,5$  для левого края и случай почти закрытой трещины ( $1-l \ll r_c$ ), который реализуется при  $-(2 \div 5) < \tau_\infty/\sigma_\infty \leq 0$ ,  $\tau_\infty \geq 0$  — зона отрыва столь мала, что она не влияет на асимптотику напряжений на расстояниях  $r \sim r_c$  от вершины.

Асимптотика решения произвольной задачи вблизи края закрытой трещины имеет следующий общий вид (см. (1.1)):  $\chi_1 \sim -iN_0 z^{-1/2} + \beta\sigma_0 + i\tau_0$ ,  $\chi_2 \sim -i\beta N_0 z^{-1/2} + \sigma_0 + i\beta\tau_0$  ( $y \geq 0$ ), а напряжения выражаются через действительный коэффициент концентрации  $N_0 > 0$  (определяется из решения задачи в целом), угол  $\Theta$  и параметр  $\beta$  по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &\sim 1/4 N_0 r^{-1/2} \{3(1-\beta) \sin 1/2 |\Theta| + (3+\beta) \sin 3/2 |\Theta|\} + \sigma_0 \\ \sigma_r &\sim 1/4 N_0 r^{-1/2} \{5(1-\beta) \sin 1/2 |\Theta| - (3+\beta) \sin 3/2 |\Theta|\} + (1-2\beta)\sigma_0 \\ \sigma_{r\theta} &\sim -1/4 N_0 r^{-1/2} \{(1-\beta) \cos 1/2 \Theta + (3+\beta) \cos 3/2 \Theta\} + \tau_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Постоянные  $\sigma_0$ ,  $\tau_0$  можно игнорировать при достаточно малом структурном параметре  $r_c$ , вернее, когда  $N_0 \gg [r_c(\sigma_0^2 + \tau_0^2)]^{1/2}$ . Ниже предполагаем это условие выполненным. По критерию (3.1) найдем, используя (5.1):

$$\begin{aligned} \Theta_c^\sigma &= \pm \arccos [(1+\beta)/(3+\beta)], \quad 1,129 \leq \Theta_c^\sigma \leq 1,231 \\ \sigma_0(\Theta_c^\sigma) &\sim 2N_0 r^{-1/2} / \sqrt{3} \quad (\beta=0), \quad \sigma_0(\Theta_c^\sigma) \sim 1,145 N_0 r^{-1/2} \quad (\beta=0,5) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Согласно критерию  $\max|\sigma_{r\theta}|$ :  $\Theta_c^\tau = 0$ ,  $\max|\sigma_{r\theta}| \sim N_0 r^{-1/2}$ . Приведем результаты расчетов по критерию Си:

$$S(\Theta) = (1-\beta^2) \{4\xi \cos^2 \Theta + 8(1-2\nu_j)(1-\cos \Theta) + (\xi-1)^2\}, \quad \xi = (3+\beta)/(1-\beta) \quad (5.3)$$

$$\Theta = 0, \pm\pi, \Theta_c^S - \text{корни уравнения } S'(\Theta) = 0$$

$$\Theta_c^S = \pm \arccos [\xi^{-1}(1-2\nu_j)], \quad \sigma_0(\Theta_c^S) > 0$$

и, поскольку  $S(\Theta_c^S) < S(0)$ , то  $\min S(\Theta) = S(\Theta_c^S)$ . При  $\beta=0$  результат для  $\Theta_c^S$  совпадает с аналогичным результатом для однородной среды [4].



Результаты вычислений угла ветвления по формулам (5.2), (5.3) объединим следующим образом при этом учтем ограничение  $v_1 \leq (1-2\beta)/[2(1-\beta)]$ , которое является следствием неравенств  $\beta \geq 0, \mu \geq 0$ :

$\beta$	—	0	—	—	0,25	—	0,5
$ \Theta_c \sigma $	—	1,231	—	—	1,175	—	1,124
$v$	0	0,25	0,5	0	0,2	1/3	0
$ \Theta_c \sigma $	1,231	1,404	1,571	1,34	1,432	1,504	1,428

Видно, что углы ветвления по  $S$ -критерию, вообще говоря, больше соответствующих углов, рассчитанных по критерию  $\max \sigma_0$ , и это превышение растет с увеличением параметра  $\beta$ .

Таким образом, проведенный в пп. 1–5 общий анализ и полученные формулы позволяют:

— по известным значениям упругих постоянных и параметров хрупкой прочности  $r_c$  и  $K_{1c}$  определять начальный угол ветвления межфазной трещины и предельную нагрузку;

— по измеренному в эксперименте углу траектории такой трещины находить значение структурного параметра  $r_c$  одного из материалов, а затем и вязкость разрушения.

Наиболее приемлемым критерием разрушения является критерий минимума плотности энергии деформаций. Для более точного определения границ применимости различных критериев разрушения целесообразно проведение опытов по ветвлению межфазных трещин для различных пар материалов и при более сложном, чем в [6, 7], нагружении (растяжение со сдвигом).

**6. Плоская и дискообразная трещины.** Из сравнения асимптотики общего вида (1.1)–(1.3) и асимптотики функций у правого края плоской трещины на границе раздела при действии однородного поля напряжений на бесконечности [8] (фиг. 10) следует выражение для коэффициента  $B$  и параметра  $\gamma$  в этой конкретной задаче:

$$|B| = (\operatorname{ch} \pi \alpha)^{-1} [(\sigma_\infty^2 + \tau_\infty^2)/(1+b^2)]^{1/2}, \quad b = 2\alpha(1-l_1)^{-1/2} \quad (6.1)$$

$$\gamma = \pi/2 - \alpha \ln [4(1-l_1)/(l_1 r)] + 2 \operatorname{arctg} 2\alpha$$

где  $0 \leq l_1 < 1$  удовлетворяет трансцендентному уравнению [8] и зависит от отношения  $\eta = \tau_\infty/\sigma_\infty$  и  $\alpha$ , а длина  $l_2$  весьма мала ( $l_2 < 10^{-4}$ ) (такое соотношение  $l_1$  и  $l_2$  обеспечено выбором  $\beta \geq 0, \tau_\infty \geq 0$ , не ограничивающем общность). При  $l_1 \leq 1$  (практически — это область нагрузок  $\sigma_\infty > 0, \tau_\infty \geq 0$ ) имеем  $\alpha \ln(l_1/4) \approx \zeta_0 - \pi/2 - \operatorname{arctg} 2\alpha$ ,  $\zeta_0 = \operatorname{arctg} \eta$ , и формулы (6.1) упрощаются

$$|B| \approx 1/4 (\operatorname{ch} \pi \alpha)^{-1} [(1+4\alpha^2)(\sigma_\infty^2 + \tau_\infty^2)]^{1/2}, \quad k_* = k - 2 \quad (6.2)$$

$$\gamma \approx \zeta_0 + \operatorname{arctg} 2\alpha - \alpha \ln r^{-1} \approx \zeta_0 + (2-k)\alpha, \quad -k_*\alpha < \gamma < \pi/2 - k_*\alpha$$

Если же  $l_1 < r_c, 0 \leq \zeta_0 < \zeta_*$  ( $\beta, r_c$ ), где  $\zeta_* \approx 0,8$  при  $r_c \approx 10^{-3}, \beta = 0,5; \zeta_* \rightarrow \pi/2, \beta \rightarrow 0$ , аналогичный анализ можно провести и для левого края трещины. Выражение для  $|B|$  в (6.2) останется прежним, изменится знак перед  $\zeta$ . При  $l_1 \sim 1$  ( $\sigma_\infty \leq 0, 0,3 \leq l_1 < 1, \alpha \ln 4/l_1 = k_0\alpha, k_0 = 1,4 \div 2,6$ ) выражение для  $\gamma$  преобразуется так (правый край):

$$\gamma \approx \pi/2 + (4 - k_0 - k)\alpha \quad (6.3)$$

По формулам (6.1)–(6.3) можно определить  $|B|$  и  $\gamma$ , затем из графиков (фиг. 1, 4, 5) найти  $\Theta_c$ , а по формуле (4.3) — предельную нагрузку.

Классифицируем возможные картины ветвления в зависимости от угла нагрузки  $\gamma$  и от параметров материала. В области  $0 \leq \eta \leq \operatorname{tg} \zeta_*$  у обоих краев трещины действует одинаковый механизм страгивания (по отрыву). Параметр  $\gamma$  пробегает соответственно следующие значения для левого и правого краев:

$$-\zeta_* - k_*\alpha < \gamma \leq -k_*\alpha, \quad -k_*\alpha \leq \gamma < \zeta_* - k_*\alpha \quad (6.4)$$

Несмотря на ограничение  $\beta \geq 0$  возможны случаи  $K_c^1 \geq K_c^2$  и  $K_c^1 < K_c^2$ . Пусть «слабой» является среда 1. Тогда реализуются верхние ветви на

графиках (фиг. 1, 4, 5) при  $-\pi/2 < \gamma < \gamma_0(\alpha, \nu_j)$ . Возьмем пересечение этого множества с множествами значений (6.4). Получим соответственно для левого и правого краев:

$$-\zeta_* - k_*\alpha < \gamma \leq -k_*\alpha, \quad 0 \leq \eta < \operatorname{tg} \zeta_* \\ -k_*\alpha \leq \gamma < \min(\gamma_0, \zeta_* - k_*\alpha) \equiv \gamma_1, \quad 0 \leq \eta < \operatorname{tg}(\gamma_1 + k_*\alpha)$$

Следовательно при сильной адгезионной связи нагрузкам  $0 \leq \eta < \operatorname{tg}(\gamma_1 + k_*\alpha)$  отвечает тенденция к ветвлению обоих краев, но из-за того, что значения  $\gamma$  разные для левого и правого краев, вообще говоря, углы ветвления окажутся разными и трещина начнет развиваться с того края, где бóльшим окажется коэффициент интенсивности  $K(\Theta_c)$ . При условии  $\operatorname{tg}(\gamma_1 + k_*\alpha) < \eta < \operatorname{tg} \zeta_*$  страгивается левый край.

Пусть теперь  $K_c^1 > K_c^2$ . Реализуются нижние ветви на графиках  $\Theta_c(\gamma)$ . Пересечение множества  $\gamma_0 < \gamma \leq \pi/2$  с (6.4) дает в этом случае для левого края  $\gamma_0 < \gamma < \zeta_* - k_*\alpha$ ,  $\operatorname{tg}(\gamma_0 + k_*\alpha) < \eta < \operatorname{tg} \zeta_*$ , а для правого края это пересечение — пустое множество, т. е. при  $\operatorname{tg}(\gamma_0 + k_*\alpha) < \eta < \operatorname{tg} \zeta_*$  ветвление будет наблюдаться от левого края вниз, в остальной области  $0 \leq \eta \leq \operatorname{tg}(\gamma_0 + k_*\alpha)$  разрушение пойдет по линии склейки.

Возможен вариант  $l_1 \geq r_c$ ,  $1 - l_1 \gg r_c$ , реализующийся при нагрузках  $-a_1(\beta) < \eta^{-1} < a_2(\beta)$ ,  $\beta \leq 0,5$ ;  $a_1, a_2 \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$ ;  $a_2 \approx 0,5$ ,  $\beta = 0,5$  (точнее величины  $a_1$  и  $a_2$  оцениваются по результатам [8]). Напряженно-деформированное состояние у левого края подобно состоянию у края трещины поперечного сдвига (п. 5), анализ ветвления у правого края остается прежним. Угол траектории закрытого края трещины не зависит от  $\gamma$  (т. е. от  $r_c$  и  $\eta$ ) и при заданных значениях упругих параметров,  $\beta \geq 0$ ,  $\tau_\infty \geq 0$  он определяется по формулам (5.2) или (5.3). Для правого края имеем

$$\gamma = \operatorname{arcsctg} \eta^{-1} - k_*\alpha, \quad \pi/2 - \operatorname{arctg} a_2 - k_*\alpha < \gamma < \pi/2 + \operatorname{arctg} a_1 - k_*\alpha$$

и, вообще говоря,  $\gamma > 0$  (для простоты анализа можно считать  $\gamma > \gamma_0$ ) — реализуются нижние ветви  $\Theta_c(\gamma)$ . Обозначим  $\Theta_1, \Theta_2$  — значения потенциальных углов ветвления по отношению к левой и правой вершине ( $\Theta_2 < 0$ ). Решение вопроса, с какого края начнется ветвление или распространение по границе раздела заключается в первоочередности выполнения одного из равенств:  $K(\Theta_1) = K_c^1$ ,  $K(\Theta_2) = K_c^2$ ,  $K(0) = K_a$ ,  $K_{r_0}(0) = K_{2a}$ , где включена трещиностойкость межфазной прослойки на отрыв и на сдвиг.

Наконец возможен случай почти полностью закрытой трещины ( $1 - l_1 \ll r_c$ ), когда зона отрыва или вообще отсутствует (при  $\sigma_\infty < 0$ ,  $\beta = 0$ ) или она весьма мала и локализована вблизи правого края трещины. Тогда у обеих вершин трещины ветвление рассчитывается по схеме закрытой трещины:  $\Theta_j = \pm \arccos [(1 - 2\nu_j)(1 - \beta)/(3 + \beta)]$  по критерию Си, а предельная нагрузка и выбор края ветвления следуют из альтернативного условия, аналогичного (6.5). На этом закончим анализ ветвления плоской трещины.

Из формул для напряжений на продолжении круговой трещины в поле растягивающих усилий ( $\tau_\infty = 0$ ) [9] можно извлечь асимптотику при приближении к краю ( $r \rightarrow 0$ ) и привести ее к конечному виду

$$\sigma_\theta + i\sigma_{r_0} \sim 4\pi e_0 \sigma_\infty (2r)^{i\alpha} (1 + i\alpha) \Gamma(1 - 2i\alpha) [\Gamma(1 - i\alpha)]^{-2} (2/r)^{1/2} = \\ = 2|B| r^{-1/2} \operatorname{ch} \pi \alpha e^{i\gamma}, \quad e_0 = \alpha e_1 / e_2 > 0, \quad 2\pi \alpha = \ln(1 + 2e_2 / e_3) \quad (\alpha \neq 0) \\ e_0 = 2e_1 / e_3 \quad (\alpha = e_2 = 0); \quad e_1 = \mu(1 - \nu_2) + 1 - \nu_1, \quad e_2 = \mu(1 - 2\nu_2) - 1 + 2\nu_1 \\ e_3 = \mu + 3 - 4\nu_1$$

Здесь  $\Gamma$  — гамма-функция, первое равенство следует из (1.2), (1.3) при  $\Theta = 0$ . Из него сразу определяются  $|B|$  и  $\gamma$ :

$$|B| = 2\pi \sigma_\infty e_0 (\operatorname{ch} \pi \alpha)^{-1} [2(\operatorname{th} \pi \alpha)(1 + \alpha^2) / (\pi \alpha)]^{1/2} = \\ = 2\sqrt{2} \pi e_0 \sigma_\infty (1 - 2/3 \pi^2 \alpha^2 + O(\alpha^3) + O(\pi^4 \alpha^4)), \quad (6.6) \\ \gamma = \alpha \ln 2r_c + \alpha + O(\alpha^3)$$

Для сопоставления приведем аналогичные формулы для плоской трещины, следующие из (6.2) при  $\tau_\infty=0$ :

$$|B| = 1/4 (\operatorname{ch} \pi \alpha)^{-1} (1 + 4\alpha^2)^{1/2} \sigma_\infty, \quad \gamma = \alpha \ln r_c + 2\alpha + O(\alpha^3) \quad (6.7)$$

Необходимо учитывать разную нормировку: в (6.6) — на радиус трещины, в (6.7) — на ее длину. При  $r_c < 10^{-3}$  различие между углами ветвления плоской и круговой трещинами делается несущественным (длина равна диаметру). Для примера возьмем  $r_c = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $\gamma_2 = 0,45$ . Из графиков найдем  $\Theta_c^e \approx 34^\circ$ ,  $\Theta_c^s \approx 40^\circ$  для плоской,  $\Theta_c^e \approx 31^\circ$ ,  $\Theta_c^s \approx 37^\circ$  для круговой трещин ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ). Предложение подробно рассмотреть вопросы изменения траектории распространения межфазной трещины было высказано С. А. Христиановичем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука. 1974. 640 с.
2. Эрдоган Ф., Си Дж. О развитии трещин в пластинах под действием продольной и поперечной нагрузок // Тр. Америк. о-ва инж.-механиков. Техн. механика. 1963. Т. 85. № 4. С. 49–59.
3. Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т. Определение предельных усилий при растяжении пластины с дугообразной трещиной // Вопросы механики реального твердого тела. Киев: Наук. думка. 1964. Вып. 3. С. 3–19.
4. Sih G. C. Strain – energy – density factor applied to mixed mode crack problems // Intern. J. Fract. 1974. V. 10. No 3. P. 305–321.
5. Gdoutos E. E. Fracture of bimaterial plate with a crack along the interface // Composite structures. 2: Proc. 2nd Intern. Conf. Paisley, 1981, London; New York, 1983. P. 500–510.
6. Wang T. T., Kwei T. K., Zupko H. M. Tensile strength of butt – joined epoxy – aluminum plates // Intern. J. Fract. 1970. V. 6. No. 2. P. 127–137.
7. Wu E. M., Thomas R. L. Interfacial fracture phenomena // Proc. 5th Intern. Congr. on Rheology Kyoto, 1968. Baltimore, Univ. Park Press, 1969. V. 1. P. 575–587.
8. Симонов И. В. Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений // Механика композит. материалов. 1985. № 6. С. 969–976.
9. Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. Обобщение критерия Гриффитса – Снеддона на случай неоднородного тела // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1061–1069.
10. Williams M. L. The stress around a fault or crack in dissimilar media // Bull. Seismol. Soc. America. 1959. V. 49. No. 2. P. 119–204.
11. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.
12. Theocaris P. S. Experimental determination of the core region in mixed-mode fracture // Proc. 1st USA – Greece Sympos. on Mixed Mode Crack Propagation. Alphen aan den Rijn: Sijthoff; Noordhoff, 1981. P. 21–36.
13. Sih G. C. Prediction of crack growth under mixed mode conditions // Proc. 1st USA – Greece Sympos. on Mixed Mode Crack Propagation. Alphen aan den Rijn: Sijthoff; Noordhoff, 1981. P. 3–19.
14. Prassianakis J. Fracture criteria by the method of caustics, in cracked bimaterial elastic plates // Proc. 1st USA – Greece Sympos. on Mixed Mode Crack Propagation. Alphen aan den Rijn: Sijthoff; Noordhoff, 1981. P. 37–53.

Москва

Поступила в редакцию  
3.X.1988