

УДК 539.3:534.1

© 1990 г.

Г. И. МИХАСЕВ, П. Е. ТОВСТИК

**УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ**

Рассматривается задача о потере устойчивости безмоментного напряженного состояния тонкой упругой конической оболочки под действием внешнего давления  $p$ . Задача решается в линейном приближении. Оболочка, в общем случае, является некруговой и усеченной так, что края оболочки — не обязательно плоские кривые. Предполагается, что потеря устойчивости сопровождается образованием вмятин сильно вытянутых вдоль образующих и локализованных вблизи одной из них. В работах [1, 2] с использованием асимптотического интегрирования двумерные уравнения пологих оболочек сведены к последовательности одномерных краевых задач. Ниже приводится численное исследование эталонной краевой задачи, к которой сводится нулевое приближение задачи устойчивости конической оболочки, подверженной внешнему давлению  $p$ , вне зависимости от формы направляющей и краев оболочки. Рассматриваются различные сочетания шарнирного опирания и заделки краев оболочки. Приводится пример расчета на устойчивость круговой косоусеченной конической оболочки.

1. В качестве ортогональной системы координат на срединной поверхности оболочки введем  $s$  и  $\varphi$ , так чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид  $ds^2 = R^2(ds^2 + s^2 d\varphi^2)$ , где  $R$  — характерный размер срединной поверхности,  $s^0 = sR$  — расстояние до вершины конуса,  $\varphi$  — координата на направляющей. Считаем, что оболочка ограничена двумя краями  $s_1(\varphi) \leq s \leq s_2(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ .

Для исследования локальной потери устойчивости конической оболочки используем систему уравнений пологих оболочек [1, 2]:

$$\varepsilon^4 \Delta^2 w + \lambda \varepsilon^2 \Delta_T w - \Delta_k \Phi = 0, \quad \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi + \Delta_k w = 0 \tag{1.1}$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s}, \quad \Delta_k w = \frac{k}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$$

$$\Delta_T w = \frac{1}{s^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( T_2 \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + s \frac{\partial}{\partial s} \left( S \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + s \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( S \frac{\partial w}{\partial s} \right) + s \frac{\partial}{\partial s} \left( s T_1 \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right]$$

$$\varepsilon^8 = \frac{h^2}{12(1-\sigma^2)R^2}, \quad k^{-1}(\varphi) = \frac{R_2(\varphi)}{Rs}, \quad w = \varepsilon^4 R w', \quad \Phi = \frac{\Phi'}{Eh}$$

$$T'_i = -\lambda E h \varepsilon^6 T_i, \quad S' = -\lambda E h \varepsilon^6 S \quad (i=1, 2)$$

Здесь  $w'$ ,  $\Phi'$  — нормальный прогиб и функция напряжений,  $R_2$  — радиус кривизны,  $T'_i$ ,  $S'$  — начальные усилия,  $E$ ,  $\sigma$ ,  $h$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, толщина оболочки,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр,  $\lambda > 0$  — искомый параметр нагружения. Функции  $k(\varphi)$ ,  $T_i(s, \varphi)$ ,  $S(s, \varphi)$ ,  $s_i(\varphi)$  предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми.

Решение системы (1.1) будем искать в виде

$$w(s, \varphi, \varepsilon) = w_* \exp \{ i \varepsilon^{-1} [q(\varphi - \varphi_0) + 1/2 r(\varphi - \varphi_0)^2] \}$$

$$w_* = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} w_n(s, \xi), \quad \xi = \varepsilon^{-1/2}(\varphi - \varphi_0) \tag{1.2}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots$$

где  $w_n(s, \xi)$  — полиномы по  $\xi$ ,  $\varphi = \varphi_0$  — «наиболее слабая» образующая, в окрестности которой локализуются вмятины,  $q$  и  $r$  — неизвестные числа ( $\text{Im } q = 0, \text{Im } r > 0$ ). Функцию  $\Phi$  ищем в том же виде (1.2).

Подстановка (1.2) в (1.1) приводит к последовательности уравнений [2]:

$$H_0 w_n + F_n(w_j) = 0, F_0 = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots; j < n) \quad (1.3)$$

$$H_0 w_0 = \frac{k^2}{q^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( s^3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} \right) + \frac{q^4}{s^3} w_0 - \lambda_0 \frac{q^2 T_2}{s} w_0$$

В качестве граничных условий рассмотрим условия, при которых на краю оболочки  $s = s_i(\varphi)$  обращаются в нуль обобщенные перемещения  $u_\nu, v_i, w, \gamma_\nu$  или соответствующие им обобщенные усилия  $T_\nu, S_i, Q_\nu, M_\nu$  (здесь  $\nu$  и  $t$  — геодезическая нормаль и касательная к контуру). Возможны 16 вариантов, которые для краткости будем обозначать четырехзначными числами из единиц и нулей [3]. Например, 1111 — жесткая заделка, 0000 — свободный край, 0110 — шарнирная опора ( $T_\nu = v_i = w = M_\nu = 0$ ). Первые две цифры соответствуют тангенциальным условиям. Здесь ограничимся рассмотрением только двух групп условий — группы заделки и группы шарнирного опирания при их различном сочетании на обоих краях  $s = s_i(\varphi)$  оболочки. Если наиболее слабая образующая  $\varphi = \varphi_0$  перпендикулярна краю  $s = s_i(\varphi)$ , т. е.  $s'_i(\varphi_0) = 0$ , то как группа заделки (1111, 1110, 1101, 1100, 1011, 1010), так и группа шарнирной опоры (0111, 0110, 0101, 0100, 0011, 0010) включают по 6 вариантов граничных условий. Если же  $s'_i(\varphi_0) \neq 0$ , то группа заделки (1111, 1110, 1101, 1100) и группа шарнирной опоры (0111, 0110, 0101, 0100, 0011, 0010, 1001, 1000) содержат соответственно по 4 и 8 вариантов [3].

Рассмотрим уравнение (1.3) в нулевом приближении ( $n=0$ ). Порядок этого уравнения позволяет удовлетворить на каждом краю  $s = s_i(\varphi)$  лишь двум граничным условиям, поэтому необходимо провести расщепление граничных условий [4], в результате которого должны быть выделены два главных граничных условия, используемые при решении уравнения (1.3) при  $n=0$ .

Для группы заделки главные условия в нулевом приближении имеют вид [3]:

$$w_0 = dw_0/ds = 0 \quad (1.4)$$

а для группы шарнирной опоры

$$w_0 = \Phi_0 = 0 \quad (1.5)$$

Нулевое приближение (1.3) вместе с главными граничными условиями (1.4) и (или) (1.5) при  $s = s_i(\varphi)$  образуют краевую задачу, из которой можно найти искомую величину  $\lambda_0$ , как минимум функции  $\lambda_0 = \lambda_0(q, \varphi)$ , а также числа  $q_0, \varphi_0$ , доставляющие этот минимум. Из условия совместности первого приближения (1.3), в предположении, что второй дифференциал функции  $\lambda_0$  в точке  $\varphi = \varphi_0, q = q_0$  является положительно определенным, находятся [2]:

$$r = \lambda_{qq}^{-1} [(\lambda_{q\varphi}^2 - \lambda_{qq}\lambda_{\varphi\varphi})^{1/2} - \lambda_{q\varphi}], \quad \lambda_1 = 1/2 (\lambda_{qq}\lambda_{\varphi\varphi} - \lambda_{q\varphi}^2)^{1/2} \quad (1.6)$$

Нижними индексами здесь обозначены производные функции  $\lambda_0$  по переменным  $q, \varphi$ , взятые в точке  $q = q_0, \varphi = \varphi_0$ .

Отметим, что величины  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  не зависят от варианта граничных условий в пределах группы, а  $\lambda_2$  — уже зависит, однако точность системы (1.1) является недостаточной для ее определения.

2. Положим внешнее давление

$$p = \frac{\lambda E h \varepsilon^6}{R} = \lambda E \left( \frac{h}{R} \right)^{5/2} [12(1 - \sigma^2)]^{-3/4} \quad (2.1)$$

тогда  $T_2 = s k^{-1}(\varphi)$ .

Перепишем нулевое приближение (1.3) в виде системы двух уравнений

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{a\Phi_0}{(1-\kappa y)^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - \frac{aw_0}{(1-\kappa y)^3} + a^{1/2}bw_0 = 0 \quad (2.2)$$

$$s = s_2(1 - \kappa y), \quad l = s_2 - s_1, \quad \kappa = ls_2^{-1}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1 \quad (2.3)$$

$$q^4 = a\Psi, \quad \lambda_0 = b\eta, \quad \Psi(\varphi) = ks_2^3 l^{-2}, \quad \eta(\varphi) = k^{1/2} s_2^{-3/2} l^{-1} \quad (2.3)$$

При замене (2.3) края оболочки  $s = s_1(\varphi)$ ,  $s = s_2(\varphi)$  переходят в  $y = 1$  и  $y = 0$ . Если  $\kappa = 0$ , то получаем цилиндрическую оболочку, а  $\kappa = 1$  соответствует замкнутой в вершине конической оболочке. В последнем случае система (2.2) при  $y = 1$  имеет особую точку и граничные условия при  $y = 1$  заменяются условием ограниченности решений.

Система (2.2) является эталонной в том смысле, что она содержит три параметра  $a$ ,  $b$ ,  $\kappa$ , которые при ее решении можно считать независимыми от вида функций  $s_1(\varphi)$ ,  $s_2(\varphi)$ ,  $k(\varphi)$ . В замкнутом виде эта система не интегрируется. С помощью ее численного интегрирования при фиксированных  $a$ ,  $\kappa$  можно найти наименьшее собственное значение  $b = b(a, \kappa)$  краевой задачи (2.2) (при соответствующих граничных условиях на краях  $y = 0, 1$ ).

Необходимые условия экстремума функции  $\lambda_0 = \lambda_0(q, \varphi)$ , определяющие  $\lambda_0^\circ$ , а также числа  $q_0$ ,  $\varphi_0$ , можно записать в виде

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial q} = \frac{\partial b}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi} = b \frac{d\eta}{d\varphi} + \eta \frac{\partial b}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.4)$$

Первое из этих уравнений определяет функции

$$a = a(\kappa), \quad b = b^\circ(\kappa) = b(a(\kappa), \kappa) \quad (2.5)$$

а из второго уравнения (2.4) находим слабую образующую  $\varphi = \varphi_0$  и соответствующие ей значения

$$\lambda_0^\circ = \eta_0 b_0^\circ, \quad q_0^4 = a_0 \Psi_0, \quad b_0^\circ = b^\circ(\kappa_0), \\ a_0 = a(\kappa_0), \quad \kappa_0 = \kappa(\varphi_0), \quad \Psi_0 = \Psi(\varphi_0), \quad \eta_0 = \eta(\varphi_0) \quad (2.6)$$

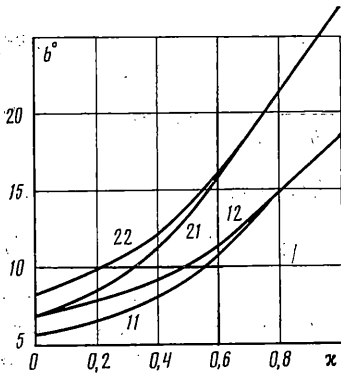
Чтобы воспользоваться формулой (1.6) для определения поправки  $\varepsilon \lambda_1$  к значению  $\lambda_0^\circ$ , нужно найти величины  $\lambda_{qq}$ ,  $\lambda_{q\varphi}$ ,  $\lambda_{\varphi\varphi}$ . В силу (2.3)–(2.5) находим

$$\lambda_{qq} = \eta_0 b_{aa} a_q^2, \quad \lambda_{q\varphi} = \eta_0 b_{aa} a_q (a_\varphi - a_\kappa \kappa_\varphi) \\ \lambda_{\varphi\varphi} = b \eta_{\varphi\varphi} + b_\kappa (2\eta_\varphi \kappa_\varphi + \eta_0 \kappa_{\varphi\varphi}) + \eta_0 b_{aa} a_\varphi (a_\varphi - 2a_\kappa \kappa_\varphi) + \eta_0 b_{\kappa\kappa} \kappa_\varphi^2 \quad (2.7) \\ a_q = 4q_0^3 \Psi_0^{-1}, \quad a_\varphi = -a_0 \Psi_\varphi \cdot \Psi_0^{-1}$$

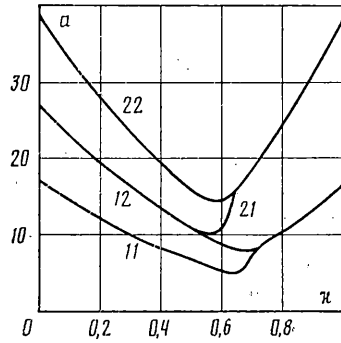
Здесь нижние индексы означают дифференцирование по соответствующей переменной при  $q = q_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ . При выводе формул (2.7) использовано соотношение  $b_{a\kappa} = -b_{aa} a_\kappa$ , получающееся дифференцированием по  $\kappa$  первого из уравнений (2.4).

Для вычислений по формулам (2.7) необходимо знать функции  $b^\circ(\kappa)$ ,  $a(\kappa)$ ,  $b_\kappa(\kappa)$ ,  $a_\kappa(\kappa)$ ,  $b_{aa}(\kappa)$ ,  $b_{\kappa\kappa}(\kappa)$ , которые определяются в результате численного решения системы уравнений (2.2) с соответствующими граничными условиями. Численное интегрирование системы (2.2) велось методом Рунге – Кутты с промежуточной ортогонализацией. На фиг. 1–4 приведены графики функций  $b^\circ$ ,  $a$ ,  $b_{aa}$ ,  $b_{\kappa\kappa}$  для четырех вариантов граничных условий: шарнир – шарнир (1), шарнир – заделка (2), заделка – шарнир (3) и заделка – заделка (4). Первым здесь названо закрепление широкого края оболочки. Функции  $b_\kappa$  и  $a_\kappa$  могут быть приближенно найдены путем численного дифференцирования кривых  $b^\circ$  и  $a$ , показанных на фиг. 1, 2.

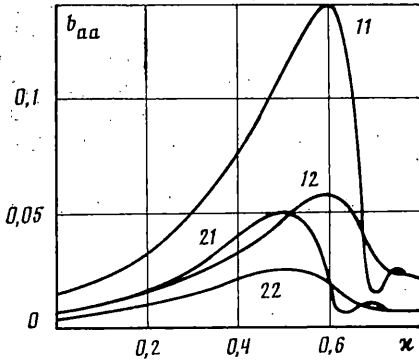
Как и следовало ожидать, при малых  $\kappa$  кривые 2 и 3 на фиг. 1 и 2 сближаются, ибо для оболочки, близкой к цилиндрической, безразлично



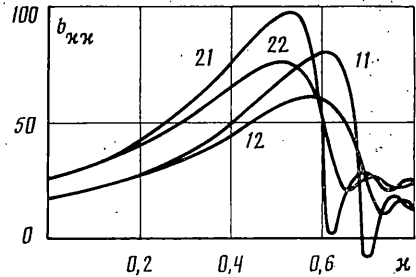
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

какой из торцов закреплять жестко, а какой шарнирно. Наоборот, при  $\kappa \sim 1$  попарно сближаются кривые 1, 2 и 3, 4, ибо при приближении к вершине конуса жесткость оболочки возрастает и способ закрепления узкого края становится несущественным.

Система (2.2) при  $y = \kappa^{-1}$  имеет существенно особую точку. Если  $\kappa$  близко к 1, особая точка оказывается вблизи крайней точки  $y = 1$ , что сказывается на поведении кривых на фиг. 1—4. Особенно ясно это проявляется на фиг. 3 и 4, так как при дифференцировании амплитуда осцилляций возрастает.

3. Рассмотрим для примера косоусеченную круговую коническую оболочку с углом при вершине  $2\alpha$  (см. фиг. 5). Верхнее основание наклонено под углом  $\beta$  к нижнему. В качестве характерного размера  $R$  возьмем радиус нижнего основания. Тогда

$$k = \operatorname{ctg} \alpha, \quad s_2 = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad l(\varphi) = s_2 \left[ 1 - \frac{(1+c)(1-l_0 \sin \alpha)}{1+c \cos(\varphi/\sin \alpha)} \right]$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \sin \alpha, \quad \kappa = l \sin \alpha, \quad c = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < 1$$

$$b^*(\kappa) = b^0(\kappa)/\kappa, \quad \Psi = \cos \alpha / (l^2 \sin^4 \alpha), \quad \eta = (\cos \alpha)^{3/2} / l \quad (3.1)$$

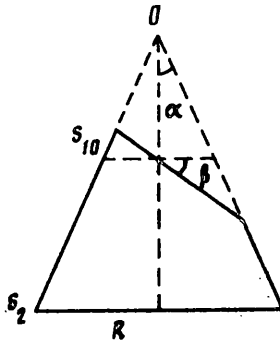
$$\lambda_0 = \sin \alpha (\cos \alpha)^{3/2} b^*(\kappa)$$

где  $l_0 = l(0)$  соответствует наиболее длинной образующей.

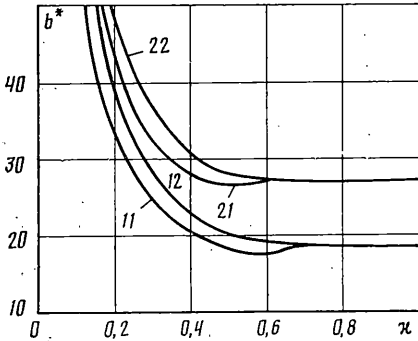
Из последней формулы, с учетом (2.4), следует, что на наиболее слабой образующей функция  $b^*$  достигает наименьшего значения. Функция  $b^*(\kappa)$  показана на фиг. 6.

В задаче об устойчивости круговой цилиндрической оболочки с косым краем под действием равномерного внешнего давления (см. [2]) наиболее длинная образующая оказывалась и наиболее слабой. Как следует из формулы (3.1) и фиг. 6, в случае конической оболочки при  $\kappa_m \leq 0,5$  наиболее длинная образующая также является наиболее слабой. Здесь через  $\kappa_m$  обозначено значение  $\kappa$ , соответствующее наиболее длинной образующей.

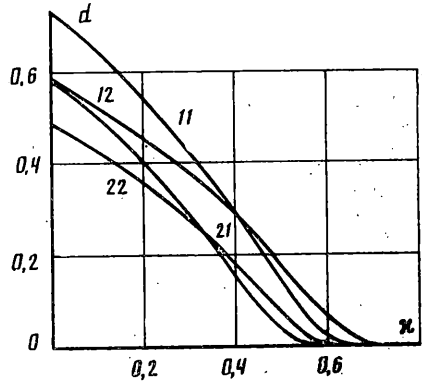
При  $\kappa > 0,5$  зависимость  $b^*$  от  $\kappa$  оказывается более сложной.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Если узкий край оболочки закреплен жестко (см. кривые 4 и 2 на фиг. 6), функция  $b^*(\kappa)$  является монотонной и при  $\kappa \rightarrow 1$  (полный конус) стремится к пределу  $b^*(1) = 26,75$  для жесткой заделки широкого слоя (4) и  $b^*(1) = 18,30$  в случае его шарнирного закрепления (2). При этом отличие  $b^*(\kappa)$  от  $b^*(1)$  составляет менее 1% уже при  $\kappa > \kappa_1$ , где  $\kappa_1 = 0,55$  в случае 4 и  $\kappa_1 = 0,63$  в случае 2. Поэтому, если  $\kappa_m > \kappa_1$ , в качестве расчетного значения  $\lambda$  следует брать  $\lambda = \lambda_0$  при  $b^* = b^*(1)$ . Поправочное слагаемое  $\varepsilon \lambda_1$  (см. (1.2)) удерживать не следует, ибо оно учитывает локальный характер форм потери устойчивости, а близость  $b^*(\kappa)$  к постоянной противоречит предположению об этом локальном характере.

Если узкий край оболочки закреплен шарнирно, то функция  $b^*(\kappa)$  при  $\kappa \rightarrow 1$  имеет бесконечное число минимумов, из которых лишь первый при  $\kappa = \kappa_0$  заметен на фиг. 6 (см. кривые 3 и 1). Имеем  $\kappa_0 = 0,53$ ,  $b^*(\kappa_0) = 26,27$  в случае 3 и  $\kappa_0 = 0,59$ ,  $b^*(\kappa_0) = 17,85$  в случае 1. При  $\kappa_m > \kappa_0$  в качестве расчетного значения  $\lambda$  берем  $\lambda = \lambda_0$  при  $b^* = b^*(\kappa_0)$ , а слагаемое  $\varepsilon \lambda_1$  отбрасываем по той же причине, что и выше.

Вернемся к случаю  $\kappa_m < 0,5$  и с использованием формул (1.2), (1.6), (2.1), (2.7) представим критическое давление в виде

$$p = E \left( \frac{h}{R} \right)^{3/2} [12(1-\sigma^2)]^{-1/2} \lambda_0^\circ \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{d(\kappa_0) \operatorname{tg} \beta}{(1+c)(\cos \alpha)^{3/2}} \right)^{1/2} + O(\varepsilon^2) \right] \quad (3.2)$$

$$\kappa_0 = l_0 \sin \alpha, \quad \lambda_0^\circ = \frac{b^\circ(\kappa_0)}{l_0} (\cos \alpha)^{3/2} \quad (3.3)$$

$$d = \frac{4a^{3/2} b_{aa}(1-\kappa)}{b^\circ} \left( 1 - \frac{\kappa b_\kappa}{b^\circ} \right)$$

Для рассматриваемых вариантов граничных условий функция  $d(\kappa)$  приведена на фиг. 7. При  $\kappa > 0,5$  эта функция приближается к нулю, что находится в соответствии с ранее высказанным предложением отбрасывать слагаемое  $\varepsilon \lambda_1$ .

При  $\alpha = \kappa_0 = 0$  формула (3.2) пригодна для косо срезанной цилиндрической оболочки, а в случае, когда оба края шарнирно оперты, совпадает с формулой, полученной в [2].

Для круговой конической оболочки с прямыми краями в (3.2) следует считать  $d=0$ , а число волн в окружном направлении равно

$$n = \frac{q \sin \alpha}{\varepsilon} = \left( \frac{a_0^2 R^2 h^2 \cos^2 \alpha}{12(1-\sigma^2) l^4} \right)^{1/3} \quad (3.4)$$

где  $a(\kappa)$  приведено на фиг. 2.

В заключение отметим, что приведенные на фиг. 1–6 графики, а также формулы (1.6), (2.4)–(2.7) пригодны [5] для расчета на устойчивость конических оболочек, у которых величины  $h$ ,  $E$ ,  $\sigma$  и  $p$  являются функциями круговой координаты  $\varphi$ . В этом случае нулевое приближение задачи (1.3) также имеет вид (2.2), однако теперь

$$p = p_\lambda f(\varphi), \quad p_\lambda = \lambda E^\circ (h^\circ/R)^{5/2} [12(1-\sigma^{\circ 2})]^{-3/4}$$

$$\Psi(\varphi) = \frac{g^{1/2} k s_2^3}{h^* l^2}, \quad \eta(\varphi) = \frac{k^{3/2} h^{*2} E^*}{s_2^{3/2} f g^{1/2} l}, \quad \varepsilon^8 = \frac{h^{\circ 2}}{12R^2(1-\sigma^{\circ 2})}$$

$$h^*(\varphi) = \frac{h(\varphi)}{h^\circ}, \quad E^*(\varphi) = \frac{E(\varphi)}{E^\circ}, \quad g(\varphi) = \frac{1-\sigma^2(\varphi)}{1-\sigma^{\circ 2}}$$

являются безразмерными функциями,  $h^\circ$ ,  $E^\circ$ ,  $\sigma^\circ$  – характерные значения толщины, модуля Юнга, коэффициента Пуассона, а  $p_\lambda$  – амплитуда критического давления.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Товстик П. Е. Двумерные задачи устойчивости и колебаний оболочек нулевой гауссовой кривизны // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271, № 1. С. 69–71.
2. Товстик П. Е. Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 815–822.
3. Товстик П. Е. Полубезмоментные формы потери устойчивости цилиндрических и конических оболочек // Тр. 14-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. Т. 2. С. 504–506.
4. Черных К. Ф. Простой краевой эффект и расчленение граничных условий в линейной теории тонких оболочек // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 89–98.
5. Михасёв Г. И. Локальная потеря устойчивости оболочек нулевой кривизны с переменными толщиной и модулем упругости // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. 1984. № 7. С. 104–106.

Витебск, Ленинград

Поступила в редакцию  
22.IV.1986