

УДК 539.3:534.1

© 1990 г.

А. М. НАЗАРЕНКО, В. И. ОСТРИК

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ТОНКИМ КРИВОЛИНЕЙНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

При расчете несущих элементов тонкостенных конструкций представляет интерес исследование колебаний пластин с различного рода неоднородностями. В работе [1] рассматриваются свободные колебания прямоугольной пластинки с прямолинейными трещинами. В [2] приводится решение задачи о колебаниях прямоугольной пластинки с тонким жестким прямолинейным включением, к которому приложена гармоническая во времени сила. В настоящей работе предлагается метод, позволяющий исследовать вынужденные колебания прямоугольных пластинок с криволинейными трещинами и включениями.

1. Рассмотрим действие равномерно распределенной нагрузки $qe^{-i\omega t}$ на шарнирно опертую прямоугольную пластинку ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$), в которую впаило тонкое жесткое криволинейное включение L (массой включения пренебрегаем).

Амплитуда прогиба $W(x, y)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\Delta^2 W - \gamma^4 W = q/D, \quad \gamma^4 = \rho h \omega^2 / D \quad (1.1)$$

где Δ — оператор Лапласа, ω — частота колебаний, ρ — плотность, h — толщина, D — цилиндрическая жесткость пластинки.

Граничные условия на контуре шарнирно опертой пластинки имеют вид

$$W = \partial^2 W / \partial x^2 = 0 \quad (x=0, a; 0 \leq y \leq b), \quad W = \partial^2 W / \partial y^2 = 0 \quad (y=0, b; 0 \leq x \leq a) \quad (1.2)$$

Условие на контуре включения L следующее

$$W|_L = A + Bx + Cy \quad (1.3)$$

Здесь постоянные A, B, C неизвестны и характеризуют перемещение включения как абсолютно жесткого тела.

Решение поставленной краевой задачи должно обеспечивать непрерывность амплитуд прогибов и углов поворота на L ; амплитуды изгибающих моментов и обобщенных поперечных сил, вообще говоря, терпят разрыв на L .

В дальнейшем используется методика, предложенная в [3] и основанная на построении системы сингулярных интегральных уравнений по контуру включения относительно неизвестных скачков. Ядра этих уравнений подбираются таким образом, что условия (1.2) на границе прямоугольной пластинки выполняются автоматически.

2. Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$W(x, y) = - \int_L \left[p_1(s) \frac{\partial G}{\partial s} + p_2(s) \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds + W_*(x, y) \quad (2.1)$$

$$p_m(s) = \frac{h_m(s)}{(s(l-s))^{1/2}}$$

$$W_*(x, y) = \frac{q}{2\gamma^4 D} \left(\operatorname{ch} \gamma x - \operatorname{th} \frac{\gamma a}{2} \operatorname{sh} \gamma x + \cos \gamma x + \operatorname{tg} \frac{\gamma a}{2} \sin \gamma x - 2 \right) -$$

$$-\frac{2q}{a\gamma^2 D} \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{1}{\alpha_k} \left[\frac{\operatorname{ch} \lambda_k (y-1/2b)}{\lambda_k^2 \operatorname{ch} \lambda_k 1/2b} - \frac{\operatorname{ch} \mu_k (y-1/2b)}{\mu_k^2 \operatorname{ch} \mu_k 1/2b} \right] \sin \alpha_k x$$

$$\alpha_k = \pi k/a, \lambda_k = (\alpha_k^2 - \gamma^2)^{1/2}, \mu_k = (\alpha_k^2 + \gamma^2)^{1/2}, m=1, 2, k=1, 2, \dots$$

Здесь $p_m(s)$ — неизвестные плотности, $h_m(s)$ — регулярные функции ($m=1, 2$), s — дуговая координата, l — длина дуги L , n — нормаль к контуре L в точке (ξ, η) ; $G(x, y, \xi, \eta)$ — функция Грина; функция $W_*(x, y)$ — амплитуда прогиба прямоугольной пластинки без включения является обобщением статического решения Леви [4] на случай динамики.

Функция Грина $G(x, y, \xi, \eta)$ представляет собой амплитуду прогиба свободно опертой пластинки при действии поперечной сосредоточенной силы с амплитудой $q = \delta(x - \xi, y - \eta)$ (дельта-функция Дирака), приложенной в точке (ξ, η) . При построении функции G автоматически удовлетворялись условия на сторонах пластинки $x=0$ и $x=a$. С этой целью решение разыскивалось в виде

$$G(x, y, \xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y, \eta) \sin \alpha_k x \sin \alpha_k \xi \quad (2.2)$$

Разлагая в соответствующий ряд Фурье функцию $\delta(x - \xi, y - \eta)$ и подставляя функцию (2.2) в дифференциальное уравнение колебаний пластинки, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $f_k(y, \eta)$:

$$\frac{d^4}{dy^4} f_k - 2\alpha_k^2 \frac{d^2}{dy^2} f_k + \lambda_k^2 \mu_k^2 f_k = \frac{2}{aD} \delta(y - \eta) \quad (2.3)$$

С помощью преобразования Фурье получено фундаментальное решение $g_k(y - \eta)$ этого уравнения:

$$g_k(y - \eta) = \frac{1}{2a\gamma^2 D} \left(\frac{1}{\lambda_k} e^{-\lambda_k |y - \eta|} - \frac{1}{\mu_k} e^{-\mu_k |y - \eta|} \right) \quad (2.4)$$

Положим $f_k(y, \eta) = g_k(y - \eta) + \psi_k(y, \eta)$. Функция $\psi_k(y, \eta)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.3). Выписав общее решение однородного уравнения и удовлетворяя граничным условиям на сторонах пластинки $y=0$ и $y=b$, получаем

$$\psi_k(y, \eta) = \frac{1}{2a\gamma^2 D} \left[\frac{e^{-\lambda_k b} \operatorname{ch} \lambda_k (y - \eta) - \operatorname{ch} \lambda_k (y + \eta - b)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k b} - \frac{e^{-\mu_k b} \operatorname{ch} \mu_k (y - \eta) - \operatorname{ch} \mu_k (y + \eta - b)}{\mu_k \operatorname{sh} \mu_k b} \right] \quad (2.5)$$

В качестве главного члена функции Грина возьмем периодическое по x фундаментальное решение G_0 уравнения (1.1), соответствующее статическому случаю ($\gamma=0$). Имеем

$$G = G_0 + G_1 \quad (2.6)$$

$$G_0(x - \xi, y - \eta) = \frac{1}{2aD} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^3} e^{-\alpha_k |y - \eta|} (1 + \alpha_k |y - \eta|) \sin(\alpha_k x) \sin(\alpha_k \xi)$$

Функция G_0 представляет собой прогиб бесконечной пластинки при действии системы поперечных сосредоточенных сил, приложенных в точках $(\xi + ma, \eta)$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Можно показать, что интегральное представление (2.1) обеспечивает непрерывность амплитуд прогибов и углов поворота при переходе через контур L , скачки на L амплитуд изгибающих моментов $[M_n] = p_2(s)$ и обобщенных поперечных сил $[N_n] = p_1'(s)$, выполнение условий шарнир-

ного опирания на контуре прямоугольной пластинки. Кроме того, автоматически также удовлетворяется условие равенства нулю амплитуды главного вектора сил, действующих на включение:

$$F = \int_L [N_n] ds = \int_L \left[\frac{h_1(s)}{(s(l-s))^{1/2}} \right]' ds = 0 \quad (2.7)$$

Здесь последний расходящийся интеграл понимается в регуляризованном смысле [2]. Пользуясь представлением (2.1), можно получить также условия равенства нулю амплитуд главных моментов на включении. Они имеют вид

$$\int_L p_1 dx + p_2 dy = 0, \quad \int_L p_1 dy - p_2 dx = 0 \quad (2.8)$$

С целью сведения задачи к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно функций $p_1(s)$ и $p_2(s)$ граничное условие (1.3) запишем в виде двух граничных условий

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_L = 0, \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_L = 0 \quad (2.9)$$

Подставляя $W(x, y)$ (2.1) в граничные условия (2.9) и используя формулы [5]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} e^{-\alpha_k |y-\eta|} \frac{\sin \alpha_k x}{\cos \alpha_k \xi} &= -\frac{a}{4\pi} \ln \sin \frac{\pi(\xi-z)}{2a} \sin \frac{\pi(\xi-\bar{z})}{2a} \pm \\ &\pm \frac{a}{4\pi} \ln \sin \frac{\pi(\xi+\bar{z})}{2a} \sin \frac{\pi(\xi+z)}{2a} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{1}{2} |y-\eta| - \frac{a}{\pi} \ln 2 \right) \\ \xi &= \xi + i\eta, \quad z = x + iy \end{aligned} \quad (2.10)$$

приходим к системе двух сингулярных интегральных уравнений (суммирование по k):

$$\int_L [h_{km}(s_0, s) + H_{km}(s_0, s)] p_k(s) ds = T_m(s_0) \quad (m, k=1, 2) \quad (2.11)$$

$$h_{11} = h_{22} = \cos(\varphi_0 - \alpha) / 2\pi r, \quad h_{21} = h_{12} = 0$$

$$H_{11} = (K_1 + K_4) \cos(\varphi + \varphi_0) - (K_2 + K_3) \cos(\varphi - \varphi_0) + K_5 \sin(\varphi - \varphi_0) - K_6 \sin(\varphi + \varphi_0) - (A_1 \cos \varphi + A_5 \sin \varphi) \cos \varphi_0 - (A_3 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi) \sin \varphi_0 - \cos(\varphi_0 - \alpha) / 2\pi r$$

$$H_{21} = (K_1 + K_4) \sin(\varphi + \varphi_0) - (K_2 + K_3) \sin(\varphi - \varphi_0) - K_5 \cos(\varphi - \varphi_0) + K_6 \cos(\varphi + \varphi_0) - (A_5 \cos \varphi - A_1 \sin \varphi) \cos \varphi_0 + (A_2 \cos \varphi - A_3 \sin \varphi) \sin \varphi_0$$

$$H_{12} = -(K_1 + K_3) \sin(\varphi - \varphi_0) - (K_2 + K_4) \sin(\varphi + \varphi_0) - K_5 \cos(\varphi - \varphi_0) - K_6 \cos(\varphi + \varphi_0) + K_7 \sin \varphi \sin \varphi_0 - (A_3 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi) \cos \varphi_0 - (A_6 \cos \varphi + A_4 \sin \varphi) \sin \varphi_0$$

$$H_{22} = (K_1 + K_3) \cos(\varphi - \varphi_0) + (K_2 + K_4) \cos(\varphi + \varphi_0) - K_5 \sin(\varphi - \varphi_0) - K_6 \sin(\varphi + \varphi_0) - K_7 \cos \varphi \sin \varphi_0 + (A_2 \cos \varphi - A_3 \sin \varphi) \cos \varphi_0 + (A_4 \cos \varphi - A_6 \sin \varphi) \sin \varphi_0 - \cos(\varphi_0 - \alpha) / 2\pi r$$

$$K_{1,2} = \frac{r_{4,6}}{4a(r_3 - r_1)}, \quad K_{3,4} = \frac{\pi r_{4,6}(\eta - \eta_0)}{4a^2(r_3 - r_1)^2}, \quad K_{5,6} = \frac{\pi(1 - r_1 r_{3,5})(\eta - \eta_0)}{4a^2(r_{3,5} - r_1)^2}$$

$$K_7 = \frac{(r_5 - r_2)r_2}{(r_3 - r_1)^2(r_5 - r_1)^2}, \quad r_1 = \frac{\operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} a}(\eta - \eta_0), \quad r_{3,5} = \frac{\cos \pi}{\sin a}(\xi \pm \xi_0)$$

$$A_1 = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_j^3}{\gamma^2} \left[\frac{a_{1j} - c_{1j} + e_{1j}}{\lambda_j} - \frac{a_{2j} - c_{2j} + e_{2j}}{\mu_j} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -(1+\alpha_j|\eta-\eta_0|)e_{0j} \cos \alpha_j \xi \sin \alpha_j \xi_0 \\
A_2 = & \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_j}{\gamma^2} [\lambda_j (a_{1j} + c_{1j} + e_{1j}) - \mu_j (a_{2j} + c_{2j} + e_{2j})] + \right. \\
& \left. + (1-\alpha_j|\eta-\eta_0|)e_{0j} \right\} \sin \alpha_j \xi \cos \alpha_j \xi_0 \\
A_3 = & -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_j^2}{\gamma^2} [b_{1j} - d_{1j} - b_{2j} + d_{2j} + \text{sign}(\eta-\eta_0)(e_{1j} - e_{2j})] - \right. \\
& \left. - \alpha_j(\eta-\eta_0)e_{0j} \right\} \cos \alpha_j \xi \cos \alpha_j \xi_0 \\
A_4 = & \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\gamma^2} [\lambda_j^2 (b_{1j} + d_{1j}) - \mu_j^2 (b_{2j} + d_{2j}) + \text{sign}(\eta-\eta_0)(\lambda_j^2 e_{1j} - \mu_j^2 e_{2j})] + \right. \\
& \left. + [\alpha_j(\eta-\eta_0) - 2 \text{sign}(\eta-\eta_0)]e_{0j} \right\} \sin \alpha_j \xi \sin \alpha_j \xi_0 \\
A_5 = & -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_j^2}{\gamma^2} [b_{1j} + d_{1j} - b_{2j} - d_{2j} + \text{sign}(\eta-\eta_0)(e_{1j} - e_{2j})] - \alpha_j(\eta-\eta_0)e_{0j} \right\} \times \\
& \times \sin \alpha_j \xi \sin \alpha_j \xi_0, \quad A_6 = -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_j}{\gamma^2} [\lambda_j (a_{1j} - c_{1j} + e_{1j}) - \mu_j (a_{2j} - c_{2j} + e_{2j})] + \right. \\
& \left. + (1-\alpha_j|\eta-\eta_0|)e_{0j} \right\} \cos \alpha_j \xi \sin \alpha_j \xi_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_{1j}}{-b_{1j}} &= e^{-\lambda_j b} \frac{\text{ch}}{\text{sh}} \lambda_j (\eta - \eta_0) / \text{sh } \lambda_j b, & \frac{a_{2j}}{-b_{2j}} &= e^{-\mu_j b} \frac{\text{ch}}{\text{sh}} \mu_j (\eta - \eta_0) / \text{sh } \mu_j b \\
\frac{c_{1j}}{d_{1j}} &= \frac{\text{ch}}{\text{sh}} \lambda_j (\eta + \eta_0 - b) / \text{sh } \lambda_j b, & \frac{c_{2j}}{d_{2j}} &= \frac{\text{ch}}{\text{sh}} \mu_j (\eta + \eta_0 - b) / \text{sh } \mu_j b \\
e_{0j} &= e^{-\alpha_j |\eta - \eta_0|}, & e_{1j} &= e^{-\lambda_j |\eta - \eta_0|}, & e_{2j} &= e^{-\mu_j |\eta - \eta_0|}
\end{aligned}$$

$$T_1 = B_1 \cos \varphi_0 + B_2 \sin \varphi_0, \quad T_2 = B_2 \cos \varphi_0 + B_3 \sin \varphi_0$$

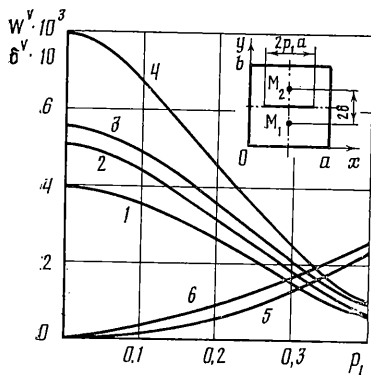
$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{2q}{\gamma^2} \left(\text{ch } \gamma \xi_0 - \text{th } \frac{\gamma a}{2} \text{sh } \gamma \xi_0 - \cos \gamma \xi_0 - \text{tg } \frac{\gamma a}{2} \sin \gamma \xi_0 \right) + \\
&+ \frac{8q}{\gamma^2 a} \sum_{j=1,3,5,\dots} \alpha_j \left(\frac{f_{1j}}{\lambda_j} - \frac{f_{2j}}{\mu_j} \right) \sin \alpha_j \xi_0, \quad B_2 = -\frac{8q}{\gamma^2 a} \sum_{j=1,3,5,\dots} (g_{1j} - g_{2j}) \cos \alpha_j \xi_0 \\
B_3 &= -\frac{8q}{\gamma^2 a} \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{1}{\alpha_j} (\lambda_j f_{1j} - \mu_j f_{2j}) \sin \alpha_j \xi_0,
\end{aligned}$$

$$\frac{f_{1j}}{g_{1j}} = \frac{\text{ch}}{\text{sh}} \lambda_j \left(\eta_0 - \frac{b}{2} \right) / \left(\lambda_j \text{ch } \frac{\lambda_j b}{2} \right), \quad \frac{f_{2j}}{g_{2j}} = \frac{\text{ch}}{\text{sh}} \mu_j \left(\eta_0 - \frac{b}{2} \right) / \left(\mu_j \text{ch } \frac{\mu_j b}{2} \right)$$

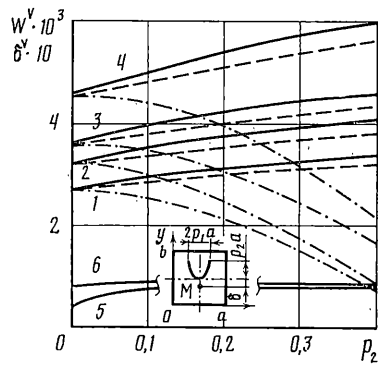
$$\begin{aligned}
\xi &= \xi + i\eta \in L, \quad \xi_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L, \quad \xi_0 - \xi = r e^{i\alpha} \\
e^{i\varphi} &= d\xi/ds, \quad e^{i\varphi_0} = d\xi_0/ds_0, \quad j=1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Здесь h_{hh} — сингулярные, H_{km} — регулярные ядра. Для однозначной разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений (2.11) к ней необходимо присовокупить дополнительные условия (2.8).

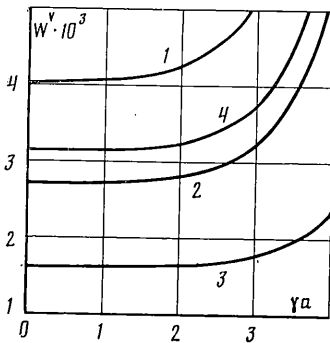
3. При численной реализации принималось, что включение L представляет собой дугу параболы с вершиной в центре прямоугольника, параметрическое уравнение которой имеет вид $\xi/a = 0,5 + p_1\beta$, $\eta/a = 0,5b/a + p_2\beta^2$, $-1 \leq \beta \leq 1$. Следуя схеме [6], интегральные уравнения (2.11) сводились к системе линейных алгебраических уравне-



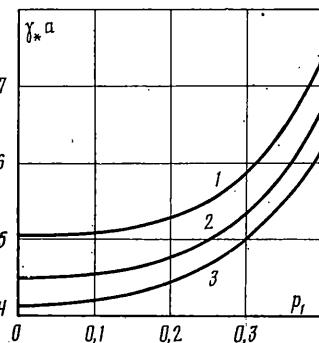
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ний относительно значений функций $\Omega_k(\beta)$ ($p_k(s) = \Omega_k(\beta)/(1-\beta^2)^{1/2}$, $k=1, 2$) в чебышевских узлах первого рода. Уравнения (2.11) при этом удовлетворялись в чебышевских узлах второго рода. В полученной системе линейных алгебраических уравнений разность числа неизвестных и числа уравнений равна двум. Недостающие два уравнения получены из условий (2.8).

На ЭВМ вычислялись амплитуды прогибов пластинки в зависимости от геометрических характеристик включения p_1 и p_2 , безразмерного волнового числа γa . Расчеты показали, что максимальные амплитуды прогибов пластинки для заданной конфигурации параболического включения наблюдаются на его оси симметрии в точке M (фиг. 2). В случае прямолинейного включения ($p_2=0$) максимальным амплитудам прогибов соответствуют две точки M_1, M_2 , симметричные относительно включения (фиг. 1). С целью оценки динамических эффектов в пластинке с включением проводилось сравнение статических и динамических решений (решение статической задачи получалось из решения динамической задачи предельным переходом при $\gamma \rightarrow 0$). Кроме того, для пластинки с прямолинейным включением рассчитывалось изменение критических волновых чисел, соответствующих первой собственной частоте пластинки, в зависимости от длины включения.

На фиг. 1, 2 показано изменение безразмерных величин $W^v = WD/(qa^4)$ (кривые 1-4) и $\delta^v = \delta/b$ (кривые 5, 6) в зависимости от параметра p_1 (фиг. 1) и параметра кривизны p_2 (фиг. 2, $p_1=0,2$). Кривые 1, 2, 5 соответствуют квадратной пластинке ($b/a=1$), кривые 3, 4, 6 - прямоугольной пластинке ($b/a=1,2$). Сплошные линии отвечают максимальным амплитудам прогибов пластинки. На фиг. 2 пунктирными линиями изображены амплитуды прогибов в вершине, штрихпунктирными - в концах параболического включения. Кривые 1, 3 относятся к статическому случаю ($\gamma a=0$), кривые 2, 4 - к динамическому ($\gamma a=3$). Оказалось, что координаты точек, в которых наблюдаются максимальные амплитуды прогибов, не зависят от частоты колебаний пластинки. Кривизна включения на положение этих точек оказывает незначительное влияние. С увеличением длины прямолинейного включения смещение δ точек M_1, M_2 от центра пластинки возрастает от $\delta=0$ до $\delta=\delta_{\max}$. Здесь $\delta=0$ соответствует пластинке без включения. При $\delta=\delta_{\max}$ ($p_1=0,5$) прямолинейное включение перекрывает пластинку. В этом случае рассчитываемое значение δ_{\max} совпадает с известным [4] для пластинки, у которой одна сторона закреплена, остальные - свободно оперты. Расчеты показали также, что с удлинением прямолинейного включения амплитуды прогибов пластинки существенно уменьшаются. Это объясняется увеличением жесткости системы за счет включения.

На фиг. 3 показаны результаты расчетов максимальных амплитуд прогибов пластинки в зависимости от безразмерного волнового числа γa для квадратной пластинки. Кривая 1 соответствует пластинке без включения ($p_1=0$), кривые 2 и 3 - пластинке с прямолинейным включением ($p_1=0,2$ и $p_1=0,3$), кривая 4 - параболическому включению ($p_1=0,2, p_2=0,2$). Видно, что при $0 \leq \gamma a \leq 2$ амплитуды прогибов воз-

растают незначительно. При $2 \leq \gamma a \leq \gamma_* a$ происходит существенное увеличение амплитуд прогибов. Здесь γ_* — критическое волновое число, соответствующее первой собственной частоте пластинки. Наличие включения значительно влияет на величину параметра $\gamma_* a$.

На фиг. 4 отражена зависимость $\gamma_* a$ от длины прямолинейного включения. Кривые 1, 2 и 3 приведены для прямоугольной пластинки с параметрами $b/a=0,8$; 1 и 1,2 соответственно. С увеличением длины включения критическое значение волнового числа увеличивается от γ_1^* до γ_2^* . Это связано с увеличением жесткости системы. Рассчитываемые значения γ_1^* при $p_1=0$ (пластинка без включения) совпадают с известными [7]. Значения γ_2^* соответствуют пластинке, заземленной по одной стороне и свободно опертой по остальным [8].

Следует отметить, что предлагаемая схема расчета оказывается очень эффективной. Для достижения точности в 0,1% достаточно взять число узлов разбиения контура включения $N=10$, при этом на расчет одного варианта затрачивается 30–40 с на ЭВМ ЕС-1022.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hirano Y., Okazaki K. Vibration of cracked rectangular plates // Bull. JSME. 1980. V. 23. № 179. P. 732–740.
2. Климык Ю. С., Онищук О. В., Попов Г. Я. Задачи о колебаниях и устойчивости прямоугольной пластинки с тонким включением // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 137–143.
3. Назаренко А. М., Фильштинский Л. А. Взаимодействие волн напряжений с жесткими вставками в полупространстве (плоская деформация) // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 95–102.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
6. Erdogan F. E., Gupta G. D., Cook T. S. The numerical solutions of singular integral equations // Mechanics of Fract. Leyden: Int. Publ. 1973. V. 1. P. 368–425.
7. Огибалов П. М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. М.: Изд-во МГУ, 1958. 389 с.
8. Мазортых Ж. К. Колебания двухпролетной панели в пустоте // Инж. ж. 1961. Т. 1. Вып. 3. С. 102–108.

Сумы

Поступила в редакцию
16.II.1988