МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1990

УДК 539.3:534.1

Н. Г. СУТЫРИНА, Г. Н. ЧЕРНЫШЕВ

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ БАЛКАМИ

Рассмотрены вынужденные колебания балок и пластин с жестко присоединенными к ним консольными балками, дискретно расположенными в заранее заданных точках или непрерывно распределенными по всей поверхности по определенному закону. Построены дифференциальные уравнения колебаний таких систем, составлены программы численного интегрирования полученных уравнений. Проведено исследование влияния присоединенных балок на колебания балки и пластины; получено заметное снижение резонансных пиков этих колебаний в широком частотном диапазоне.

Известно, что использование динамических гасителей для уменьшения амплитуды резонансных колебаний упругих систем оказывается эффективным при удачном подборе упругих, инерционных и демпфирующих свойств гасителя (см., например, [1–5]). Существует много публикаций, посвященных динамическому гашению колебаний, однако, как правило, они касаются конструкций, приводимых к системе с одной степенью свободы, и используют один гаситель, и, кроме того, применяют его для снижения уровня колебаний конструкции в окрестности одной собственной частоты.

В данной работе рассматривается вопрос о гашении поперечных колебаний балки и пластины при помощи системы заданным образом присоединенных к ним консольных балок, настроенных на собственные частоты этих колебаний. Наличие у балок бесконечного спектра собственных частот допускает их использование для снижения резонансных вибраций пластины в широкой области частот, а балки – во всем частотном диапазоне.

1. Колебания балки с гасителями. Рассмотрим вначале совместные поперечные колебания балки, возбуждаемой распределенной гармонической нагрузкой плотности $pe^{i\omega t}$, и системы консольных гасителей, присоединенных к ней в точках $x=x_k$ $(k=1,\dots N)$, где x – координата вдоль балки. Эта система характеризуется параметрами E_k, I_k, ρ_k, l_k, представляющими собой соответственно модуль упругости, момент инерции поперечного сечения, удельную массу и длину консоли, присоединенной в точке x_k, числом консолей N и коэффициентом трения в присоединенной системе γ (трение описывается на основе теории комплексного модуля упругости [6]: $E_k=E_k(1+i\gamma)$. Предположим, что консоли крепятся к балке таким образом, что в точках крепления $x=x_k$ выполняются условия равенства перемещений и углов поворота балки и консолей

$$v(x,\ l_k)=u(x),\ v_z(x,\ l_k)=u_x(x),\ v_{zz}(x,\ 0)=0,\ v_{zzz}(x,\ 0)=0 \qquad (1.1)$$

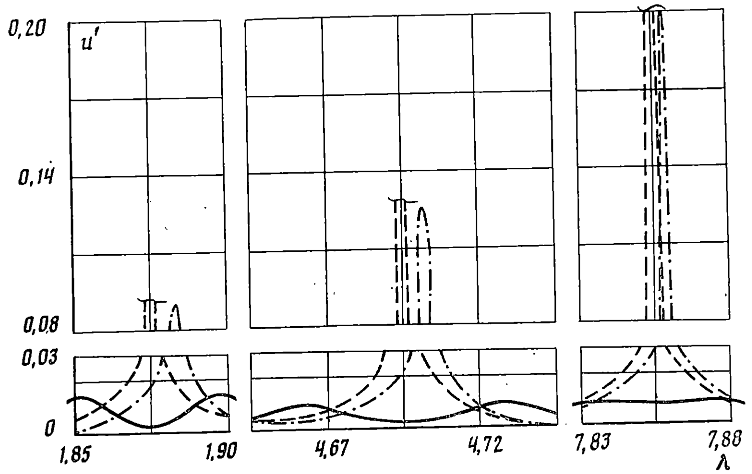
где $u(x)$, $v(x,\ z)$ – прогибы балки и консоли, присоединенной в точке x, а z – координата вдоль консолей.

Наличие присоединенной системы учтем непосредственно в уравнении колебаний балки в виде дополнительных сосредоточенных сил и моментов, действующих на нее со стороны консолей в точках их крепления

$$EIu_{xxxx}-\rho\omega^2u=p+\sum_{k=1}^{N}E_kI_kv_{zzz}(x_k,\ l_k)\,\delta(x-x_k)+\sum_{k=1}^{N}E_kI_kv_{zz}(x_k,\ l_k)\,\delta_x(x-x_k) \qquad (1.2)$$

Здесь E, I, ρ – соответственно модуль упругости, момент инерции поперечного сечения и удельная масса балки, $\delta(x)$ – функция Дирака.

В случае, когда присоединенная система состоит из большого числа гасителей, для упрощения решения задачи перейдем от дискретного рас-



Фиг. 1

пределения консолей по длине балки к приближенно эквивалентному непрерывному их распределению путем введения непрерывных функций координаты балки $(E_0I_0)(x)$, $\rho_0(x)$, $l_0(x)$, связанных с параметрами истинного дискретного распределения гасителей по формулам

$$I_k=I_0(x_k)\Delta x,\quad \rho_k=\rho_0(x_k)\Delta x,\quad l_k=l_0(x_k) \tag{1.3}$$

а также непрерывной функции своих аргументов $v^\circ(x, z)$, характеризующей прогиб консольного покрытия и удовлетворяющей в каждой точке x однородному уравнению колебаний с коэффициентами $(E_0I_0)(x)$, $\rho_0(x)\omega^2$ и граничным условиям (1.1), где вместо l_k стоит $l_0(x)$.

Введение указанных функций позволяет аппроксимировать суммы в правой части уравнения (1.2) интегралами по длине балки l и получить после учета свойств δ — функции уравнение колебаний балки с консольным покрытием

$$EIu_{xxxx}-\rho\omega^2u=p(x)+(E_0I_0)(x)\overset{\circ}{v}_{zzz}(x; l_0)+[(E_0I_0)(x)v_{zz}{}^\circ(x,l_0)]_x \tag{1.4}$$

Являясь решением однородного уравнения колебаний, функция $v^\circ(x, z)$ может быть с учетом условий (1.1) представлена в каждой точке x в виде линейной комбинации двух функций Крылова [7], с коэффициентами, выраженными из (1.1) через прогиб балки и его первую производную в этой точке, и уравнение (1.4) сводится таким образом к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $u(x)$ вида

$$u_{xxxx}-\lambda^4u/l^4=p-(a_1u_x)_x+a_2u,\quad \lambda^4=(\rho\omega^2/EI)l^4$$

$$a_1=\frac{E_0I_0}{Il_0}\lambda_0b_1,\qquad a_2=\frac{E_0I_0}{Il_0{}^3}\lambda_0{}^3b_2,\qquad \lambda_0{}^4=\frac{\rho_0\omega^2}{E_0I_0}l_0{}^4$$

$$b_{1,2}=(\operatorname{ch}\lambda_0\sin\lambda_0\mp\operatorname{sh}\lambda_0\cos\lambda_0)\Delta_0{}^{-1},\quad \Delta_0=1+\operatorname{ch}\lambda_0\cos\lambda_0$$

где соотношение Δ_0 $(\lambda_0)=0$ есть дисперсионное уравнение, корни которого определяют спектр частотного параметра гасителей.

В качестве примера рассмотрим изгибные колебания упругой консольной балки, возбуждаемые равномерно распределенной по ее длине нагрузкой плотности p, при наличии системы N одинаковых консолей с параметрами E_1I_1, ρ_1, l_0 прикрепленных к ней в точках $x_k=kl/(N+1)$. При этом $E_0I_0=E_1I_1N/l$, $\rho_0=\rho_1N_1/l$, а с учетом того, что частотные параметры λ, λ_0 связаны соотношением $\lambda_0=\varkappa\lambda$, где $\varkappa=(\rho_0EI/\rho E_0I_0)^{1/4}l_0/l$, для равенства всех собственных частот балки и гасителей достаточно, чтобы параметры последних удовлетворяли условию $\varkappa=1$.

На фиг. 1 приведены результаты решения этой задачи, полученные для случая, когда $EI\approx 1{,}042\times 10^8$ кг$\times$см^2, $\rho=0{,}1975$ кг/см, $l=1$ м, $p=p_0\lambda^4$, $p_0=0{,}001$ кг/см, $E_0I_0=0{,}4883$ кг$\times$см, $\rho_0=1{,}48\times 10^{-4}$ кг/см^2, $l_0=5$ см, $\gamma=0{,}02$. Общая масса присоединенной системы составляет около 0,4% от массы балки. Сплошной линией показана зависимость максимального по длине балки модуля ее прогиба, отнесенного к толщине балки $u'=h^{-1}\max|u|$, от параметра λ при наличии гасителей, штриховой — при их отсутствии. Штрих-пунктирной линией изображена та же зависимость для случая колебаний балки с «ненастроенной» системой гасителей, отличающейся от предыдущих длиной, составляющей $1{,}025l_0$. Результаты приведены для окрестностей трех первых резонансных пиков колебаний балки; аналогичный характер графиков сохраняется и для следующих резонансов. Вне указанных окрестностей наличие гасителей практически не сказывается на амплитуде колебаний балки.

Отметим, что в случае непрерывного покрытия, для всех элементов которого частота возбуждающей нагрузки ω является собственной, при отсутствии в нем трения первые два условия (1.1), где $l_k=l_0(x)$, в каждой точке x являются линейно зависимыми, откуда следует, что прогиб балки удовлетворяет уравнению $u_x-H(x)u=0$, где

$$H(x)=\frac{\lambda_0(\operatorname{sh}\lambda_0-\sin\lambda_0)}{l_0(\operatorname{ch}\lambda_0+\cos\lambda_0)}=\frac{\lambda_0(\operatorname{ch}\lambda_0+\cos\lambda_0)}{l_0(\operatorname{sh}\lambda_0+\sin\lambda_0)} \qquad (1.5)$$

что при наличии условия $u(0)=0$ означает полное гашение колебаний балки на частоте ω $(u(x)\equiv 0)$.

Заметим, что возможны различные условия крепления балок — гасителей; при реализации на их концах граничных условий того же вида, что у исходной балки, возможна настройка присоединенной системы на все ее собственные частоты. При этом в случае больших N на каждой частоте всегда найдутся гасители, помещенные не в узлах соответствующей собственной формы колебаний, и окажется осуществимым динамическое гашение резонансных колебаний балки во всем частотном диапазоне.

2. Колебания пластины с гасителями. Рассмотрим совместные поперечные колебания тонкой пластины и системы консольных балок, прикрепленных в ее точках $x=x_k$, $k=1,\ldots N$ $(x=(x_1,\ x_2)$ — координаты на пластине). Предположим, что балки испытывают колебания только в плоскости, перпендикулярной плоскости пластины, и присоединены к ней таким образом, что в точках крепления выполняются условия равенства перемещений и углов поворота (1.1), где вместо производной u_x стоит производная u_e прогиба пластины по направлению e; $e(x)$ — единичный вектор, задающий ориентацию консолей. Пластина возбуждается распределенной гармонической нагрузкой $pe^{i\omega t}$.

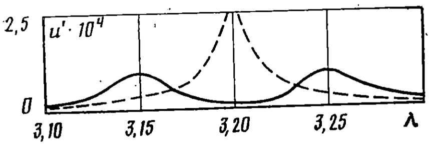
После перехода по правилу (1.3), где Δx — теперь элемент площади пластины, к непрерывному балочному покрытию с параметрами $(E_0I_0)(x)$, $\rho_0(x)$, $l_0(x)$ уравнение колебаний пластины с гасителями получается аналогично тому, как это было сделано в п. 1 для балки, и имеет вид

$$D\Delta^2u-\rho\omega^2u=p+(E_0I_0)(x)v_{zzz}(x,l_0)+\sum_{J=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}[(E_0I_0)(x)v_{zz}{}^0(x,l_0)e_j]x_i$$

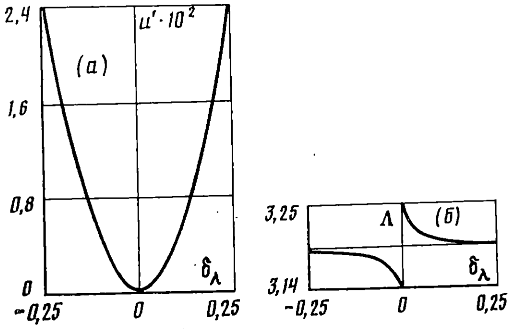
где D, ρ — цилиндрическая жидкость и удельная масса пластины, Δ — оператор Лапласа, e_i — направляющие косинусы вектора e.

Покажем, что если частота возбуждающей нагрузки является для балок собственной и нет трения, то возможно полное гашение колебаний пластины на этой частоте.

Действительно, условия равенства перемещений и углов поворота пластины и балок в точках их крепления являются в этом случае линейно



Фиг. 2



Фиг. 3

зависимыми и прогиб пластины $u(x)$ обязан удовлетворять уравнению

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}u\right)e_j-H(x)u=0$$

с функцией $H(x)$, определяемой формулой (1.5), что при наличии условия защемления или опирания пластины на контуре равносильно тому, что $u(x)\equiv 0$. В случае, когда балки обладают трением, возможно эффективное гашение колебаний пластины во всей окрестности собственной частоты.

В качестве примера исследовались осесимметричные колебания круглой защемленной по контуру пластины с параметрами $D=1{,}83\times 10^8$ кг/см, $\rho=0{,}079$ кг/см^2, радиусом 1 м и толщиной 10 см, возбуждаемые равномерной нагрузкой $p=200$ г/см^2 при наличии системы одинаковых равномерно распределенных по ее площади и ориентированных вдоль радиальных направлений консольных балок, характеризуемой параметрами $E_0I_0=10{,}675$ кг, $\rho_0=0{,}79\times 10^{-4}$ кг/см^3, $l_0=5{,}125$ см, $\gamma=0{,}02$. Масса покрытия составляла при этом около 0,5% массы пластины, первая собственная частота колебаний балок $\lambda_0=1{,}875$ совпадала с первой собственной частотой колебаний пластины $\lambda=3{,}196$.

На фиг. 2 представлены полученные амплитудно-частотные зависимости величины $u'=h_{\max}^{-1}|u(r)|$ от частотного параметра пластины $\lambda=(\rho\omega^2D^{-1})^{1/4}R$, $r\in[0, R]$ при наличии (сплошная линия) и отсутствии балок (штриховая). Наибольший прогиб балок достигается при этом на резонансных частотах всей системы, $\lambda_1=3{,}148$, $\lambda_2=3{,}244$, и имеет порядок $2u'$.

Для выяснения чувствительности результатов по отношению к характеристикам гасителей, исследовались также колебания пластины с системами консолей, длина которых отличалась от указанной и составляла от 4 до 7 см.

На фиг. 3, *а* показана полученная зависимость наибольшего в окрестности собственной частоты $\lambda=\lambda_*$ резонансного значения прогиба пластины $u_{\max}=\max u'$ от параметра $\delta=(\lambda'-\lambda_*)/\lambda_*$, где λ' — значение λ, соответствующее первой собственной частоте колебаний балок.

Заметим, что при вычислении величины $u_{\max}$ достаточно ограничиться рассмотрением значений λ из отрезка $[\lambda_1, \lambda_2]$, поскольку с ростом $|\delta|$ значение $\lambda=\Lambda$, соответствующее наибольшему резонансному пику величины u', приближается к величине λ_*. Это, в частности, видно из графика зависимости Λ от δ на фиг. 3, *б*.

В ряде задач при удачном выборе способа крепления балок и их параметров, балочные системы могут быть использованы для гашения резонансных колебаний пластин в широком частотном диапазоне.

Действительно, настройка некоторого участка спектра частот балки на определенный участок частотного спектра пластины возможна тогда, когда соответствующие им участки спектров частотных параметров λ_0, λ отличаются друг от друга на постоянный множитель, и, в частности, когда в спектрах λ_0, λ существуют достаточно близкие участки. Так, например, у круглой защемленной по контуру пластины с числом полуволн по параллели $m=1$ собственное значение с порядковым номером n мало отличается от собственного значения частотного параметра консольной балки с порядковым номером $n+1$. Близкие друг другу участки их спектров приведены для $n\leqslant 8$ в ниже следующей таблице. Соответствующее отношение λ_0^n/λ^n меняется при этом от 1,001 ($n\geqslant 5$) до 1,018 ($n=1$). Приведенные значения взяты в [6]:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
λ^n	4,611	7,799	10,96	14,11	17,26	20,40	23,54	26,69
λ_0^{n+1}	4,694	7,855	11,00	14,14	17,28	20,42	23,57	26,70

При достаточно больших нечетных m в спектрах пластины и консоли заведомо найдутся совпадающие участки. Так, уже начиная с $m\geqslant 5$, для собственных значений частотного параметра пластины имеет место приближенная формула $\lambda^n=\pi(n+m/2)$, $n>6-m/2$, из которой с учетом того, что спектр частотного параметра консольной балки кратен $\pi/2$, видно, что для всех указанных собственных значений λ найдутся такие же собственные значения параметра λ_0 (при $m=5$ это имеет место для $n\geqslant 5$, при этом $\lambda^n\approx\lambda_0^{n+3}$; при $m=7$ – для $n\geqslant 4$, $\lambda^n\approx\lambda_0^{n+4}$ и т. д., а начиная с $m=13$ верно для любых $n<m$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ден-Гартог Дж. П.* Механические колебания. М.: Физматгиз, 1960. 580 с.
2. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.
3. *Showdon J. C.* Vibration of contilever beams to wich dynamic absorbers are attached // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. V. 39. No. 5. Pt. 1. P. 878–886.
4. *Коренев Б. Г., Резников Л. М.* Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. М.: Наука, 1988. 303 с.
5. *Kojima H., Nagaya K.* Forced vibrations of a circular plate with a nonlinear dynamic vibration absorber // Bull. ISME. 1985. V. 28. No. 236. P. 309–314.
6. Справочник по динамике сооружений/Под ред. *Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича.* М.: Стройиздат. 1972. 511 с.
7. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. 408 с.

Москва

Поступила в редакцию 10.XI.1987