

УДК 539.3

© 1990 г.

И. С. АХМЕДЬЯНОВ

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КВАДРАТУР
К ИНТЕГРИРОВАНИЮ РАЗРУШАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ИЗГИБА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ**

Излагается приближенный способ интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, встречающихся в задачах статики тонких упругих оболочек вращения. Способ основан на преобразовании дифференциальных уравнений в интегральные с последующим применением к интегралам с переменными верхними пределами квадратурной формулы трапеций. Метод позволяет получить отдельно как «быстро возрастающие», так и «быстро убывающие» частные решения однородных дифференциальных уравнений изгиба оболочек вращения. Способ дает возможность решать задачи расчета оболочек вращения в тех случаях, когда нельзя воспользоваться асимптотическим методом. Приведен числовой пример.

1. Основные интегральные уравнения. Задачу расчета оболочки вращения постоянной или переменной толщины [1—4] во многих случаях с помощью соответствующей замены переменных можно свести к интегрированию системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$y'' = \xi y - \tau z + p, \quad z'' = \omega z + a\tau y + q \quad (1)$$

где $y(\psi)$, $z(\psi)$ — искомые функции; $\xi(\psi)$, $\tau(\psi)$, $\omega(\psi)$ — известные функции, вид которых определяется геометрией рассматриваемой оболочки; $p(\psi)$, $q(\psi)$ — выражения, зависящие от характера приложенной к оболочке нагрузки; a — некоторый параметр; ψ — угол между осью вращения оболочки и нормалью к меридиану ее срединной поверхности (или какая-либо другая переменная, определяющая положение произвольной точки меридиана оболочки). Штрих означает производную по аргументу ψ .

Посредством двукратного интегрирования обеих частей каждого из уравнений системы (1) преобразуем ее в совокупность двух интегральных уравнений

$$\begin{aligned} y &= A(\psi) + Y^* - Z + W \\ z &= B(\psi) + Z^* + aY + X \end{aligned} \quad (2)$$

$$A(\psi) = y_0 + y_0'(\psi - \psi_0), \quad B(\psi) = z_0 + z_0'(\psi - \psi_0)$$

$$Y(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \int_{\psi_0}^{\psi} \tau y \, d\psi \, d\psi, \quad Z(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \int_{\psi_0}^{\psi} \tau z \, d\psi \, d\psi, \quad Y^*(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \int_{\psi_0}^{\psi} \xi y \, d\psi \, d\psi$$

$$Z^*(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \int_{\psi_0}^{\psi} \omega z \, d\psi \, d\psi, \quad W(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \int_{\psi_0}^{\psi} p \, d\psi \, d\psi, \quad X(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \int_{\psi_0}^{\psi} q \, d\psi \, d\psi.$$

$$y_0 = y(\psi_0), \quad z_0 = z(\psi_0), \quad y_0' = y'(\psi_0), \quad z_0' = z'(\psi_0)$$

где ψ_0 — некоторое начальное значение угла ψ ($\psi_0 \neq 0$).

Полагая в уравнениях (2) $\psi = \psi_i = \psi_0 + it$, где t — шаг интегрирования

($i=1, 2, \dots$), приходим к следующим двум соотношениям:

$$\begin{aligned} y_i &= A_i + Y_i^* - Z_i + W_i \\ z_i &= B_i + Z_i^* + aY_i + X_i \end{aligned} \quad (3)$$

где $y_i = y(\psi_i)$, $z_i = z(\psi_i)$, $A_i = A(\psi_i)$, \dots , $Y_i = Y(\psi_i)$, \dots , $X_i = X(\psi_i)$.

2. Решение интегральных уравнений. Применяя к интегралам Y_i , Z_i , Y_i^* , Z_i^* квадратурную формулу трапеций [5], будем иметь ($i \geq 1$):

$$\begin{aligned} Y_i &= \int_{/4}^1 t^2 \tau_i y_i + F_i, \quad Z_i = \int_{/4}^1 t^2 \tau_i z_i + G_i \\ Y_i^* &= \int_{/4}^1 t^2 \zeta_i y_i + F_i^*, \quad Z_i^* = \int_{/4}^1 t^2 \omega_i z_i + G_i^* \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь для $i=1$:

$$F_1 = \int_{/4}^1 t^2 \tau_0 y_0, \quad G_1 = \int_{/4}^1 t^2 \tau_0 z_0$$

$$F_1^* = \int_{/4}^1 t^2 \zeta_0 y_0, \quad G_1^* = \int_{/4}^1 t^2 \omega_0 z_0$$

Для $i \geq 2$:

$$F_i = F_{i-1} + t^2 S_{i-1}, \quad G_i = G_{i-1} + t^2 T_{i-1}$$

$$F_i^* = F_{i-1}^* + t^2 S_{i-1}^*, \quad G_i^* = G_{i-1}^* + t^2 T_{i-1}^*$$

$$S_{i-1} = S_{i-2} + \tau_{i-1} y_{i-1}, \quad T_{i-1} = T_{i-2} + \tau_{i-1} z_{i-1}$$

$$S_{i-1}^* = S_{i-2}^* + \zeta_{i-1} y_{i-1}, \quad T_{i-1}^* = T_{i-2}^* + \omega_{i-1} z_{i-1}$$

$$S_0 = \int_{/2}^1 \tau_0 y_0, \quad T_0 = \int_{/2}^1 \tau_0 z_0, \quad S_0^* = \int_{/2}^1 \zeta_0 y_0, \quad T_0^* = \int_{/2}^1 \omega_0 z_0$$

$$\zeta_i = \zeta(\psi_i), \quad \tau_i = \tau(\psi_i), \quad \omega_i = \omega(\psi_i) \quad (i \geq 0)$$

Подставив выражения (4) в (3) и выполнив ряд преобразований, получим следующие формулы для вычисления y_i и z_i по предшествующим значениям $y_0, z_0, y_1, z_1, \dots, y_{i-1}, z_{i-1}$:

$$y_i = (\delta_{22} P_i - \delta_{12} Q_i) / \Delta_i, \quad z_i = (\delta_{11} Q_i - \delta_{21} P_i) / \Delta_i \quad (5)$$

$$P_i = A_i + F_i^* - G_i + W_i, \quad Q_i = B_i + G_i^* + aF_i + X_i$$

$$\delta_{11} = 1 - \int_{/4}^1 t^2 \zeta_i, \quad \delta_{12} = \int_{/4}^1 t^2 \tau_i, \quad \delta_{21} = -a \delta_{12}$$

$$\delta_{22} = 1 - \int_{/4}^1 t^2 \omega_i, \quad \Delta_i = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{21}$$

Значения W_i и X_i определяются по формулам ($i \geq 1$):

$$W_i = W_{i-1} + t^2 [s_{i-1} + \int_{/4}^1 (p_i - p_{i-1})], \quad W_0 = 0$$

$$X_i = X_{i-1} + t^2 [t_{i-1} + \int_{/4}^1 (q_i - q_{i-1})], \quad X_0 = 0$$

$$s_{i-1} = \int_{/2}^1 p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1}, \quad s_0 = \int_{/2}^1 p_0, \quad p_i = p(\psi_i)$$

$$t_{i-1} = \int_{/2}^1 q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_{i-1}, \quad t_0 = \int_{/2}^1 q_0, \quad q_i = q(\psi_i)$$

Для вычисления производных $y_i' = y'(\psi_i)$ и $z_i' = z'(\psi_i)$ можно вывести следующие зависимости ($i \geq 1$):

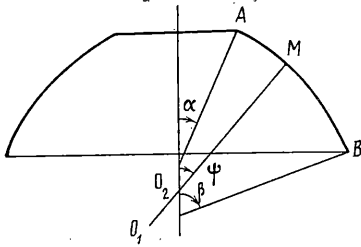
$$y_i' = y_0' + t(S_{i-1}^* + \int_{/2}^1 \zeta_i y_i) - t(T_{i-1} + \int_{/2}^1 \tau_i z_i) + t(s_{i-1} + \int_{/2}^1 p_i)$$

$$z_i' = z_0' + t(T_{i-1}^* + \int_{/2}^1 \omega_i z_i) + at(S_{i-1} + \int_{/2}^1 \tau_i y_i) + t(t_{i-1} + \int_{/2}^1 q_i) \quad (6)$$

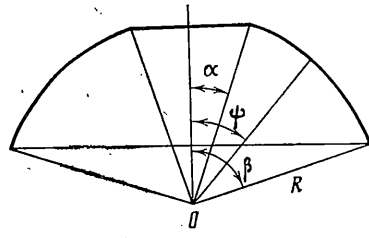
3. Общее решение исходных дифференциальных уравнений. Общее решение уравнений (1) имеет вид

$$\begin{aligned} y &= C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 + C_4 u_4 + y_q \\ z &= C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 + C_4 v_4 + z_q \end{aligned} \quad (7)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные; y_q, z_q — частное решение системы (1), определяемое по формулам (5) при $p_i \neq 0, q_i \neq 0$ (или, что то же, при $W_i \neq 0, X_i \neq 0$); $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), (u_4, v_4)$ — частные ли-



Фиг. 1



Фиг. 2

нейно независимые решения соответствующей однородной системы уравнений:

$$y'' = \xi y - \tau z, \quad z'' = \omega z + \alpha \tau y \quad (8)$$

Решения $(u_1, v_1), \dots, (u_4, v_4)$ могут быть получены по тем же соотношениям (5) при $p_i=0, q_i=0$ ($W_i=0, X_i=0$).

Пусть рассматриваемая оболочка вращения представляет собой некоторый пояс, ограниченный сверху параллелью $\psi=\alpha$, а снизу — параллелью $\psi=\beta$ (фиг. 1). Будем считать, что функции $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ являются «затухающими» по мере удаления от нижнего края оболочки вверх. Тогда значения этих функций и их производных можно определить по следующей схеме:

$$\begin{aligned} 1) \quad u_1(\psi_i) &= y_i, \quad v_1(\psi_i) = z_i \\ u_1'(\psi_i) &= y_i', \quad v_1'(\psi_i) = z_i' \end{aligned} \quad (9)$$

Для вычисления y_i, z_i и y_i', z_i' используем формулы (5) и (6) (при $W_i=0, X_i=0$) и начальные условия [4]:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(\psi_0) = 1, \quad y_0' = y'(\psi_0) = k_1 \\ z_0 &= z(\psi_0) = 0, \quad z_0' = z'(\psi_0) = -k_1 \\ 4k_1^4 &= 12(1-\mu^2) [R_1^4 / (h^2 R_2^2)]_{\psi=\psi_0} \end{aligned} \quad (10)$$

где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности рассматриваемой оболочки, h — толщина оболочки, μ — коэффициент Пуассона материала оболочки;

$$\begin{aligned} 2) \quad u_2(\psi_i) &= y_i, \quad v_2(\psi_i) = z_i \\ u_2'(\psi_i) &= y_i', \quad v_2'(\psi_i) = z_i' \end{aligned}$$

Начальные условия: $y_0=0, y_0'=k_1, z_0=1, z_0'=k_1$.

В обоих случаях начальный угол ψ_0 один и тот же и удовлетворяет условию $\psi_0 \geq \alpha$. Шаг интегрирования $t > 0$.

Функции (u_3, v_3) и (u_4, v_4) можно найти в виде решений, затухающих при удалении от верхнего края оболочки $\psi=\alpha$, по аналогичной схеме:

$$\begin{aligned} 3) \quad u_3(\psi_i) &= y_i, \quad v_3(\psi_i) = z_i \\ u_3'(\psi_i) &= y_i', \quad v_3'(\psi_i) = z_i' \end{aligned} \quad (11)$$

Начальные условия:

$$y_0=1, \quad y_0'=-k_2, \quad z_0=0, \quad z_0'=k_2. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad u_4(\psi_i) &= y_i, \quad v_4(\psi_i) = z_i \\ u_4'(\psi_i) &= y_i', \quad v_4'(\psi_i) = z_i' \end{aligned}$$

Начальные условия:

$$y_0=0, \quad y_0'=-k_2, \quad z_0=1, \quad z_0'=-k_2.$$

Постоянная k_2 находится из формулы [4]:

$$4k_2^4 = 12(1-\mu^2) [R_1^4 / (h^2 R_2^2)]_{\psi=\psi_0}$$

Начальный угол $\psi_0 \leq \beta$. Шаг интегрирования $t < 0$.

Как известно [6], условием линейной независимости решений u_1, u_2, u_3, u_4 является необращение в нуль определителя Вронского:

$$W[u_1, u_2, u_3, u_4] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & u_4'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' & u_4''' \end{vmatrix}$$

Используя первое из уравнений (8), можно установить, что

$$W[u_1, u_2, u_3, u_4] = \tau^2(\psi) \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \end{vmatrix} \quad (13)$$

Далее, составив из уравнений (8) одно уравнение четвертого порядка относительно y , выводим [6] (C — некоторая постоянная):

$$W[u_1, u_2, u_3, u_4] = C\tau^2(\psi) \quad (14)$$

Сопоставляя (13) и (14), приходим к выводу, что решения $u_1, u_2, \dots, v_3, v_4$ должны удовлетворять соотношению

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \end{vmatrix} = \text{const} \quad (15)$$

К этому же результату можно прийти, рассматривая определитель Вронского $W[v_1, v_2, v_3, v_4]$. В практических расчетах условие (15) может служить контролем правильности вычисления значений функций $u_1, v_1, \dots, u_4, v_4$ и их производных.

4. Пример. Найдем решение дифференциального уравнения краевого эффекта в сферической оболочке при произвольном нагружении [2, 3]:

$$\sigma_n'' + \sigma_n' \operatorname{ctg} \psi + [1 + i\lambda - n^2 (\sin \psi)^{-2}] \sigma_n = 0 \quad (16)$$

$$\lambda = [12m^2(1 - \mu^2) - \mu^2]^{1/2}, \quad m = R/h$$

Полагая в (16):

$$\sigma_n = \xi \theta_n, \quad \xi(\psi) = [(\sin \psi_0) / (\sin \psi)]^{1/2} \quad (17)$$

приходим к уравнению

$$\theta_n'' + (i\lambda - \varphi_n) \theta_n = 0 \quad (18)$$

$$\varphi_n(\psi) = (n^2 - 1/4) (\sin \psi)^{-2} - 5/4$$

Записав

$$\theta_n = y + iz \quad (19)$$

где y и z — действительные функции аргумента ψ , получаем из (18) систему уравнений вида (8) для определения y и z :

$$y'' = \varphi_n y + \lambda z, \quad z'' = \varphi_n z - \lambda y \quad (20)$$

Сопоставляя (20) и (8), устанавливаем, что $\xi(\psi) = \omega(\psi) = \varphi_n(\psi)$, $\tau(\psi) = -\lambda$, $a = 1$.

Так как система (20) является следствием соотношений (18) и (19), то она будет иметь четыре линейно независимых решения вида (u_1, v_1) , $(v_1, -u_1)$, (u_3, v_3) , $(v_3, -u_3)$. Тогда, согласно (17)–(19), будет

$$\operatorname{Re} \sigma_n = a_{1n} \sigma_{1n} + b_{1n} \tau_{1n} + a_{2n} \sigma_{2n} + b_{2n} \tau_{2n}$$

$$\operatorname{Im} \sigma_n = a_{1n} \tau_{1n} - b_{1n} \sigma_{1n} + a_{2n} \tau_{2n} - b_{2n} \sigma_{2n}$$

$$\sigma_{1n} = u_1 \xi(\psi), \quad \tau_{1n} = v_1 \xi(\psi),$$

$$\sigma_{2n} = u_3 \xi(\psi), \quad \tau_{2n} = v_3 \xi(\psi)$$

где $a_{1n}, b_{1n}, a_{2n}, b_{2n}$ — произвольные постоянные.

Таблица 1

ψ	σ_{10}	σ_{10}'	τ_{10}	τ_{10}'
4°	1	15,210	0	-22,361
6°	1,2432	-6,8739	-1,2457	-49,632
8°	-0,0231	-75,025	-3,2988	-61,004
10°	-4,5793	-190,25	-4,5006	15,552
12°	-12,770	-252,35	0,0931	288,68
14°	-18,125	43,365	18,331	778,60
16°	0,1603	1182,7	52,609	1078,4
18°	76,561	3306,4	76,558	-124,80
20°	224,31	4715,6	0,7352	-5009,4

Таблица 2

ψ	σ_{20}	σ_{20}'	τ_{20}	τ_{20}'
4°	1101,7	-32 244	13,502	24 638
6°	290,41	-14 571	300,15	-1514,5
8°	-2,8358	-3680,5	166,95	-4365,4
10°	-49,401	165,02	47,869	-2310,1
12°	-28,890	720,54	-0,3921	-638,29
14°	-8,6038	406,20	-8,7922	20,843
16°	0,0410	117,56	-5,2904	128,17
18°	1,6287	-2,6889	-1,6146	74,979
20°	1	-23,734	0	22,361

Для вычисления значений u_1 , v_1 и их производных используем условия (9) и (10) при $\psi_0 = \alpha$ (шаг интегрирования $t > 0$).

Значения u_3 , v_3 и производных u_3' , v_3' находим по условиям (11) и (12) при $\psi_0 = \beta$ (шаг интегрирования $t < 0$).

В табл. 1, 2 представлены результаты расчетов¹ для сферического пояса, ограниченного параллелями $\psi = \alpha = 4^\circ$ и $\psi = \beta = 20^\circ$ (фиг. 2) и подвергающегося осесимметричному изгибу ($n=0$).

Параметр $\lambda = 1000$, что при $\mu = 0,3$ соответствует отношению $R/h = 302,614$; $k_1 = -k_2 = 22,3607$.

Результаты, приведенные в табл. 1, получены при шаге интегрирования $t = -0,03125^\circ$. От точного решения уравнения (16), выражающегося через гипергеометрические ряды, они отличаются на несколько единиц пятой значащей цифры.

Получение точного решения (σ_{20} , τ_{20}), затухающего по мере удаления от вершины сферической оболочки, представляет очень большие трудности, так как оно сопряжено с необходимостью суммирования нескольких тысяч членов степенного ряда, что помимо больших затрат машинного времени, приводит к снижению точности результата. В связи с этим сопоставление значений σ_{20} , τ_{20} и их производных, приведенных в табл. 2 (шаг интегрирования $t = -0,03215^\circ$, $\psi_0 = 20^\circ$), с точным решением практически не представляется возможным. Поэтому эти значения в совокупности с σ_{10} , τ_{10} и σ_{10}' , τ_{10}' были проверены по условию (15), которое удовлетворилось с точностью до пятой значащей цифры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
2. Чернина В. С. Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. 455 с.
3. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2./С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др. М.: Машгиз, 1958. 975 с.
4. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций: Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
5. Мизлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 383 с.
6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1953. 468 с.

Жуйбышев

Поступила в редакцию
8.VII.1987

¹ Численные результаты получены В. Е. Кремсом.