

УДК 539.375

© 1990 г.

К. Ф. ЧЕРНЫХ

О НЕОБХОДИМОСТИ УЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ПРОБЛЕМЕ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Излагается оригинальный подход к анализу плоской задачи (обобщенной плоской деформации и плоскому напряженному состоянию) нелинейной теории упругости, приводящий к сравнительно простым и легко обозримым унифицированным зависимостям. Для сжимаемого линейно-упругого материала получено точное решение краевой задачи для плоскости с разрезом. Эта же задача рассмотрена и в линейной постановке. Сопоставление полученных точных выражений позволило автору сделать некоторые выводы о пределах применимости линейной теории и необходимости учета геометрической нелинейности в проблеме хрупкого разрушения. Выявлены преимущества условных напряжений (симметричных напряжений Био) перед истинными.

1. Исходные зависимости. В нелинейной теории широко используются комплексные координаты и компоненты векторов и тензоров [1]:

$$\begin{aligned} \zeta &= x_1^\circ + ix_2^\circ, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \partial/\partial\zeta = 1/2(\partial/\partial x_1^\circ - i\partial/\partial x_2^\circ) \\ T_1 &= t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}), \quad T_2 = t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21}) \\ T_3 &= t_{13} + it_{23}, \quad T_4 = t_{31} + it_{32}, \quad T_5 = t_{33} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь и ниже величины со знаком «градуса» относятся к недеформированной конфигурации тела, а без него — к деформированной.

Для плоской краевой задачи с заданными на границе области напряжениями имеет место [1, 2] для упругого сжимаемого материала однородная краевая задача (фиг. 1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{\partial \zeta} = 0, \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z/\partial \zeta|} \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 = \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z/\partial \bar{\zeta}|} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 e^{i\tau^\circ} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i\tau^\circ} = 2e^{i\tau^\circ} [\sigma_{\nu^\circ \nu^\circ}(s^\circ) + i\sigma_{\nu^\circ i^\circ}(s^\circ)] \quad (1.3)$$

Здесь $\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_i$ — комплексные компоненты тензора номинальных напряжений, $\Phi(|\partial z/\partial \zeta|, |\partial z/\partial \bar{\zeta}|, \lambda)$ — упругий потенциал, λ — кратность напряжений в направлении третьей координатной оси.

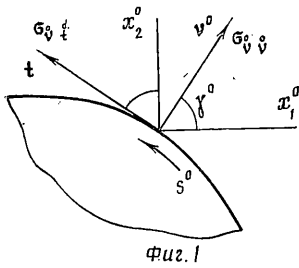
Через найденные при решении краевой задачи (1.2)–(1.3) функции $\partial z/\partial \zeta$, $\partial z/\partial \bar{\zeta}$ определяются угол поворота ω , кратность изменения площади Δ , комплексные компоненты тензора истинных напряжений Σ_i и комплексные компоненты тензора условных напряжений (симметричного тензора Био) Σ_i° :

$$e^{i\omega} = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1}, \quad \Delta = \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \quad (1.4)$$

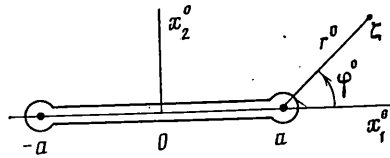
$$\lambda \Delta \Sigma_1 = \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z/\partial \zeta|} + \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right| \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z/\partial \bar{\zeta}|} \quad (1.5)$$

$$\lambda \Delta \Sigma_2 = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \left[\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z/\partial \zeta|} + \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z/\partial \bar{\zeta}|} \right]$$

$$\Sigma_1^\circ = \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z/\partial \zeta|}, \quad \Sigma_2^\circ = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z/\partial \bar{\zeta}|} \quad (1.6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Основанием для введенного наименования тензора Σ^0 является то, что в главных осях деформации его компоненты являются условными напряжениями.

2. Линейно упругий материал. Рассмотрим упругий материал

$$\Phi = \sigma^* \left| \frac{\partial z}{\partial \xi} \right|^2 + \alpha \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\xi}} \right|^2 \quad (2.1)$$

которому отвечает связь между главными условными напряжениями σ_i^0 и главными кратностями удлинений λ_i :

$$\begin{aligned} \sigma_1^0 &= \sigma^* \{ 1 + 1/2 [(\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1)] \} + 1/2 [(\lambda_1 - 1) - (\lambda_2 - 1)] \\ \sigma_2^0 &= \sigma^* \{ 1 + 1/2 [(\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1)] \} - 1/2 \alpha [(\lambda_1 - 1) - (\lambda_2 - 1)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

переходящая при малых деформациях в своеобразный закон Гука

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma^* [1 + 1/2 (e_1 + e_2)] + 1/2 \alpha (e_1 - e_2) \\ \sigma_2 &= \sigma^* [1 + 1/2 (e_1 + e_2)] - 1/2 \alpha (e_1 - e_2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

При отсутствии деформации, т. е. при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ из (2.2) следует, $\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \sigma^*$. Таким образом σ^* — предварительное всестороннее (в плоскости $x_1^0 x_2^0$) растягивающее условное напряжение. Из выражений (2.2), в силу их линейности, усматривается, что рассматриваемому упругому потенциалу отвечает предварительно напряженный физически линейный материал.

Строго говоря, речь идет о физической линейности по отношению к энергетической паре тензоров [1] $\sigma_i^0 \leftrightarrow \lambda_i$. Однако есть все основания (см. [3]) считать эту пару наиболее приемлемой. Некоторые соображения в пользу этого приводятся ниже. В силу сказанного сделанную оговорку можно опустить.

Вернемся к потенциалу (2.1). Для него из (1.2) — (1.3) следует $\partial^2 z / \partial \xi \partial \bar{\xi} = 0$ и

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \Phi(\xi), \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\xi}} = \overline{\Psi(\xi)}, \quad z = \int \Phi(\xi) d\xi + \int \overline{\Psi(\xi)} d\bar{\xi} \quad (2.4)$$

Отсюда и из соотношений (1.2) — (1.6) находим

$$\begin{aligned} e^{i2\omega} &= \Phi(\xi) / \overline{\Phi(\xi)}, \quad \Delta = \Phi(\xi) \overline{\Phi(\xi)} - \Psi(\xi) \overline{\Psi(\xi)} \\ \{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_1 &= 2\sigma^* \Phi(\xi), \quad \{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_2 = 2\alpha \overline{\Psi(\xi)} \\ \Sigma_1^0 &= 2\sigma^* [\Phi(\xi) \overline{\Phi(\xi)}]^{1/2}, \quad \Sigma_2^0 = 2\alpha \overline{\Phi(\xi) \Psi(\xi)} [\Phi(\xi) \overline{\Phi(\xi)}]^{-1/2} \\ \lambda \Delta \Sigma_1 &= 2 [\sigma^* \Phi(\xi) \overline{\Phi(\xi)} + \alpha \Psi(\xi) \overline{\Psi(\xi)}], \\ \lambda \Delta \Sigma_2 &= 2 [(\sigma^* + \alpha) \Phi(\xi) \overline{\Psi(\xi)}] \end{aligned} \quad (2.5)$$

При этом функции $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$ определяются из линейного граничного условия

$$\sigma^* \Phi(\xi) e^{i\tau^0} + \alpha \overline{\Psi(\xi)} e^{-i\tau^0} = e^{i\tau^0} [\sigma_{v^0 v^0}(s^0) + i \sigma_{v^0 i^0}(s^0)] \quad (2.6)$$

3. Решение базовой задачи. В качестве базовой рассмотрим задачу о плоскости с разрезом ($-a \leq x_1^0 \leq a$, $x_2^0 = 0$), нагруженной на бесконечности условными напряжениями σ_{ij}^{∞} при свободных от нагрузки берегах разреза (фиг. 2). Решая линейную краевую задачу (2.6) каким-либо из известных способов, находим

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{\sigma_{22}^{\infty} - i\sigma_{12}^{\infty}}{2\sigma^*} \frac{\xi}{(\xi^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{\sigma_{11}^{\infty} + i\sigma_{12}^{\infty}}{2\sigma^*} \\ \Psi(\xi) &= -\frac{\sigma_{22}^{\infty} + i\sigma_{12}^{\infty}}{2\alpha} \frac{\xi}{(\xi^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{\sigma_{11}^{\infty} - i\sigma_{12}^{\infty}}{2\alpha} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Отсюда и из (2.4) находим

$$z = \frac{\sigma_{22}^{\infty} - i\sigma_{12}^{\infty}}{2\sigma^*} \left[(\xi^2 - a^2)^{1/2} - \frac{\sigma^*}{\alpha} (\bar{\xi}^2 - a^2)^{1/2} \right] + \frac{\sigma_{11}^{\infty} + i\sigma_{12}^{\infty}}{2\sigma^*} (\xi + \bar{\xi}) \quad (3.2)$$

Получим решение линейной краевой плоской задачи, отвечающей закону Гука (2.3) (в силу малости деформаций и углов поворота знак «градуса» опускается). Согласно (1.1) закон Гука записывается в виде

$$E_1 = \Sigma_1 / \sigma^* - 2, \quad E_2 = \Sigma_2 / \alpha \quad (3.3)$$

В терминах введенных комплексных величин в линейной плоской задаче имеют место соотношения

$$\frac{\partial(u_1 + iu_2)}{\partial\xi} = \frac{E_1}{2} + i\omega, \quad \frac{\partial(u_1 + iu_2)}{\partial\bar{\xi}} = \frac{E_2}{2} \quad (3.4)$$

$$i\partial\omega/\partial\bar{\xi} = 1/2 (\partial E_2/\partial\bar{\xi} - \partial E_1/\partial\bar{\xi}) \quad (3.5)$$

уравнения совместности неразрывности деформаций

$$\partial^2 E_2 / (\partial\xi)^2 + \partial E^2 / (\partial\xi)^2 - \partial^2 E_1 / \partial\xi \partial\bar{\xi} = 0 \quad (3.6)$$

однородные уравнения равновесия

$$\partial\Sigma_1/\partial\bar{\xi} + \partial\Sigma_2/\partial\bar{\xi} = 0 \quad (3.7)$$

и статические граничные условия

$$\Sigma_1 e^{i\gamma} + \Sigma_2 e^{-i\gamma} = 2e^{i\gamma} [\sigma_{vv}(s) + i\sigma_{vt}(s)] \quad (3.8)$$

Функции комплексной переменной введем соотношениями

$$\Sigma_1 = 2\sigma^* + 2[\Phi(\xi) + \overline{\Phi(\bar{\xi})}], \quad \Sigma_2 = -2[\xi\overline{\Phi'(\bar{\xi})} + \overline{\Psi(\bar{\xi})}] \quad (3.9)$$

тождественно удовлетворяющими однородному уравнению равновесия (3.7). Отсюда и из (3.3), (3.5) находим

$$\begin{aligned} E_1 &= (2/\sigma^*) [\Phi(\xi) + \overline{\Phi(\bar{\xi})}], \quad E_2 = -(2/\alpha) [\xi\overline{\Phi'(\bar{\xi})} + \overline{\Psi(\bar{\xi})}] \\ \omega &= i(\sigma^{*-1} + \alpha^{-1}) [\overline{\Phi(\bar{\xi})} - \Phi(\xi)] \end{aligned}$$

Подстановка полученных выражений в (3.4) приводит к соотношению

$$u_1 + iu_2 = (2\sigma^{*-1} + \alpha^{-1}) \int \Phi(\xi) d\xi - \alpha^{-1} \xi \overline{\Phi(\bar{\xi})} - \alpha^{-1} \int \overline{\Psi(\bar{\xi})} d\bar{\xi} \quad (3.10)$$

Согласно же (3.9) граничное условие (3.8) принимает вид

$$\begin{aligned} [\Phi(\xi) + \overline{\Phi(\bar{\xi})}] e^{i\gamma} - [\xi\overline{\Phi'(\bar{\xi})} + \overline{\Psi(\bar{\xi})}] e^{-i\gamma} = \\ = e^{i\gamma} [\sigma_{vv}(s) + i\sigma_{vt}(s) - \sigma^*] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решая его для рассматриваемой краевой задачи о плоскости с прямолинейным разрезом, получаем

$$\Phi(\xi) = \frac{\sigma_{22}^{\infty} - i\sigma_{12}^{\infty}}{2} \frac{\xi}{(\xi^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{\sigma_{11}^{\infty} - \sigma_{22}^{\infty} - 2\sigma^* + i2\sigma_{12}^{\infty}}{4}$$

$$\Psi(\zeta) = i\sigma_{12}^{\infty} \frac{\zeta}{(\zeta^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{\sigma_{22}^{\infty} - i\sigma_{12}^{\infty}}{2} \frac{a^2 \zeta}{(\zeta^2 - a^2)^{3/2}} + \frac{\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty}}{2} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} & \zeta + (u_1 + iu_2) \left(\frac{2}{\sigma^*} + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\sigma_{22}^{\infty} - i\sigma_{12}^{\infty}}{2} (\zeta^2 - a^2)^{1/2} + i \frac{\sigma_{12}^{\infty}}{\alpha} (\zeta^2 - a^2)^{3/2} + \\ & + \frac{\sigma_{22}^{\infty} + i\sigma_{12}^{\infty}}{2\alpha} \frac{a^2 - \zeta \bar{\zeta}}{(\zeta^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{\sigma_{11}^{\infty} - \sigma_{22}^{\infty}}{2\alpha} \bar{\zeta} + \\ & + \left[\frac{\sigma_{11}^{\infty} - \sigma_{22}^{\infty} + i2\sigma_{12}^{\infty}}{2\sigma^*} + \left(\frac{1}{\sigma^*} + \frac{1}{\alpha} \right) i\sigma_{12}^{\infty} \right] \zeta \end{aligned} \quad (3.13)$$

4. Сопоставление решений. Некоторые выводы. В окрестности правого конца разреза имеем (фиг. 2):

$$\zeta = a + r^{\circ} e^{i\varphi^{\circ}} \sim a, \quad (\zeta^2 - a^2)^{1/2} \sim (2ar^{\circ})^{1/2} e^{i\varphi^{\circ}/2} \quad (4.1)$$

Отсюда и из соотношений (2.5), (3.1), (3.9) и (3.12) получаем при $\sigma_{12}^{\circ\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = 0$ асимптотические представления для истинных напряжений

$$\sigma_{11} \sim 0, \quad \sigma_{22} \sim 2/[\lambda(1 - \sigma^*/\alpha)], \quad \sigma_{12} \sim 0 \quad (4.2)$$

условных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{\circ} / [k_I^{\circ} (2\pi r^{\circ})^{-1/2}] & \sim \sin^2(\varphi^{\circ}/2) \\ \sigma_{22}^{\circ} / [k_I^{\circ} (2\pi r^{\circ})^{-1/2}] & \sim \cos^2(\varphi^{\circ}/2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{\circ} / [k_I^{\circ} (2\pi r^{\circ})^{-1/2}] & \sim -\sin(\varphi^{\circ}/2) \cos(\varphi^{\circ}/2) \\ (k_I^{\circ} = \sigma_{22}^{\circ\infty} (\pi a)^{1/2}) \end{aligned}$$

линейных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{11} / [k_I (2\pi r)^{1/2}] & \sim \cos(\varphi/2) [1 - \sin(\varphi/2) \sin(3\varphi/2)] \\ \sigma_{22} / [k_I (2\pi r)^{1/2}] & \sim \cos(\varphi/2) [1 + \sin(\varphi/2) \sin(3\varphi/2)] \\ \sigma_{12} / [k_I (2\pi r)^{1/2}] & \sim \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2) \cos(3\varphi/2) \\ (k_I = \sigma_{22}^{\infty} (\pi a)^{1/2}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

С помощью соотношений (3.2), (3.13) и (4.1) получаем при $\sigma_{12}^{\circ\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = 0$: разрез переходит в эллипс с полуосями a' , b' . При этом по нелинейной теории

$$a'/a = 1/2(1 + \sigma^*/\alpha), \quad b'(a) = 1/2(1 + \sigma^*/\alpha) \quad (4.5)$$

по линейной теории

$$a'/a = 0, \quad b'/a = 1 + \sigma^*/\alpha$$

Из соотношений (4.2) усматривается, что истинные напряжения не зависят от величины внешней нагрузки $\sigma_{22}^{\circ\infty}$. Рассмотрение задачи о растяжении плоскости с симметричной лункой показывает, что истинные напряжения не зависят от угла раствора лунки. Эти и многочисленные другие недостатки истинных напряжений [3] однозначно указывают на преимущества использования условных напряжений.

Сопоставление выражений (4.3) и (4.4) указывает на то, что условные и линейные напряжения имеют (при $k_I^{\circ} = k_I$) одинаковые коэффициенты интенсивности напряжений и различаются зависимостями от полярного угла. В условиях реализующихся в окрестностях сингулярных точек больших углов поворота и деформаций несовпадение нелинейного и линейного решений необходимо рассматривать как дефект последнего.

Из сказанного вытекают следующие (нуждающиеся, конечно, в дальнейшем развитии и уточнении) утверждения:

для линейно упругого материала линейная теория может дать правильные результаты в тех проблемах хрупкого разрушения, где определяющим параметром является коэффициент интенсивности напряжений; сомнительны результаты, полученные с использованием найденной по линейной теории зависимостью от полярного угла.

Рассмотренные автором проблемы тонкой структуры конца трещины, сохранения хрупкой трещины, направление начального срагивания трещины при комбинированной нагрузке показывают, что учет геометрической нелинейности вносит существенные поправки.

Естественно возникает вопрос, можно ли, рассматривая потенциал частного вида (2.1), делать столь общие заключения? Думается, что да. Действительно, из соотношений (4.3)–(4.4) видно, что полученные выражения непосредственно не связаны с величиной предварительного растяжения. С другой стороны, для избавления от предварительного всестороннего растяжения следовало бы добавить в упругий потенциал линейные по $|\partial z/\partial \xi|$ и $|\partial z/\partial \bar{\xi}|$ члены. Но они не влияют на асимптотические выражения (4.3)–(4.4). Таким образом полученные результаты следует рассматривать как общие для линейно упругого материала. Оставшееся за пределами публикации рассмотрение упругих потенциалов более общего вида, нелинейной клиновой дисклинации подтвердило сказанное выше.

Существует мнение, что неучет геометрической нелинейности мало влияет на конфигурацию трещины. Сопоставление выражений (4.5) показывает, что и это не так. По нелинейной теории разрез переходит в круговое отверстие — результат, качественно подтверждаемый экспериментами на резиновых пластинах. По линейной же теории разрез «переползает» с оси абсцисс на ось ординат — физически несуразный результат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
2. Черных К. Ф. Нелинейно-упругое напряженное состояние // Вестн. ЛГУ. 1986. Сер. 1. Вып. 3. С. 72–77.
3. Новожилов В. В., Черных К. Ф. Об «истинных» мерах напряжений и деформаций в нелинейной механике деформируемого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 73–79.

Ленинград

Поступила в редакцию
21.XII.1987