

УДК 539.374

© 1990 г.

И. А. БРИГАДНОВ, С. И. РЕПИН

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ МАЛОУПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается вариационно-разностный метод решения краевых задач пластичности в рамках деформационной теории. Известно, что эффективность метода конечных элементов совместно со стандартными методами упругих решений падает при уменьшении величины упрочнения материала. Это связано с плохой обусловленностью разрешающих систем алгебраических уравнений.

Предлагается метод, нечувствительный к величине упрочнения материала, названный методом выделения развитой пластичности. Доказывается его сходимость. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, показывающие, что для малых упрочнений материала этот метод имеет преимущества перед стандартными алгоритмами как по времени счета, так и по точности определения поля перемещений и зоны пластичности.

1. Постановка и численное решение краевой задачи упругопластичности. Пусть $\Omega \subset R^n$ ($n=2; 3$) — область, занятая упругопластическим телом, S — граница области. В Ω задана объемная сила f . На части границы S_U задано перемещение U , а на S_F — внешняя сила F ($S_U \cap S_F = \emptyset$, $S_U \cup S_F = S$). Задача определения напряженно-деформированного состояния изотропного тела в рамках деформационной теории пластичности [1] может быть поставлена в вариационной форме [2–5]: найти $u^* \in V$ такое, что

$$J(u^*) = \inf_{u \in V} J(u), \quad V = \{u | u \in W_2^1(\Omega, R^n), u|_{S_U} = U\} \quad (1.1)$$

$$J(u) = \int_{\Omega} W(u) d\omega - l(u), \quad W(u) = \frac{k_0}{2} \operatorname{div}^2 u + 2\mu \int_0^{\varepsilon_i(u)} H(x) dx$$

$$l(u) = \int_{\Omega} f \cdot u d\omega + \int_{S_F} F \cdot u ds$$

где V — множество кинематически допустимых перемещений, $W(u)$ — удельная энергия деформаций, $l(u)$ — работа внешних сил, k_0 — модуль объемной деформации, μ — модуль сдвига, ε — тензор малых деформаций ($2\varepsilon = \nabla u + u \nabla$), ε_i — интенсивность девиатора деформаций, которая связана с интенсивностью девиатора напряжений σ_i определяющим соотношением $\sigma_i = 2\mu H(\varepsilon_i)$.

Рассматриваются упрочняющиеся материалы с кусочно-гладкой материальной функцией H [2–5], которая подчиняется следующим условиям для любых $\varepsilon_i \in (0, +\infty)$:

$$0 < h_0 \leq H(\varepsilon_i) / \varepsilon_i \partial H / \partial \varepsilon_i \leq 1 \quad (1.2)$$

Можно показать, что при определенных ограничениях на исходные данные в этом случае функционал $J(u)$ является коэрцитивным, гладким и строго выпуклым на выпуклом множестве V гильбертова пространства $W_2^1(\Omega, R^n)$. Поэтому существует, причем единственное решение задачи (1.1) [6].

Для численного решения (1.1) используется схема метода конечных элементов. Область разбивается на симплексы T_h (h — характерный размер) так, что Ω_h является объединением симплексов T_h триангуляции Φ_h . При этом $\Omega_h \rightarrow \Omega$ и $S_h \rightarrow S$ при $h \rightarrow 0$ регулярным образом. Вводится множество V_h непрерывных вектор-функций, линейных на каждом T_h и удовлетворяющих кинематическим условиям на $(S_U)_h$. Базис в V_h образуют

стандартные непрерывные кусочно-линейные финитные вектор-функции, каждая из которых отлична от нуля только в одном узле. Общее число свободных параметров (размерность V_h) равно $M=nm$, где $n=2, 3$, а m — число узлов триангуляции Φ_h за исключением узлов на $(S_U)_h$. Вводится функционал

$$J_h(\mathbf{u}_h) = \sum_{T_h \in \Phi_h} \left\{ \int_{T_h} W_h(\mathbf{u}_h) d\omega - l_h(\mathbf{u}_h) \right\}$$

и рассматривается следующая конечномерная задача (дискретный аналог (1.1)): найти $\mathbf{u}_h^* \in V_h$ такое, что

$$J_h(\mathbf{u}_h^*) = \min_{\mathbf{u}_h \in V_h} J_h(\mathbf{u}_h) \quad (1.3)$$

В силу свойств функционала $J(u)$ для упрочняющихся материалов типа (1.2) существует, причем единственное решение задачи (1.3), и гарантируется сходимость \mathbf{u}_h^* к \mathbf{u}^* в норме $W_2^1(\Omega, R^n)$ при $h \rightarrow 0$ регулярным образом [6]. Поэтому интерес представляет вопрос эффективного численного решения конечномерной задачи (1.3).

Необходимым и достаточным условием минимума $J_h(u_h)$ является условие стационарности [7], которое записывается в матричном виде:

$$DJ_h/D\mathbf{u}_h = [\mathbf{A}_h(\mathbf{u}_h)]\mathbf{u}_h - \mathbf{B}_h = 0 \quad (1.4)$$

где \mathbf{B}_h — обобщенный вектор узловых воздействий размерности M , \mathbf{A}_h — глобальная матрица переменных модулей жесткости [4, 5, 8]. Задача (1.3) сводится к решению разрешающей системы нелинейных алгебраических уравнений размерности M . Система (1.4) решается итерационными методами, в качестве начального приближения берется упругое решение

$$\mathbf{u}_h^0 = [\mathbf{A}_h^0]^{-1}\mathbf{B}_h \quad (1.5)$$

где матрица жесткости \mathbf{A}_h^0 отвечает упругой задаче.

В настоящее время широкое распространение получили стандартные методы. Метод упругих решений [1, 2, 4, 8] (квазиньютоновский метод) описывается следующим итерационным соотношением:

$$\mathbf{u}_h^{k+1} = \mathbf{u}_h^k + \rho [\mathbf{A}_h^0]^{-1} (\mathbf{B}_h - [\mathbf{A}_h(\mathbf{u}_h^k)]\mathbf{u}_h^k) \quad (k \geq 0) \quad (1.6)$$

где ρ — параметр, $\rho=1$ отвечает первоначальной формулировке метода [1]. Используется также метод переменных параметров упругости [2, 5, 9] (процедура простых итераций):

$$\mathbf{u}_h^{k+1} = [\mathbf{A}_h(\mathbf{u}_h^k)]^{-1}\mathbf{B}_h \quad (1.7)$$

Скорость сходимости стандартных методов существенно зависит от величины упрочнения материала и при малых h_0 в условии (1.2) резко падает [2, 5]. Это связано с плохой обусловленностью матрицы \mathbf{A}_h в окрестности решения \mathbf{u}_h^* . Механизм возникновения плохой обусловленности поясняется на следующем примере.

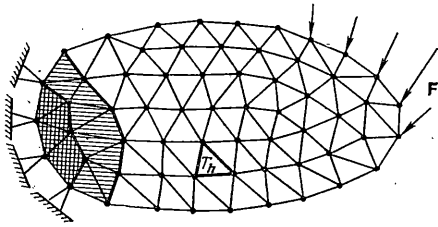
В случае несжимаемого материала с линейным упрочнением решение вариационной задачи (1.1) ищется на множестве $V_1 = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in V, \text{div } \mathbf{u} = 0\}$.

Функция упрочнения H имеет кусочно-линейный вид (ε_i^* — предельная упругая деформация материала):

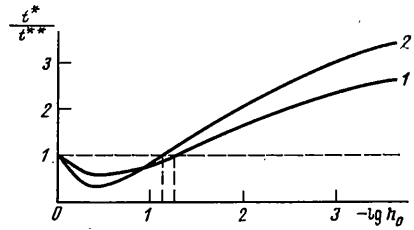
$$H(x) = \begin{cases} x, & x \leq \varepsilon_i^* \\ \varepsilon_i^* + h_0(x - \varepsilon_i^*), & x > \varepsilon_i^* \end{cases} \quad (h_0 \in (0, 1]) \quad (1.8)$$

При использовании вариационно-разностных методов минимизирующая функция ищется в виде:

$$\mathbf{u}_N = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbf{v}_k \quad (\mathbf{v}_k \in V_1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

После введения непрерывной на $[0; +\infty)$ функции $\lambda(x)=1$ при $x \leq \varepsilon_i^*$ и $\lambda(x)=\varepsilon_i^*/x$ при $x > \varepsilon_i^*$ условие стационарности $J(\mathbf{u}_N)$ приводит к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений для определения α_k :

$$\sum_{j=1}^N A_{kj} \alpha_j = B_k \quad (k=\overline{1, N}), \quad A_{kj} = \int_{\Omega} C(\varepsilon_i) \varepsilon^D(\mathbf{v}_k) \dots \varepsilon^D(\mathbf{v}_j) d\omega$$

$$B_k = (2\mu)^{-1} l(\mathbf{v}_k), \quad C(\varepsilon_i) = h_0 + (1-h_0)\lambda(\varepsilon_i)$$

При больших значениях $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\mathbf{u}_N)$ множитель $C(\varepsilon_i)$ близок к h_0 , а при малых ε_i — к единице. Таким образом, если решение задачи имеет область с большими величинами ε_i и носитель функции \mathbf{v}_k содержится в этой области, то соответствующая k -я строка матрицы $[A_{kj}]$ имеет множитель порядка h_0 . Строки, соответствующие \mathbf{v}_k , носители которых лежат вне области развитой пластичности, имеют множитель порядка единицы. Поэтому при малых коэффициентах упрочнения h_0 обусловленность матрицы $[A_{kj}]$ может оказаться весьма большой. Подобные явления возникают и в других задачах, где решение содержит зоны развитой пластичности (в окрестностях выточек, отверстий, разрезов). Для малоупрочняющихся материалов применение стандартных методов, чувствительных к величине упрочнения, может привести к существенным затратам машинного времени и потере точности.

2. Метод выделения развитой пластичности. Предлагается численный метод, нечувствительный к величине упрочнения материала, позволяющий в значительной степени преодолеть указанные трудности. Он основан на декомпозиции расчетной области и раздельном счете в зонах развитой и неразвитой пластичности в рамках общего итерационного процесса.

Пусть известно некоторое приближение \mathbf{u}_h^k . Для определения приближения \mathbf{u}_h^{k+1} предлагается следующая процедура.

1. Для текущего k -го приближения определим два множества:

$$Q_e^k = \{T_h \in \Phi_h \mid \varepsilon_i(\mathbf{u}_h^k) \leq \varepsilon_i^*/\alpha \text{ на } T_h\} \quad (2.1)$$

$$Q_p^k = \{T_h \in \Phi_h \mid \varepsilon_i(\mathbf{u}_h^k) > \varepsilon_i^*/\alpha \text{ на } T_h\}$$

где Q_e^k — зона неразвитой, а Q_p^k — зона развитой пластичности (на фиг. 1 показана зона развитой пластичности для двух приближений: горизонтальной штриховкой отмечена зона Q_p^k , вертикальной — зона Q_p^{k+1}). Через I обозначим множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots, m\}$, где m — число узлов триангуляции Φ_h , не принадлежащих границе $(S_U)_h$. В множестве I выделим подмножество I_p^k , к которому отнесем номера следующих узлов: любой элемент T_h , имеющий такой узел своей вершиной, принадлежит множеству Q_p^k . Введем обозначение $I_e^k = I \setminus I_p^k$.

2. При фиксированных значениях поля перемещений в узлах I_e^k находим промежуточное приближение $\mathbf{u}_h^{k+1/2}$ как решение первой подзадачи:

$$J_h(\mathbf{u}_h^{k+1/2}) = \min_{(\mathbf{u}_h)_i} J_h(\mathbf{u}_h) \quad (i \in I_p^k) \quad (2.2)$$

3. При фиксированных значениях поля перемещений в узлах I_p^h находим приближение u_h^{k+1} как решение второй подзадачи:

$$J_h(\mathbf{u}_h^{k+1}) = \min_{(\mathbf{u}_h)_i} J_h(\mathbf{u}_h) \quad (i \in I_e^h) \quad (2.3)$$

Задачи (2.2) и (2.3) могут решаться любым методом выпуклой оптимизации [7], в том числе при помощи обобщенных методов упрощенных решений [2].

4. Критерием остановки итерационного процесса является условие:

$$(1-\omega) \frac{\|u_h^k - u_h^{k+1}\|}{\|u_h^k\|} + \omega \frac{|J_h(u_h^k) - J_h(u_h^{k+1})|}{|J_h(u_h^k)|} < \xi \quad (2.4)$$

где ξ — задаваемая точность, $0 \leq \omega \leq 1$, $\|\cdot\|$ — норма в R^M . Если условие (2.4) не выполняется, тогда в качестве текущего приближения принимается u_h^{k+1} и шаги 1—4 повторяются. Величина α в (2.1) является параметром метода и выбирается на промежутке $(0; 1]$ из условия максимальной скорости сходимости процесса. Необходимо отметить, что при $\alpha=1$ подзадача (2.3) является задачей минимизации квадратичной функции и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Утверждение. Последовательность $\{\mathbf{u}_h^k\}_{k=0}^\infty$, построенная по методу выделения развитой пластичности, является минимизирующей на V_h и сходится к решению u_h^* задачи (1.3).

Из необходимого и достаточного признака строгой выпуклости $J_h(u_h)$ следует [7]:

$$J_h(\mathbf{u}_h^k) - J_h(\mathbf{u}_h^{k+1/2}) \geq (J_h'(\mathbf{u}_h^{k+1/2}), \mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k+1/2}) + \kappa \|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k+1/2}\|^2 \quad (2.5)$$

$$J_h(\mathbf{u}_h^{k+1/2}) - J_h(\mathbf{u}_h^{k+1}) \geq (J_h'(\mathbf{u}_h^{k+1}), \mathbf{u}_h^{k+1/2} - \mathbf{u}_h^{k+1}) + \kappa \|\mathbf{u}_h^{k+1/2} - \mathbf{u}_h^{k+1}\|^2$$

где $\kappa > 0$, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в R^M . Из описания алгоритма (2.2) и (2.3) вытекают следующие утверждения:

$$\begin{cases} (J_h'(\mathbf{u}_h^{k+1/2}))_i = 0 & (i \in I_p^h) \\ (\mathbf{u}_h^{k+1/2})_i = (\mathbf{u}_h^k)_i & (i \in I_e^h) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} (J_h'(\mathbf{u}_h^{k+1}))_i = 0 & (i \in I_e^h) \\ (\mathbf{u}_h^{k+1})_i = (\mathbf{u}_h^{k+1/2})_i & (i \in I_p^h) \end{cases}$$

Тогда из определения скалярного произведения в R^M и свойств подмножеств I_e^h, I_p^h ($I_e^h \cap I_p^h = \emptyset, I_e^h \cup I_p^h = I$) следует:

$$(J_h'(\mathbf{u}_h^{k+1/2}), \mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k+1/2}) = 0$$

$$(J_h'(\mathbf{u}_h^{k+1}), \mathbf{u}_h^{k+1/2} - \mathbf{u}_h^{k+1}) = 0$$

В результате, после сложения неравенств (2.5) приходим к оценке:

$$J_h(\mathbf{u}_h^k) - J_h(\mathbf{u}_h^{k+1}) \geq \kappa \{ \|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k+1/2}\|^2 + \|\mathbf{u}_h^{k+1/2} - \mathbf{u}_h^{k+1}\|^2 \} \quad (2.7)$$

Числовая последовательность $\{J_h^k\}_{k=0}^\infty$, где $J_h^k = J_h(\mathbf{u}_h^k)$ является невозрастающей и ограниченной снизу значением $J_h^* = J_h(\mathbf{u}_h^*)$, поэтому существует предел $J_h^k \rightarrow J_h^\infty \geq J_h^*$ ($k \rightarrow \infty$). Из сходимости числовой последовательности следует сходимость в себе, в частности, $J_h^k - J_h^{k+1} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Тогда из оценки (2.7) вытекает:

$$\|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k+1/2}\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty); \quad \|\mathbf{u}_h^{k+1/2} - \mathbf{u}_h^{k+1}\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (2.8)$$

На основании свойств (2.6), (2.8) и непрерывности градиента функции $J_h(\mathbf{u}_h)$ можно заключить: $(J_h'(\mathbf{u}_h^{k+1}))_{i \rightarrow 0} (k \rightarrow \infty, i \in I_p^k)$. Это приводит к утверждению $(J_h'(\mathbf{u}_h^{k+1}))_{i \rightarrow 0} (k \rightarrow \infty)$ для любого $i \in I$ или

$$\|J_h'(\mathbf{u}_h^{k+1})\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (2.9)$$

Введем выпуклое ограниченное множество [7] $Y_0 = \{\mathbf{u}_h \in V_h | J_h(\mathbf{u}_h) \leq J_h(\mathbf{u}_h^0)\}$. Из невозрастания последовательности $\{J_h^k\}_{k=0}^\infty$ следует, что $\{\mathbf{u}_h^k\}_{k=0}^\infty \subset Y_0$ и $\mathbf{u}_h^* \in Y_0$. Для выпуклых функций имеется оценка [7]:

$$0 \leq J_h(\mathbf{u}_h^{k+1}) - J_h^* \leq D \|J_h'(\mathbf{u}_h^{k+1})\| \quad (k=0, 1, \dots)$$

где $D \geq \text{diam } Y_0 = \sup_{\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in Y_0} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|$ — диаметр множества Y_0 . Тогда из (2.9) вытекает: $J_h(\mathbf{u}_h^{k+1}) \rightarrow J_h^* (k \rightarrow \infty)$. В силу единственности предела числовой последовательности $J_h^\infty = J_h^*$. Значит, $\{\mathbf{u}_h^k\}_{k=0}^\infty$ является минимизирующей последовательностью и для строго выпуклой, коэрцитивной функции $J_h(\mathbf{u}_h)$ верно [7]: $\|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^*\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$. Утверждение доказано.

3. Вычислительные эксперименты. Тестирование метода выделения развитой пластичности и его сравнение со стандартными алгоритмами проводилось на серии задач осесимметричного кручения изотропной длинной круглой трубы, жестко закрепленной по внутренней поверхности. Для анализа чувствительности методов к величине упрочнения материала использовалась кусочно-линейная функция упрочнения (1.8).

Согласно [10], пластическая деформация появляется на внутренней поверхности трубы, начиная с внешнего тангенциального перемещения

$$U_\varphi^* = \frac{\sigma_T b}{2\sqrt{3}\mu} (1 - \eta^2)$$

где a — внутренний радиус, b — внешний радиус, σ_T — предел текучести, $\eta = a/b$. Уругопластическое решение имеет вид

$$u_\varphi = U_\varphi \begin{cases} \frac{\eta}{h_0 q (1 - \eta^2)} \left[\kappa^2 \left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r} \right) - 2(1 - h_0) \frac{r}{a} \ln \frac{r}{a} \right] & (r \in [a, r_*]) \\ \frac{r}{b} - \frac{\kappa^2 \eta^2}{q(1 - \eta^2)} \left(\frac{b}{r} - \frac{r}{b} \right) & (r \in [r_*, b]) \end{cases}$$

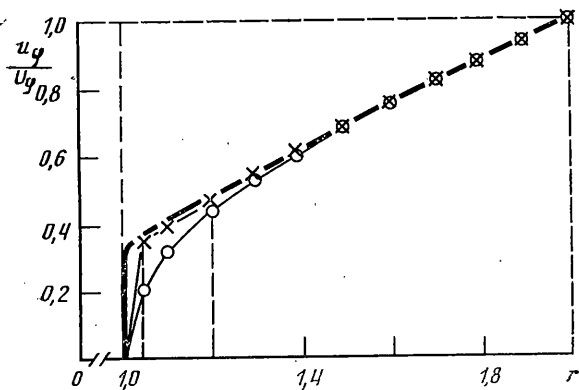
где $\kappa = r_*/a$, r_* — радиус границы раздела внутренней пластической зоны и внешней упругой зоны, $q = U_\varphi / U_\varphi^* \geq 1$. Параметр зоны пластичности κ определяется из уравнения $\kappa^2 - 2p \ln \kappa = p + (1 - p)q$, $p = (1 - h_0)/(1 - \eta^2 h_0)$.

Нетрудно проверить, что приведенное решение удовлетворяет всем уравнениям деформационной теории пластичности [4] и краевым условиям: $u_r(a) = u_\varphi(a) = 0$, $u_r(b) = 0$, $u_\varphi(b) = U_\varphi$.

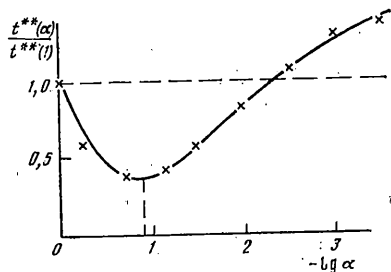
В случае малых коэффициентов упрочнения справедливо следующее разложение параметра κ в ряд по степеням h_0 : $\kappa = 1 + [(1 - \eta^2)(q - 1)]^{1/2} h_0^{1/2} + o(h_0^{3/2})$. При этом $\max_{a \leq r \leq b} \varepsilon_i(r) = \varepsilon_i(a) \gg \varepsilon_i^*$.

При численном анализе использовались следующие значения параметров задачи: $q = 3$, $b = 0.5$, $\sigma_T/\mu = 0.05$, $\nu = 0.31$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Сечение трубы разбивалось на треугольные элементы. Оценивалось время счета, точность определения поля перемещений и зоны пластичности. В качестве базового метода использовался метод переменных параметров упругости (1.7) как наиболее эффективный из серии стандартных методов [2]. Для решения первой подзадачи (2.2) в методе выделения развитой пластичности использовалась процедура покоординатной релаксации как одна из простейших для реализации [7], при решении второй подзадачи (2.3) применялся базовый метод. В критерии (2.4) брались $\omega = 0$, $\xi = 10^{-4}$.

На фиг. 2 приведена зависимость отношения времени счета t^* по стандартному методу ко времени счета t^{**} по предлагаемому методу ($\alpha = 1$) для двух дроблений области на конечные элементы: кривая 2 отвечает вдвое большему дроблению как по радиусу, так и по углу, чем кривая 1. Для больших и средних значений коэффициента упрочнения стандартный метод эффективнее описанного алгоритма по вре-



Фиг. 3



Фиг. 4

мени счета более, чем в два раза, при близкой точности определения поля перемещений и зоны пластичности. Но начиная с $h_0 \sim 10^{-1}$ эффективность стандартного метода резко падает. Предлагаемый метод работает практически так же, как и для больших коэффициентов упрочнения. Метод переменных параметров упругости дает неприемлемую погрешность в определении перемещения $u_\phi(r)$. На фиг. 3 показано решение задачи для $h_0 = 10^{-3}$ (жирная кривая соответствует точному решению, светлые кружки — методу переменных параметров упругости, а крестики — методу выделения развитой пластичности). С уменьшением характерного размера сетки область эффективности предлагаемого метода расширяется (фиг. 2). На фиг. 4 показана зависимость времени счета по описанному методу для различных значений параметра α . Видно, что оптимальное значение $\alpha \sim 0,1$.

Таким образом, предлагаемый метод выделения развитой пластичности для малоупрочняющихся материалов оказывается более эффективным, чем стандартные численные алгоритмы. Предлагаемый метод можно рассматривать как обобщение методов упругих решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. Победра Б. Е., Шешенин С. В. О методах упругих решений // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 59–72.
3. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
4. Колтунов М. А., Кравчук А. С., Майборода В. П. Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. шк., 1983. 351 с.
5. Темис Ю. М. Сходимость метода переменных параметров упругости при численном решении задач пластичности методом конечных элементов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1982. С. 24–34.
6. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
7. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 518 с.
8. Шешенин С. В. Метод упругих решений в теории двухзвенных ломаных // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 116–120.
9. Биргер И. А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // ПММ. 1957. Т. 15. Вып. 6. С. 765–770.
10. Серёгин Г. А. О корректности вариационных проблем механики идеально упруго-пластических сред // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 71–75.

Ленинград

Поступила в редакцию
10.X.1988