

УДК 539.3:534.1

© 1990 г.

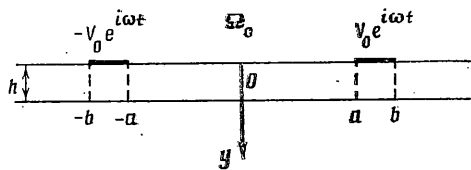
С. В. ЕРМАКОВ, Н. А. СЕНИК

ВОЗБУЖДЕНИЕ И СТРУКТУРА
СДВИГОВЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН
В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПЬЕЗОАКТИВНЫМ СЛОЕМ

Рассмотрена задача о возбуждении сдвиговых поверхностных волн в упругом полупространстве с пьезоактивным слоем с использованием двух полосовых электродов, расположенных на свободной поверхности слоя. Изучены условия существования волн в низкочастотной и высокочастотной областях. Установлены условия, при выполнении которых в слое существуют две поверхностные волны, и определены характеристики этих волн (распределение смещения по глубине, упругая и электрическая энергии; переносимые каждой из волн). Представлен численный расчет характеристик волн для различных значений параметра частоты.

1. Постановка задачи. Устройства на поверхностных акустических волнах (ПАВ) применяются в качестве линий задержки, полосовых и дисперсионных фильтров, резонаторов [1]. В большинстве случаев для возбуждения ПАВ в таких устройствах используется большое число расположенных на поверхности пьезоэлектрика разноименно заряженных электродов. Для расчета характеристик ПАВ используются различные методы. Наиболее строгим и общим является метод, основанный на использовании матрицы Грина [2], однако получаемые таким путем интегральные уравнения Фредгольма первого рода достаточно сложны. В случае возбуждения сдвиговых волн системой узких электродов удается получить явное решение интегральных уравнений [3], хотя в общем случае возможна только их численная реализация. Отметим работы [4, 5], в которых развивается предложенный в [6] метод расчета характеристик ПАВ, возбуждаемых встречно-штыревой системой электродов, работу [7], основанную на применении тройных интегральных уравнений к расчету характеристик волны Гуляева — Блюстейна в пьезоактивном полупространстве класса симметрии *6mm*, а также работу [8], в которой введены коэффициенты интенсивности плотности зарядов (КИЗ).

Рассмотрим упругое полупространство, занимающее область $y > h$, $|x| < \infty$, на поверхности $y = h$ которого расположен пьезоактивный слой: $0 \leq y \leq h$, $|x| < \infty$ класса симметрии *6mm*. Предполагается, что ось *Z* совпадает с кристаллографической осью шестого порядка, а на поверхности $y = 0$ слоя расположены два разноименно заряженных электрода, возбуждающие акустические колебания в системе. Контактная поверхность $y = h$ покрыта бесконечно тонким электродом с нулевым потенциалом, жесткость которого не учитывается. Полупространство $y < 0$ занято диэлектриком и акустически не взаимодействует со слоем (фиг. 1). На поверхности $y = 0$, свободной от электродов, между слоем и диэлектриком осуществляется идеальный электрический контакт, между слоем и упругим полупространством предполагается идеальный механический контакт. Исследование сопряженных электромеханических полей в рассматриваемой структуре проводится в электростатическом приближении.



Фиг. 1

Электростатическое поле в области $y < 0$ (область Ω_0) удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_r = 0, \quad \mathbf{E}_r = -\operatorname{grad} \varphi_r, \quad \mathbf{D}_r = \varepsilon_r \mathbf{E}_r \quad (1.1)$$

где \mathbf{D}_r , \mathbf{E}_r — векторы электрической индукции и напряженности электрического поля, φ_r — электрический потенциал, ε_r — диэлектрическая проницаемость, индекс $r=0$ для области Ω_0 .

Из уравнений (1.1) следует, что φ_0 удовлетворяет уравнению Лапласа, а его решение с учетом условия $\varphi_0 \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$ представляется формулой

$$\varphi_0(x, y) = \int_0^{\infty} A_0(p) \exp(py) \sin(px) dp \quad (1.2)$$

В формулах (1.1), (1.2), так же как и в дальнейшем, временной множитель $\exp(i\omega t)$ опущен.

Электростатические поля в слое пьезоэлектрика (область Ω_1) удовлетворяют первым двум уравнениям (1.1) при $r=1$, а вместо последнего уравнения (1.1) имеем [2, 7]:

$$D_{x1} = -\varepsilon_{11}^s \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - e_{15} \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad D_{y1} = -\varepsilon_{11}^s \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial w_1}{\partial y} \quad (1.3)$$

где w_1 — отличная от нуля компонента вектора упругого смещения в направлении кристаллографической оси z , ε_{11}^s — диэлектрическая проницаемость, e_{15} — пьезокоэффициент.

Уравнения движения для областей Ω_1 и Ω_2 (Ω_2 — область упругого полупространства $y > h$) в случае антиплоской деформации имеют вид

$$\partial \tau_{xzr} / \partial x + \partial \tau_{yzr} / \partial y = -\rho_r \omega^2 w_r \quad (1.4)$$

здесь $r=1$ относится к области Ω_1 , $r=2$ — к области Ω_2 , ρ_r — плотность, τ_{xz} , τ_{yz} — компоненты тензора напряжений.

Уравнения (1.4) дополняются уравнениями состояния

$$\tau_{xzr} = c_{44r} \frac{\partial w_r}{\partial x} + \theta e_{15} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \tau_{yzr} = c_{44r} \frac{\partial w_r}{\partial y} + \theta e_{15} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \quad (1.5)$$

где $\theta=1$ для области Ω_1 , $\theta=0$ для области Ω_2 , c_{44r} — модуль сдвига.

Для пьезоэлектрического слоя уравнения электроупругости (1.1), (1.3)–(1.5) сводятся к системе $\nabla^2(-\varepsilon_{11}^s \varphi_1 + e_{15} w_1) = 0$, $\nabla^2(c_{441} w_1 + e_{15} \varphi_1) + \rho_1 \omega^2 w_1 = 0$, из которой следует, что

$$\varphi_1 = e_{15} w_1 / \varepsilon_{11}^s + \Phi_{11}, \quad \nabla^2 \Phi_{11} = 0 \quad (1.6)$$

$$\nabla^2 w_1 + \kappa_1^2 w_1 = 0 \quad (1.7)$$

$$\kappa_1 = \omega / v_1, \quad v_1^2 = \mu_1 / \rho_1, \quad \mu_1 = c_{441} (1 + k_{15}^2)$$

$$k_{15}^2 = e_{15}^2 / (c_{441} \varepsilon_{11}^s), \quad \nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$$

С учетом первого уравнения (1.6) из (1.3) и (1.5) для области Ω_1 имеем

$$\tau_{xz1} = \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x}, \quad \tau_{yz1} = \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial y} \quad (1.8)$$

$$D_{x1} = -\varepsilon_{11}^s \partial \Phi_{11} / \partial x, \quad D_{y1} = -\varepsilon_{11}^s \partial \Phi_{11} / \partial y$$

С учетом нечетности электромеханических полей по переменной решение уравнений (1.6) и (1.7) представим формулами

$$\varphi_{11} = \int_0^{\infty} [\Phi_{11}(p) \exp(py) + \Phi_{12}(p) \exp(-py)] \sin(px) dp \quad (1.9)$$

$$w_1 = \int_0^{\infty} [B_1(p) \exp(p_1 y) + B_2(p) \exp(-p_1 y)] \sin(p_1 x) dp \quad (1.10)$$

Смещение w_2 в области Ω_2 удовлетворяет уравнению вида (1.7), а его решение с учетом условия излучения имеет вид

$$w_2 = \int_0^{\infty} D_2(p) \exp(-p_2 y) \sin(px) dp \quad (1.11)$$

$$\kappa_2 = \omega/v_2, \quad v_2^2 = \mu_2/\rho_2, \quad \mu_2 = c_{442}$$

В (1.10)–(1.11) введено обозначение $p_i = (p^2 - \kappa_i^2)^{1/2}$ ($i=1, 2$).

Неизвестные функции A_0 , Φ_{11} , Φ_{12} , B_1 , B_2 , D_2 , входящие в (1.2), (1.9)–(1.11), определяются граничными и контактными условиями.

Удовлетворяя контактным условиям при $y=h$ и учитывая условия $\Phi_1(x, h)=0$, $\tau_{yz1}(x, 0)=0$, после вычислений с использованием формул (1.5), (1.6), (1.8)–(1.11) получим

$$D_2 = B_1 \exp[h(p_1 + p_2)] + B_2 \exp[h(p_2 - p_1)]$$

$$B_1 = B_2 \{ p_1 + \exp(-hp_1) [(\mu_* p_2 - p_1) \operatorname{ch}(ph) - k_*^2 p \operatorname{sh}(ph)] \} \times$$

$$\times \{ p_1 - \exp(hp_1) [(\mu_* p_2 + p_1) \operatorname{ch}(ph) - k_*^2 p \operatorname{sh}(ph)] \}^{-1}$$

$$\begin{cases} \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \end{cases} = \mp \{ B_1 \exp[\mp h(p \mp p_1)] (\mu_* p_2 + p_1 \pm k_*^2 p) +$$

$$+ B_2 \exp[\mp h(p \pm p_1)] (\mu_* p_2 - p_1 \pm k_*^2 p) \} \mu_1 / (2e_{15} p) \quad (1.12)$$

В последней формуле (1.12) из двойных знаков для Φ_{11} берется верхний знак, а для Φ_{12} – нижний, кроме этого обозначено $k_*^2 = k_{15}^2 (1 + k_{15}^2)^{-1}$, $\mu_* = \mu_2/\mu_1$.

Оставшиеся условия для электрических полей при $y=0$ приводят к тройным интегральным уравнениям

$$\int_0^{\infty} B_2(p) \frac{\varepsilon_{11}^s R_3^*(p, \kappa) + \varepsilon_0 p R_1^*(p, \kappa)}{R_2^*(p, \kappa)} \sin(px) dp = 0 \quad (0 \leq x < a, b' < x < \infty) \quad (1.13)$$

$$\int_0^{\infty} B_2(p) \frac{R_1^*(p, \kappa)}{R_2^*(p, \kappa)} \sin(px) dp = \frac{e_{15} V_0}{2\mu_1} \quad (a < x' < b)$$

$$R_1^* = 2k_*^2 p_1 + \mu_* p_2 [p_1 p^{-1} \operatorname{sh}(ph) \operatorname{ch}(hp_1) - k_*^2 \operatorname{ch}(ph) \operatorname{sh}(hp_1)] +$$

$$+ p_1 [p_1 p^{-1} \operatorname{sh}(ph) \operatorname{sh}(hp_1) - k_*^2 p \operatorname{ch}(ph) \operatorname{ch}(hp_1)] -$$

$$- k_*^2 [p_1 \operatorname{ch}(ph) \operatorname{ch}(hp_1) - k_*^2 p \operatorname{sh}(ph) \operatorname{sh}(hp_1)]$$

$$R_2^* = p_1 - \operatorname{ch}(ph) [1 + \operatorname{th}(hp_1)] \operatorname{ch}(hp_1) [\mu_* p_2 + p_1 - k_*^2 p \operatorname{th}(ph)]$$

$$R_3^* = p_1 \operatorname{ch}(ph) \operatorname{ch}(hp_1) f_3^*(p, \kappa), \quad f_3^*(p, \kappa) = \mu_* p_2 + p_1 \operatorname{th}(hp_1) - k_*^2 p \operatorname{th}(ph)$$

Отметим, что функция $A_0(p)$ выражается через $B_2(p)$ соотношением $A_0 = 2\mu_1 R_1^* B_2 / (e_{15} R_2^*)$, вытекающим из условия $\varphi_0(x, 0) = \Phi_1(x, 0)$.

2. Решение системы интегральных уравнений. Вводя новую неизвестную функцию $B_0(p)$ соотношением $B_0(p) R_2^*(p) = B_2(p) [R_3^*(p)/p + \varepsilon R_1^*]$, ($\varepsilon = \varepsilon_0/\varepsilon_{11}^s$), преобразуем систему (1.13) к виду

$$\int_0^{\infty} \xi B_0(\xi) \sin(\xi x^*) d\xi = 0 \quad (0 \leq x^* < a^*, b^* < x^* < \infty) \quad (2.1)$$

$$\int_0^{\infty} B_0(\xi) \sin(\xi x^*) d\xi = \frac{V_* h}{2} - \int_0^{\infty} F_0(\xi) B_0(\xi) \sin(\xi x^*) d\xi \quad (a^* < x^* < b^*)$$

$$V_* = V_0 e_{15} [1 + \varepsilon (1 - k_*^2)] [\mu_1 (1 - k_*^2)]^{-1}$$

$$x^* = x/h, \quad a^* = a/h, \quad b^* = b/h, \quad \xi = ph$$

$$F_0(p) = [R_1^* - (1 - k_*^2) R_3^*/p] [(1 - k_*^2) (R_3^*/p + \varepsilon R_1^*)]^{-1}$$

Доопределяя правую часть уравнения (2.1) на интервал $a^* < x^* < b^*$ неизвестной функцией $q(x^*)$, пропорциональной скачку плотности электрических зарядов на электроде, получим

$$\xi B_0(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_{a^*}^{b^*} q(\eta) \sin(\eta \xi) d\eta \quad (2.2)$$

Предполагая, что $(T_n(z))$ — полиномы Чебышева первого рода:

$$q(\eta) = \frac{b^* - a^*}{[(b^* - \eta)(\eta - a^*)]^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n \left(2 \frac{\eta - a^*}{b^* - a^*} - 1 \right) \quad (2.3)$$

и учитывая значения интегралов [9] ($J_n(z)$ — функция Бесселя первого рода)

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) \sin(xz) dx}{(1-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} [1 - (-1)^n] (-1)^{(n-1)/2} J_n(z)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) \cos(xz) dx}{(1-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} [1 + (-1)^n] (-1)^{n/2} J_n(z)$$

с учетом (2.2), (2.3) получим

$$\xi B_0(\xi) = 2c^- \sum_{n=0}^{\infty} A_n S_n(\xi c^+) J_n(\xi c^-) \quad (2.4)$$

Функции $S_n(\dots)$ определены в [7]; $c^\pm = (b^* \pm a^*)/2$. Подставляя (2.4) во второе уравнение (2.1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{\infty} [1 + F_0(\xi)] S_n(\xi c^+) J_n(\xi c^-) \sin(\xi x^*) \frac{d\xi}{\xi} = \frac{V_* h}{4c^-} (a^* < x^* < b^*) \quad (2.5)$$

Учитывая разложение ($\varepsilon_0^* = 1/2$, $\varepsilon_k^* = 1$, $k \geq 1$):

$$\sin(\xi x^*) = \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon_h^* J_h(\xi c^-) S_h(\xi c^+) T_h \left(\frac{x^* - a^*}{c^-} - 1 \right)$$

после представления правой части (2.5) в форме ряда по полиномам Чебышева, получим бесконечную систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_n в (2.3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^* \Omega_{nk} = \delta_{0k} \quad (k=0, 1, \dots), \quad \delta_{00}=1, \quad \delta_{0k}=0 \quad (k \geq 1) \quad (2.6)$$

$$A_n^* = 2A_n c^- / (V_* h), \quad \Omega_{nk} = \omega_{nk} + \gamma_{nk}$$

$$\omega_{nk} = \int_0^{\infty} J_n(\xi c^-) J_k(\xi c^-) S_n(\xi c^+) S_k(\xi c^+) \frac{d\xi}{\xi}$$

$$\gamma_{nh} = \int_0^{\infty} F_0(\xi) J_n(\xi c^-) J_n(\xi c^-) S_n(\xi c^+) S_n(\xi c^+) \frac{d\xi}{\xi} \quad (2.7)$$

Вычисление коэффициентов ω_{nh} представлено в [7]. При вычислении коэффициентов γ_{nh} необходимо учесть, что при определенных значениях параметров, входящих в функцию $F_0(\xi)$, она может иметь простые полюсы на полуоси интегрирования и в этом случае интегралы в (2.7) необходимо понимать в смысле главного значения. Полюсы функции $F_0(\xi)$ совпадают с корнями уравнения $f_2 = R_3^*/p + \varepsilon R_1^* = 0$, которое после преобразований можно представить в виде

$$f_1 = \mu_* \lambda_2 (1 + \varepsilon \operatorname{th} \xi - k_*^2 \varepsilon \xi \lambda_1^{-1} \operatorname{th} \lambda_1) + \lambda_1 (\operatorname{th} \lambda_1 + \varepsilon \operatorname{th} \xi \operatorname{th} \lambda_1) - k_*^2 \xi [\operatorname{th} \xi + 2\varepsilon - 2\varepsilon (\operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \lambda_1)^{-1} - \varepsilon k_*^2 \xi \lambda_1^{-1} \operatorname{th} \lambda_1] = 0 \quad (2.8)$$

Отметим, что $f_2 = \lambda_1 \operatorname{ch}(pk) \operatorname{ch}(hp_1) f_1$, $k = \kappa_1 h$, $\beta = \kappa_2 / \kappa_1$, $\lambda_1 = (\xi^2 - k^2)^{1/2}$, $\lambda_2 = (\xi^2 - \beta^2 k^2)^{1/2}$. Аналитическое исследование корней уравнения (2.8) в общем случае затруднительно. В случае высокочастотных колебаний с длиной волны меньшей толщины слоя уравнение (2.8) может быть существенно упрощено, так как в этом случае $\operatorname{th} \xi \approx 1$, $\operatorname{th} \lambda_1 \approx 1$. В результате получим

$$(1 + \varepsilon - \varepsilon k_*^2 \xi \lambda_1) (\mu_* \lambda_2 + \lambda_1 - k_*^2 \xi) = 0 \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что в высокочастотной области всегда существует корень ξ_1 , определяемый равенством нулю первого сомножителя в (2.9):

$$\xi_1 = k(1 + \delta^2)^{-1/2}, \quad \delta = \varepsilon k_*^2 / (1 + \varepsilon) \quad (2.10)$$

Отметим, что это асимптотическое значение корня (2.10) соответствует волне Гуляева — Блюстейна для пьезоэлектрического полупространства с неэлектропроводной свободной границей [2]. Из анализа корней уравнения

$$\mu_* \lambda_2 + \lambda_1 = k_*^2 \xi \quad (2.11)$$

вытекают следующие утверждения: 1) при $k_*^2 = 0$ уравнение (2.11) действительных корней не имеет; 2) при $\beta > 1$, $\mu_* > k_*^2$ корень ξ_0 уравнения (2.11) расположен в интервале $\beta k < \xi_0 < \min(\xi', \xi'')$, где $\xi' = k \mu_* \beta (\mu_*^2 - k_*^4)^{-1/2}$ — корень уравнения $\mu_* \lambda_2 = k_*^2 \xi$, а $\xi'' = k(1 - k_*^4)^{-1/2}$ — корень уравнения $\lambda_1 = k_*^2 \xi$; если же $\mu_* < k_*^2$, то $\beta k < \xi_0 < \xi''$; 3) при $\beta < 1$, $\mu_* > k_*^2$ имеем $k < \xi_0 < \min(\xi', \xi'')$, а для $\mu_* < k_*^2$ имеем $k < \xi_0 < \xi''$.

Заметим, что корень ξ'' соответствует волне Гуляева — Блюстейна для пьезоэлектрического полупространства с электропроводной свободной поверхностью.

При вычислении корня ξ_0 в низкочастотной области необходимо использовать уравнение (2.8). В этой же области корни ξ' , ξ'' определяются решениями уравнений

$$\mu_* \lambda_2 (1 + \varepsilon \operatorname{th} \xi - k_*^2 \varepsilon \xi \lambda_1^{-1} \operatorname{th} \lambda_1) = k_*^2 \xi [\operatorname{th} \xi + \varepsilon - 2\varepsilon (\operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \lambda_1)^{-1} - \varepsilon k_*^2 \xi \lambda_1^{-1} \operatorname{th} \xi \operatorname{th} \lambda_1] \quad (2.12)$$

$$\lambda_1 (\operatorname{th} \lambda_1 + \varepsilon \operatorname{th} \xi \operatorname{th} \lambda_1) = k_*^2 \xi [\operatorname{th} \xi + \varepsilon - 2\varepsilon (\operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \lambda_1)^{-1} - \varepsilon k_*^2 \xi \lambda_1^{-1} \operatorname{th} \xi \operatorname{th} \lambda_1]$$

Учитывая наличие полюсов функции $F_0(\xi)$, после вычислений, аналогичных [7], получим

$$\begin{aligned} \gamma_{nm} = v.p. \int_0^{\infty} F_2(\xi) J_n(\xi c^-) J_m(\xi c^-) S_n(\xi c^+) S_m(\xi c^+) \times \\ \times (\operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \lambda_1 f_1(\xi) (1 - k_*^2) \xi)^{-1} d\xi - \pi i \sum_{l=0,1} F_2(\xi_l) J_n(\xi_l c^-) J_m(\xi_l c^-) \times \\ \times S_n(\xi_l c^+) S_m(\xi_l c^+) [\xi_l \operatorname{ch} \xi_l \operatorname{ch} [(\xi_l^2 - k^2)^{1/2}] f_1'(\xi_l) (1 - k_*^2)]^{-1} \quad (2.13) \\ F_2(\xi) = 2k_*^2 \xi + \mu_* \lambda_2 \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \lambda_1 (\operatorname{th} \xi - k_*^2 \xi \lambda_1^{-1} \operatorname{th} \lambda_1) + \\ + \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \lambda_1 (\lambda_1 \operatorname{th} \xi \operatorname{th} \lambda_1 - k_*^2 \xi) - k_*^2 \xi \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \lambda_1 (1 - k_*^2 \xi \lambda_1^{-1} \operatorname{th} \xi \operatorname{th} \lambda_1) - \\ - (1 - k_*^2) \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \lambda_1 (\mu_* \lambda_2 + \lambda_1 \operatorname{th} \lambda_1 - k_*^2 \xi \operatorname{th} \xi) \end{aligned}$$

При вычислении интегрального слагаемого в (2.13) необходимо учитывать существование двух нулей ξ_0 и ξ_1 функции $f_1(\xi)$. После решения системы (2.6) все интегрирующие поля могут быть определены.

3. Характеристики электроупругих полей. Не останавливаясь на деталях громоздких вычислений, приведем некоторые из характеристик полей, которые представляют практический интерес. Предполагая, что уравнение (2.8) имеет два корня ξ_0, ξ_1 , которым в полупространстве соответствуют две поверхностные волны w_{2j} ($j=0, 1$):

$$w_{2j} = -\pi V_* (\operatorname{ch} \lambda_{1j} - \operatorname{ch} \xi_j) \exp[(1-y^*)\lambda_{2j}] \Gamma_{2j}(\xi_j) H_j(t) \quad (y^* > 1), \quad y^* = y/h \quad (3.1)$$

$$\Gamma_{2j} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* J_n(\xi_j c^-) S_n(\xi_j c^+) [\operatorname{ch} \xi_j \operatorname{ch} \lambda_{1j} f_1'(\xi_j)]^{-1}$$

$$H_j(t) = \exp[i(\omega t + \xi_j x^*)] - \exp[i(\omega t - \xi_j x^*)], \quad \lambda_{1j} = (\xi_j^2 - k^2)^{1/2}, \quad \lambda_{2j} = (\xi_j^2 - \beta^2 k^2)^{1/2}$$

Соответствующие смещения в слое будут

$$w_{1j} = -\pi V_* G_{1j}(\xi_j, y^*) \Gamma_{2j}(\xi_j) H_j(t) \quad (0 \leq y^* \leq 1) \quad (3.2)$$

$$G_{1j} = \operatorname{ch}(y^* \lambda_{1j}) - \operatorname{ch} \xi_j \operatorname{ch}[(y^* - 1)\lambda_{1j}] + \operatorname{sh}[(y^* - 1)\lambda_{1j}] (\mu_* \lambda_{2j} \operatorname{ch} \xi_j - k_*^2 \xi_j \operatorname{sh} \xi_j) / \lambda_{1j}$$

Потенциал электрического поля поверхностной волны определяется формулой $\varphi_{1j} = e_{15} w_{1j} / \varepsilon_{11}^S + \varphi_{11j}$, где

$$\varphi_{11j} = -\pi V_* c_{44} e_{15}^{-1} C_{11j}(\xi_j, y^*) \Gamma_{2j}(\xi_j) H_j(t) \quad (3.3)$$

$$G_{11j} = \xi_j^{-1} \operatorname{ch} \lambda_{1j} \{ (\mu_* \lambda_{2j} + \lambda_{1j} \operatorname{th} \lambda_{1j}) \operatorname{sh}[\xi_j(1-y^*)] - k_*^2 \xi_j \operatorname{ch}[\xi_j(1-y^*)] \} + k_*^2 \operatorname{ch}(\xi_j y^*)$$

В дальнейшем рассмотрим волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x , что соответствует второму слагаемому функции $H_j(t)$.

На основании формул (3.1), (1.5) для напряжений в полупространстве получим выражения

$$\tau_{xz2j} = -\mu_2 \pi V_* \xi_j i h^{-1} (\operatorname{ch} \lambda_{1j} - \operatorname{ch} \xi_j) \exp[(1-y^*)\lambda_{2j}] \Gamma_{2j}(\xi_j) H_j^+(t) \quad (3.4)$$

$$\tau_{yz2j} = -\mu_2 \pi V_* h^{-1} \lambda_{2j} (\operatorname{ch} \lambda_{1j} - \operatorname{ch} \xi_j) \exp[(1-y^*)\lambda_{2j}] \Gamma_{2j}(\xi_j) H_j^+(t)$$

$$H_j^+(t) = \exp[i(\omega t - \xi_j x^*)]$$

Составляющие P_{xz2j} , P_{yz2j} вектора плотности потока упругой энергии, переносимого поверхностными волнами, определяются формулами

$$P_{xz2j} = -\tau_{xz2j} \partial w_{2j} / \partial t, \quad P_{yz2j} = -\tau_{yz2j} \partial w_{2j} / \partial t \quad (3.5)$$

Для плоской монохроматической волны для средних за период колебаний компонентов вектора плотности потока упругой энергии имеем

$$P_{xz2j}^* = 1/2 \omega \operatorname{Im}(\bar{\tau}_{xz2j} w_{2j}), \quad P_{yz2j}^* = 1/2 \omega \operatorname{Im}(\bar{\tau}_{yz2j} w_{2j}) \quad (3.6)$$

где черта сверху означает комплексно сопряженную величину.

Напряжения в пьезоактивном слое определяются формулами

$$\tau_{xz1j} = -\pi V_* c_{44} i \xi_j h^{-1} G_{4j} \Gamma_{2j}(\xi_j) H_j^+(t), \quad \tau_{yz1j} = -\pi V_* c_{44} h^{-1} G_{5j} \Gamma_{2j}(\xi_j) H_j^+(t) \quad (3.7)$$

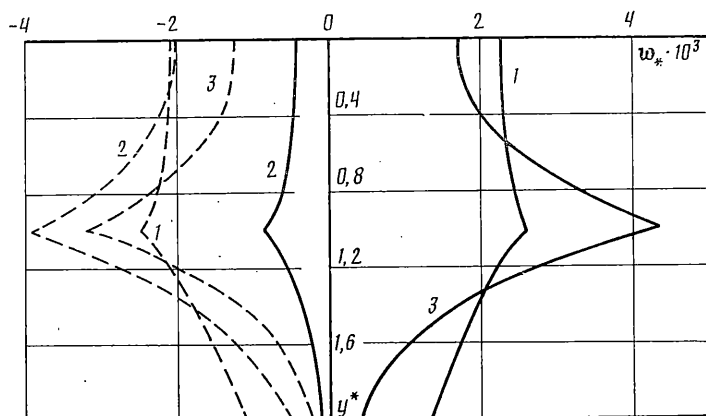
$$G_{4j} = G_{1j} + G_{11}, \quad G_{5j} = dG_{4j} / dy^*$$

Компоненты вектора электрической индукции поверхностных волн определяются соотношениями

$$D_{x1j} = \pi V_* c_{44} \varepsilon_{11}^S i \xi_j (e_{15} h)^{-1} G_{11j}(\xi_j, y^*) \Gamma_{2j}(\xi_j) H_j^+(t) \quad (3.8)$$

$$D_{y1j} = -\pi V_* c_{44} \varepsilon_{11}^S (e_{15} h)^{-1} (dG_{11j} / dy^*) \Gamma_{2j}(\xi_j) H_j^+(t)$$

Полная плотность потока энергии в слое представляет собой сумму



Фиг. 2

плотностей потоков упругой энергии

$$P_{x1j}^{*'} = 1/2 \omega \operatorname{Im}(\bar{\tau}_{xz1j} w_{1j}), \quad P_{y1j}^{*'} = 1/2 \omega \operatorname{Im}(\bar{\tau}_{yz1j} w_{1j}) \quad (3.9)$$

и электромагнитной

$$P_{x1j}^{*''} = 1/2 \omega \operatorname{Im}(-\bar{\varphi}_{1j} D_{x1j}), \quad P_{y1j}^{*''} = 1/2 \omega \operatorname{Im}(-\bar{\varphi}_{1j} D_{y1j}) \quad (3.10)$$

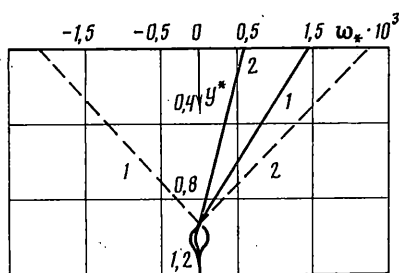
Представляет интерес сравнить суммарную энергию, переносимую каждой из волн, в слое и полупространстве. Интегрируя (3.6) по y^* в пределах от 1 до ∞ , получим

$$Q_{x2j} = \int_1^{\infty} P_{x2j}^* dy^*, \quad Q_{y2j} = \int_1^{\infty} P_{y2j}^* dy^* \quad (3.11)$$

Аналогично для слоя имеем

$$Q_{x1j} = \int_0^1 (P_{x1j}^{*'} + P_{x1j}^{*''}) dy^*, \quad Q_{y1j} = \int_0^1 (P_{y1j}^{*'} + P_{y1j}^{*''}) dy^* \quad (3.12)$$

При достаточно близком расположении поверхностных электродов возможно явление пробоя как между ними, так и между электродом и под-



Фиг. 3

ложкой. Прогнозировать критическое пробивное напряжение можно с использованием коэффициента интенсивности плотности зарядов. Опуская промежуточные вычисления, приведем выражения для коэффициентов интенсивности плотности зарядов [8]:

$$K_q^*(a^*) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^*, \quad K_q^*(b^*) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* \quad (3.13)$$

$$K_q^* = K_q (1 - k_*^2) c_{44} \{ [1 + \varepsilon (1 - k_*^2)] \varepsilon_{11}^s V_0 \}^{-1} (hc^-/\pi)^{1/2}$$

k	$K_Q(a^*)$	$K_Q(b^*)$	k	A_0'	A_0''	k	A_0'	A_0''
2	0,52-0,30i	0,48-0,006i	2	0,633	0,093	42	0,365	-0,156
4	0,34-0,29i	0,31-0,20i	4	0,299	-0,267	46	0,380	0,164
6	0,56+0,34i	0,51+0,38i	6	0,498	1,094	50	0,450	1,248
8	0,29-0,056i	0,29-0,036i	8	0,405	0,031	52	0,376	0,053
14	0,27-0,08i	0,25-0,08i	8	0,331	-0,485	54	0,372	-0,512
48	0,25-0,21i	0,24-0,20i	10	0,384	-0,064	58	0,374	-0,047
50	0,42+0,54i	0,40+0,52i	14	0,384	-0,064	60	0,414	-1,044
52	0,24+0,01i	0,23+0,01i	22	1,869	-6,271	66	2,718	-7,464
54	0,28-0,36i	0,27-0,34i	30	0,369	0,047			
60	0,58-0,82i	0,12-0,04i						

Амплитуда суммарного заряда G на электроде вычисляется интегрированием соотношения (2.3) по длине электрода, что приводит к выражению (временной множитель учтен):

$$G(t) = \varepsilon_{11}^s V_{0\pi} A_0 [1 + \varepsilon(1 - k_*^2)] (1 - k_*^2)^{-1} \exp(i\omega t) \quad (3.14)$$

Дифференцируя соотношение (3.14) по времени и отделяя в полученном выражении действительную часть, определим ток

$$j = -\varepsilon_{11}^s V_{0\pi} [1 + \varepsilon(1 - k_*^2)] (1 - k_*^2)^{-1} \omega (A_0' \sin \omega t + A_0'' \cos \omega t) \quad (3.15)$$

Здесь учтено, что $A_0^* = A_0' + iA_0''$.

4. Пример. Полученные выше результаты использовались для численного анализа электроупругих полей в полупространстве с пьезоэлектрическим слоем. Расчеты проводились при $\mu_* = 0,984$; $k_*^2 = 0,492$; $\beta^2 = 0,95$; $\varepsilon_0 = 0,05$; $\alpha = 0,8$ и $(b-a)/h = 5$ ($\alpha = (b-a)/(b+a)$).

Характер распределения амплитуды упругого смещения $w_* = -w/(\pi V_*)$ при значениях $k = \{2, 6, 8\}$ (кривые 1, 2, 3, соответственно) показан на фиг. 2, причем значения смещения w_* при $k=8$ увеличены в 10^2 и 10^3 раза для сплошной и штриховой кривых, соответственно. Здесь распределение смещений показано в сечении $x = a$ и $x = (a+b)/2$ (сплошные и штриховые кривые). Дальнейшее увеличение параметра k приводит к локализации этой волны в окрестности контактной плоскости $y^* = 1$ при этом амплитуда ее сильно уменьшается и при $k \approx 48$ (когда возникает вторая волна) она примерно в 10^8 раз меньше, чем при $k=2$.

На фиг. 3 показано распределение смещений в появившейся высокочастотной волне, соответствующей корню (2.10), причем кривые 1, 2 относятся к значениям $k = 48$ и $k = 50$, сплошная кривая показывает распределение смещения при $x = a$, $t = 0$, а штриховая при $x = (a+b)/2$, $t = 0$.

Ниже представлены энергетические характеристики низкочастотной и высокочастотной волн, соответственно, причем $Q_{x1j}^* = Q_{x1j}^{*'} + Q_{x1j}^{*''}$, где $Q_{x1j}^{*'}$ соответствует механической, а $Q_{x1j}^{*''}$ — электрической части энергии в (3.12) и оба слагаемых нормированы величиной $\pi^2 V_* \mu_{1\omega} / (2h)$. Энергия, переносимая в полупространстве, Q_{x2j}^* , нормирована величиной $\pi^2 V_* \mu_{2\omega} / (2h)$, ($j=1, 2$).

k	2	4	6	8	10	14	22	30
$Q_{x11}^{*'} \cdot 10^4$	1,33	3,53	0,31	$2,27 \cdot 10^{-3}$	$1,38 \cdot 10^{-1}$	$1,69 \cdot 10^{-2}$	$3,06 \cdot 10^{-2}$	$5,52 \cdot 10^{-8}$
$Q_{x11}^{*''} \cdot 10^5$	1,82	3,18	0,02	$1,61 \cdot 10^{-3}$	$9,91 \cdot 10^{-2}$	$1,28 \cdot 10^{-2}$	$2,04 \cdot 10^{-2}$	$4,33 \cdot 10^{-3}$
$Q_{x21}^* \cdot 10^4$	1,47	2,54	0,21	$1,54 \cdot 10^{-3}$	$9,84 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-2}$	$2,46 \cdot 10^{-2}$	$4,45 \cdot 10^{-3}$
k	50	52	54	56	58	60	62	66
$Q_{x12}^{*'} \cdot 10^5$	2,18	1,14	$2,2 \cdot 10^{-4}$	1,28	0,175	13,61	0,797	19,47
$Q_{x12}^{*''} \cdot 10^8$	3,36	1,72	$3,2 \cdot 10^{-4}$	1,83	0,245	18,67	1,07	26,05
$Q_{x22}^* \cdot 10^8$	1,90	0,852	$1,4 \cdot 10^{-4}$	0,71	0,841	5,68	0,29	5,59

Зависимости коэффициентов интенсивности плотности зарядов от параметра k , вычисленные по (3.15), приведены в табл. 1.

В табл. 2 приведены зависимости действительной A_0' и мнимой A_0'' частей величины A_0^* от параметра k , в соответствии с которыми по формуле (3.15) может

быть определен ток и произведен расчет работы преобразователя при возбуждении колебаний генератором тока [10].

Авторы выражают признательность Б. А. Кудрявцеву и В. З. Партопу за постоянный интерес к работе и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гуляев Ю. В., Медведь А. В.* Устройства на поверхностных акустических волнах и их применение в радиоэлектронной аппаратуре // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 8. С. 911–948.
2. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.
3. *Гилинский И. А., Попов В. В.* К теории возбуждения волн в пьезокристаллах узкими металлическими электродами // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23. № 2. С. 392–402.
4. *Бирюков С. В., Горышник Л. Л.* Теория взаимодействия поверхностных волн в пьезоэлектриках с электродными структурами // Ж. техн. физики. 1980. Т. 50. № 8. С. 1647–1654.
5. *Бирюков С. В.* Расчет электродных преобразователей поверхностных волн в пьезоэлектриках // Ж. техн. физики. 1980. Т. 50. № 8. С. 1655–1661.
6. *Ingebrigtsen K. A.* Surface waves in piezoelectrics // J. Appl. Phys. 1969. V. 40. № 7. P. 2681–2686.
7. *Кудрявцев Б. А., Партоп В. З.* О волнах Гуляева – Блюстейна в пьезоэлектрических средах // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 815–821.
8. *Партоп В. З., Кудрявцев Б. А., Сеник Н. А.* Об одном критерии электрического разрушения диэлектриков в сильно неоднородных полях // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 3. С. 611–615.
9. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. СМБ, Т. 2. М.: Наука, 1974. 296 с.
10. *Улитко А. Ф.* О некоторых особенностях постановки граничных задач электроупругости // Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 290–300.

Москва

Поступила в редакцию
13.IV.1988