

УДК 539.4

© 1990 г.

А. Б. ЕФИМОВ, В. В. ЗУЕВ, В. П. МАЙБОРОДА

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ УДАРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ РАЗУПРОЧНЕНИЯ

Многие материалы, как конструкционные, так и природные обладают при одноосном нагружении характерной особенностью зависимости напряжений от деформаций, а именно, падением предела текучести с ростом деформаций (разупрочняющиеся материалы). И если в статике некоторые задачи для сред с разупрочнением решались [1], то вопрос о динамическом нагружении подобных материалов исследован недостаточно [2]. В связи с этим в настоящей работе решается двумерная задача об осесимметричном ударном нагружении цилиндрическим бойком мишени, материалы которой обладают свойством разупрочнения. Одномерные задачи для подобных сред в случае продольно-сдвигового и нормального динамического нагружения рассмотрены в [3].

Будем считать, что компоненты тензора полных деформаций среды ε_{ij} представляют собой сумму компонент тензора упругих деформаций ε_{ij}^e и пластических ε_{ij}^p . Упругие деформации ε_{ij}^e связаны с напряжениями σ_{ij} законом Гука, а для пластических деформаций будем предполагать справедливыми определяющие соотношения, предложенные в [4]:

$$d\varepsilon_{kl}^p = h_e F_{kl ij} \partial\psi / \partial \varepsilon_{ij} d' \psi \quad (1)$$

$$h_e = - \left(F_{kl ij} \frac{\partial\psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial\psi}{\partial \varepsilon_{kl}^p} \right)^{-1}, \quad d' \psi = \frac{\partial\psi}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial\psi}{\partial T} dT \quad (2)$$

Здесь T — температура, функция $\psi(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, T)$ определяет в пространстве деформаций упругую область $\psi < 0$.

Соотношения (1) справедливы при $\psi = 0$ и $d' \psi > 0$; при $\psi < 0$, а также при $\psi = 0$, $d' \psi \leq 0$ изменений пластических деформаций не происходит. Величины $F_{kl ij}$ в предположении об упругой изотропии материала и независимости его упругих свойств от пластических деформаций имеют вид:

$$F_{kl ij} = \frac{\delta_{ik} \delta_{jl}}{2G} - \frac{3K - 2G}{18KG} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (3)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, K и G — соответственно модуль объемного сжатия и сдвига.

Соотношения (1) получены с общих позиций, опираясь на соображения термодинамического характера, их важным достоинством является возможность описать единым образом пластичность с упрочнением и разупрочнением, а также идеальную пластичность [4, 5].

Процесс соударения рассматривается обычно как адиабатический процесс, сопровождающийся изменением температуры. Однако, в дальнейшем будем считать, что в рассматриваемом диапазоне скоростей динамического нагружения эти изменения температуры несут существенны или мало влияют на физико-механические свойства материала, так что ими можно пренебречь.

Функцию $\psi(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$ примем в виде:

$$\psi = 2G [(e_{ij} - e_{ij}^p)(e_{ij} - e_{ij}^p)]^{1/2} - C(I_2^p), \quad I_2^p = 1/2 e_{ij}^p e_{ij}^p \quad (4)$$

где e_{ij} и e_{ij}^p — компоненты девiatorа соответственно тензора полных и пла-

стических деформаций. Функция $C=C(I_2^p)$ определяется экспериментальным путем, в частности по результатам одноосных экспериментов, и характеризует зависимость предела текучести от уровня достигнутых пластических деформаций; для упрочняющегося материала $C' > 0$, $C' = dC/dI_2^p$, для разупрочняющегося $C' < 0$ и $C' = 0$ в случае идеальной пластичности.

Для функции упрочнения $H_e = h_e^{-1}$ имеем:

$$H_e = 2G[1 + e_{ij}^p(e_{ij} - e_{ij}^p)C'/C] \quad (5)$$

В рамках предложенных определяющих соотношений рассмотрим в осесимметричной постановке задачу о нормальном ударе бойка цилиндрической формы по мишени конечной толщины. Как материал ударника, так и мишени, представляют собой деформируемые упруго-пластические среды, проявляющие свойства упрочнения, разупрочнения или постоянства предела текучести при изменении пластических деформаций. В качестве неизвестных будем рассматривать компоненты скорости u_r, u_z (ось z направлена вертикально вверх против направления скорости удара, ось r ей ортогональна), компоненты дивергента тензора напряжений s_r, s_z, s_{rz} , первый инвариант тензора напряжений (давление) p , компоненты тензора пластических деформаций $\varepsilon_r^p, \varepsilon_z^p, \varepsilon_{rz}^p$. Система уравнений для указанных неизвестных функций имеет вид (ρ_i — плотность i -го материала):

$$\rho_i \frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{\partial s_r}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial s_{rz}}{\partial z} = \frac{2s_r + s_z}{r}$$

$$\rho_i \frac{\partial u_z}{\partial t} - \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} - \frac{\partial s_z}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{s_{rz}}{r} \quad (6)$$

$$\frac{\partial s_r}{\partial t} + 4G \left(D - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2AG \frac{\partial u_z}{\partial r} + 2AG \frac{\partial u_r}{\partial z} + 2G \left(M + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} =$$

$$= 2G \left[(M+2D) - \frac{1}{3} \right] \frac{u_r}{r}$$

$$\frac{\partial s_z}{\partial t} + 2G \left(M + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2BG \frac{\partial u_z}{\partial r} + 2BG \frac{\partial u_r}{\partial z} + 4G \left(E - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} =$$

$$= 2G \left[(M+2E) - \frac{1}{3} \right] \frac{u_r}{r}$$

$$\frac{\partial s_{rz}}{\partial t} + 2AG \frac{\partial u_r}{\partial r} + G(2F-1) \frac{\partial u_z}{\partial r} + G(2F-1) \frac{\partial u_r}{\partial z} + 2BG \frac{\partial u_z}{\partial z} = 2G(A+B) \frac{u_r}{r}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - 3K \frac{\partial u_r}{\partial r} - 3K \frac{\partial u_z}{\partial z} = 3K \frac{u_r}{r}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial t} - 2D \frac{\partial u_r}{\partial r} - A \frac{\partial u_z}{\partial r} - A \frac{\partial u_r}{\partial z} - M \frac{\partial u_z}{\partial z} = -(M+2D) \frac{u_r}{r}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_z^p}{\partial t} - M \frac{\partial u_r}{\partial r} - B \frac{\partial u_z}{\partial r} - B \frac{\partial u_r}{\partial z} - 2E \frac{\partial u_z}{\partial z} = -(M+2E) \frac{u_r}{r}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{rz}^p}{\partial t} - A \frac{\partial u_r}{\partial r} - F \frac{\partial u_z}{\partial r} - F \frac{\partial u_r}{\partial z} - B \frac{\partial u_z}{\partial z} = -(A+B) \frac{u_r}{r}$$

$$A = 2GH_{s_r s_{rz}} / (C^2 H_e), B = 2GH_{s_z s_{rz}} / (C^2 H_e), D = GH_{s_r^2} / (C^2 H_e), E = GH_{s_z^2} / (C^2 H_e),$$

$$F = 2GH_{s_r s_z} / (C^2 H_e), M = 2GH_{s_r s_z} / (C^2 H_e), H = H_1 H_2$$

$$H_1 = H_1(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi = 0 \\ 0, & \psi < 0 \end{cases} \quad H_2 = H_2(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi > 0 \\ 0, & \psi \leq 0 \end{cases}$$

$$\psi = [2(s_r^2 + s_z^2 + s_{rz}^2 + s_r s_z)]^{1/2} - C \quad (7)$$

$$\psi = \frac{d'\psi}{dt} = \frac{2G}{C} \left[s_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + s_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + s_{rz} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r} (s_r + s_z) \right]$$

$$H_e = 2G + C' [(2\varepsilon_r^p + \varepsilon_z^p) s_r + (2\varepsilon_z^p + \varepsilon_r^p) s_z + 2s_{rz} \varepsilon_{rz}^p] / C$$

$$I_2^p = 1/2 [(\varepsilon_r^p)^2 + (\varepsilon_z^p)^2 + (\varepsilon_r^p + \varepsilon_z^p)^2 + 2(\varepsilon_{rz}^p)^2]$$

Для рассматриваемой осесимметричной задачи введем следующие обозначения в плоскости симметрии $\theta = \text{const}$: V_1 — область, занятая ударником с границей $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, Σ_1 — свободная от усилий граница, Σ_2 — контактная граница ударника и мишени, V_2 — область, занятая мишенью с границей Σ_3 — свободной от усилий. В качестве начальных условий принимается:

$$u_r(r, z) = s_r(r, z) = s_z(r, z) = s_{rz}(r, z) =$$

$$= p(r, z) = \varepsilon_r^p(r, z) = \varepsilon_z^p(r, z) = \varepsilon_{rz}^p(r, z) = 0, \quad (r, z) \in V$$

$$u_z(r, z) = u_0, \quad (r, z) \in V_1; \quad u_z(r, z) = 0, \quad (r, z) \in V_2$$
(8)

где $V = V_1 \cup V_2$ — область, занятая ударником и мишенью, u_0 — начальная скорость удара. Граничные условия:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{n\tau} = 0, \quad (r, z) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_3$$

$$[u_n] = [u_\tau] = 0, \quad (r, z) \in \Sigma_2$$
(9)

Для определения компонент скорости и тензора скоростей деформаций при численном решении поставленной задачи использовалась полностью консервативная разностная схема, основанная на аппроксимации вектора скорости по треугольному элементу линейной функцией [6]. Далее вычисляются значения полных деформаций и их приращений, величины $d'\psi$:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{n+1/2} = \varepsilon_{ij}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}, \quad \varepsilon_{ij}^{n+1} = \varepsilon_{ij}^n + \Delta \varepsilon_{ij}^{n+1/2}$$
(10)

$$d'\psi^{n+1/2} = 2G [s_r^n \Delta \varepsilon_r^{n+1/2} + s_z^n \Delta \varepsilon_z^{n+1/2} - (s_r^n + s_z^n) \Delta \varepsilon_\theta^{n+1/2} + 2s_{rz}^n \Delta \varepsilon_{rz}^{n+1/2}] / C^n$$

$$C^n = C(I_2^{pn}), \quad I_2^{pn} = [(\varepsilon_r^{pn})^2 + (\varepsilon_z^{pn})^2 + (\varepsilon_r^{pn} + \varepsilon_z^{pn})^2 + 2(\varepsilon_{rz}^{pn})^2] / 2$$

Изменения пластических деформаций вычисляются по формулам:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{pn+1/2} = s_{ij}^n H d'\psi^{n+1/2} / (C^n H_e^n)$$
(11)

$$H_e^n = 2G + [s_r^n \varepsilon_r^{pn} + s_z^n \varepsilon_z^{pn} + (s_r^n + s_z^n) (\varepsilon_r^{pn} + \varepsilon_z^{pn}) + 2s_{rz}^n \varepsilon_{rz}^{pn}] C' / C^n$$
(12)

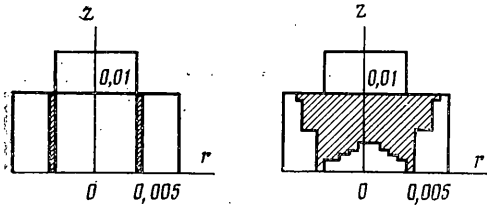
Для компонент тензора пластических деформаций, дивергента тензора напряжений и давления имеем

$$\varepsilon_{ij}^{pn+1} = \varepsilon_{ij}^{pn} + \Delta \varepsilon_{ij}^{pn+1/2}, \quad s_{ij}^{n+1} = 2G (e_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{ij}^{pn+1}), \quad p^{n+1} = K \varepsilon_{ij}^{n+1} \delta^{ij}$$
(13)

Зависимость функции C от интенсивности пластических деформаций I_2^p в расчетах задавалась соотношением $C = C_0 - \alpha I_2^p$.

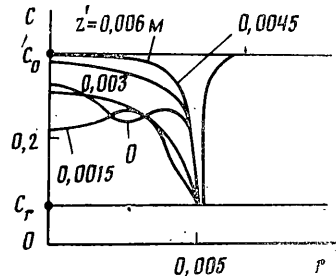
Величина α характеризует интенсивность изменения (падения или роста) предела текучести, C_0 — начальный предел прочности; после достижения предельной остаточной прочности предполагалось, согласно экспериментам, что $\alpha = 0$, $C = C_r$, где C_r — остаточная прочность. Как показывают результаты обработки ряда экспериментальных данных, зависимость вида C довольно хорошо описывает «падающую» деформационную диаграмму.

В качестве примера решения поставленной задачи рассмотрим случай удара со скоростью $u_0 = 250$ м/с стального цилиндра радиусом $r = 5 \cdot 10^{-3}$ м и высотой $h = r$ по мишени, выполненной из материала с плотностью $\rho = 2700$ кг/м³, $K = 64$ ГПа, $G = 26,2$ ГПа, $C_0 = 0,37$ ГПа, $C_r = 0,07$ ГПа. Диаметр мишени $d = 2 \cdot 10^{-2}$ м, толщина $l = 10^{-2}$ м. Рассматривался широкий диапазон изменения параметра α . На фиг. 1 и 2 соответственно для $\alpha = 25$ ГПа и $\alpha = 500$ ГПа показаны области мишени (заштрихованы), где материал перешел в разрушенное состояние ($C = C_r$) в момент времени $t = 3,5$ мкс и $t = 2,5$ мкс. Для стали принималось $\alpha = 0$ (идеальная пластичность), $C = C_0 = 1,7$ ГПа, $K = 175$ ГПа, $G = 81$ ГПа. Очевиден существенно различный характер разрушения мишени в зависимости от интенсивности разрушения, характеризуемой величиной α . На фиг. 3 и 4 приведены зависимости пределов текучести C от r (в силу осевой симметрии только для половины мишени) для различных глубин мишени

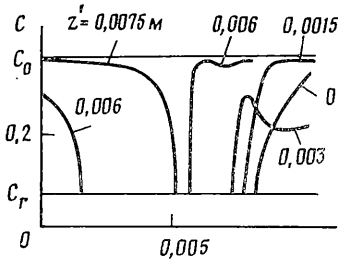


Фиг. 1

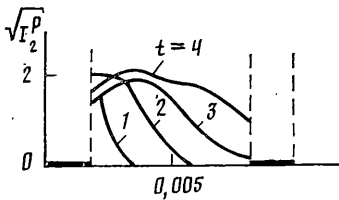
Фиг. 2



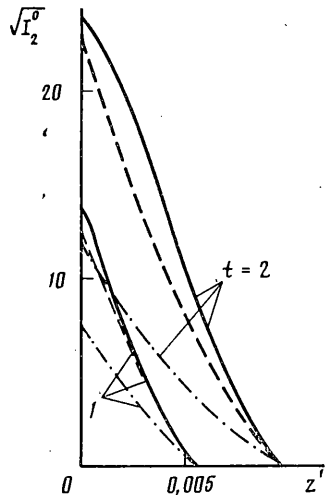
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 6



Фиг. 5

(на этой и последующих фигурах величина z' отсчитывается от лицевой поверхности мишени в направлении, противоположном оси z) при $\alpha=25$ ГПа и $t=3,5$ мкс (фиг. 3) и $\alpha=500$ ГПа, $t=2,5$ мкс (фиг. 4). Изменения интенсивности пластических деформаций сдвига $\sqrt{I_2^P}$, % от глубины z' в области под краем боя для различных α в моменты $t=1$ и $t=2$ мкс показаны на фиг. 5. Сплошная линия отвечает $\alpha=25$ ГПа (разупрочнение), пунктирная линия $\alpha=0$ (идеальная пластичность), штрих-пунктирная — $\alpha=-25$ ГПа (упрочнение). На фиг. 6 в различные моменты времени показаны зависимости $\sqrt{I_2^P}$, % от z' под краем ударника в случае удара со скоростью $u_0=50$ м/с по трехслойной мишени, состоящей из стальных лицевого и тыльного слоев одинаковой толщины $l_1=l_3=2 \cdot 10^{-3}$ м и среднего слоя, толщиной $l_2=3 \cdot 10^{-3}$ м, представляющего собой горную породу [7] плотностью $\rho=2500$ кг/м³, $K=8,4$ ГПа, $G=7,7$ ГПа, $C_0=40$ МПа, $C_r=7$ МПа, $\alpha=700$ ГПа. Из фиг. 6 видно, что лицевой и тыльный стальные листы остаются упругими, а средний слой разрушается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов В. А., Ключников В. Д. Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 116–121.
2. Майборода В. П., Кравчук А. С., Холин Н. Н. Скоростное деформирование конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1986. 261 с.
3. Зуев В. В. Об ударном нагружении мишени из композиционных материалов // Расчет на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Вып. 30. С. 148–155.
4. Зуев В. В. Определяющие соотношения теории пластичности в пространствах деформаций и напряжений // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. № 4. С. 792–795.
5. Зуев В. В. Об определяющих соотношениях теории пластичности // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Вып. 29. С. 39–46.
6. Буланцев Г. М., Корнеев А. И., Николаев А. П. О рикшетировании при ударе // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 138–143.
7. Bieniawski Z. I. Deformational behaviour of fractured rock under multiaxial compression // Proc. Structures, Solid Mechanics and Engineering Design. Southampton, London: Wiley, 1969. V. 1. P. 589–598.

Москва

Поступила в редакцию
19.IX.1989