МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1990

УДК 539.3

Ф. М. БОРОДИЧ

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ ЗАТУПЛЕННЫМ ТЕЛОМ ПО ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассматриваются динамические задачи о начальной стадии вдавливания или удара затупленного выпуклого тела о поверхность анизотропного линейно-упругого полупространства. Получено явное выражение для силы контактного взаимодействия тела с упругой произвольно анизотропной средой. Ранее аналогичные выражения другими методами были получены для частных случаев: акустической [1] и изотропной [2, 3] сред (в [2] рассматривалась задача о вдавливании тела вращения, а в [3] – пространственного тела). В задаче об ударе получены выражения связи между временем, глубиной вдавливания, скоростью и ускорением тела. В случае, когда тело является эллиптическим параболоидом эти выражения получены в элементарных функциях. Задачи о соударении упругих тел обычно рассматривались в квазистатической постановке Герца (см. [4] и приведенный там обзор). Нестационарные контактные задачи теории упругости с переменной областью контакта обычно изучались в автомодельном случае [5]. Исследованию различных аспектов неавтомодельных задач об ударе тел по изотропной упругой среде посвящены сравнительно немногочисленные работы [6–9] (плоские и осесимметричные задачи изучались в [6, 7][1–6], а пространственные – в [8, 9]). В [8] задача изучается в наиболее полной постановке (учитываются силы сцепления между телом и средой, возможность поворота оси тела и т. д.). В частности, из [8] вытекают результаты [2].

1. Постановки задач о вдавливании и об ударе. Пусть гладкое, затупленное, выпуклое тело, форма которого определяется графиком неотрицательной функции $f(x_1, x_2)$, со скоростью $V(t)$ вдавливается в первоначально покоящееся, однородное, линейно-упругое, анизотропное полупространство R_+^3. Пусть скорость тела направлена по нормали к границе полупространства. Пусть G – открытая область контакта тела со средой. Выберем начало декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ в точке первоначального контакта тела со средой. Направим ось x_3 в глубь полупространства, а оси x_1 и x_2 по его границе. Глубина вдавливания H вершины тела определяется по формуле $H(t)=\int_0^t V(\tau)\,d\tau$.

Возьмем сечение поверхности тела на высоте $H(t)$ и спроектируем его на плоскость $x_3=0$. Скорость распространения границы этой проекции в точке (x_1, x_2) равна $V(t)|\operatorname{grad} f(x_1, x_2)|^{-1}$. Так как тело затуплено, то

---

[1] *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Вертикальный удар цилиндра по упругой полуплоскости // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: Тез. докл. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1984. С. 125–131.

[2] *Кубенко В. Д.* Об одном способе решения задач проникания тел в акустическую и упругую среду // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: Тез. докл. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1984. С. 183–187.

[3] *Вестяк А. В., Тарлаковский Д. В.* Двумерные задачи о вертикальном ударе абсолютно твердых тел по упругому полупространству/2 Всесоз. конф. по теории упругости. Тез. докладов. Тбилиси: Мецниереба. 1984. С. 49–50.

[4] *Кубенко В. Д., Бабаев А. Е.* К исследованию удара жесткого тела об упругое полупространство/Тез. докл. 2 Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости. Фрунзе: Илим. 1985. С. 216–217.

[5] *Вестяк А. В., Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Вертикальный удар абсолютно твердым телом вращения по упругому полупространству/6 Всесоюз. съезд по теор. и прикл. мех. Ташкент: Фан. 1986. С. 163–164.

[6] *Попов С. Н.* Проникание жесткого тела вращения в упругое полупространство/Тр. 12 Науч. конф. мол. ученых Ин-та мех. АН УССР. 1987. С. 395–399. Рук. деп. в ВИНИТИ № 5389-В 87. Деп. от 29.07.87.

$|\mathrm{grad} f(0, 0)|=0$. Поэтому скорость распространения границы проекции сечения тела на некотором интервале времени будет превышать максимальную скорость распространения возмущения в среде. Пусть $\gamma(x_1, x_2, t)$ скорость движения границы области $G(t)$. Тогда для любого затупленного тела, вдавливаемого с ненулевой скоростью в любую упругую среду, будет существовать интервал времени $[0, t_*]$, на котором имеет силу равенство

$$\gamma(x_1, x_2, t)=V(t)|\mathrm{grad} f(x_1, x_2)|^{-1}, \ \forall(x_1, x_2)\in\partial G(t) \tag{1.1}$$

Стадию процесса вдавливания, на которой выполнено равенство (1.1), будем называть сверхсейсмической.

Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор перемещения частиц среды, $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ компоненты тензора напряжений, C_{ijkl} — компоненты тензора $\mathbf{C}$ упругих постоянных среды, ρ — плотность среды.

В динамических задачах теории упругости предполагается, что в точках $(\mathbf{x}, t)$, в которых функция $\mathbf{u}$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка по координатам и времени, выполнены уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t)-\rho\ddot{u}_i(\mathbf{x}, t)=0 \tag{1.2}$$

а напряжения связаны с перемещениями законом Гука

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}u_{k,l}, \ C_{ijkl}=C_{klij}=C_{jikl} \tag{1.3}$$

Здесь и далее индекс после запятой означает производную по координате, соответствующей этому индексу, точка над величиной — производную по времени. По повторяющимся индексам, если не оговорено специально, предполагается суммирование от 1 до 3.

В общем случае динамической задачи контакта компоненты тензора напряжений и вектора перемещений удовлетворяют следующим условиям.

Среда до начала контакта покоилась, поэтому выполнены начальные условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)=\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0)=0, \ \mathbf{x}\in R_+^3 \tag{1.4}$$

Вдавливаемое тело является гладким, поэтому на граничной плоскости отсутствуют касательные напряжения

$$\sigma_{\beta 3}(x_1, x_2, 0, t)=0, \ (x_1, x_2)\in R^2; \ \beta=1, 2 \tag{1.5}$$

Кроме этого на граничной плоскости выполнены условия

$$\begin{aligned} &u_3(x_1, x_2, 0, t)=H(t)-f(x_1, x_2), \ (x_1, x_2)\in G(t) \\ &\sigma_{33}(x_1, x_2, 0, t)=0, \ (x_1, x_2)\in R^2\backslash G(t) \end{aligned} \tag{1.6}$$

В строгой постановке в задаче об ударе скорость вдавливания должна определяться из уравнения Ньютона

$$m\dot{V}(t)=-P(t) \tag{1.7}$$

где m — масса тела, P — сила его взаимодействия со средой

$$P(t)=\iint\limits_{G(t)} \sigma_{33}(x_1, x_2, 0, t)\,dx_1\,dx_2$$

Однако, часто под задачей об ударе понимается динамическая задача об определении напряженно-деформированного состояния в среде при вдавливании в нее тела с постоянной скоростью $V(t)=V(0)=V_0$. Впредь, если не оговорено противоположное, будем считать, что функция $V(t)$ задана.

Задачу о вдавливании будем рассматривать только на сверхсейсмической стадии. Тогда вместо условия (1.6) можно записать

$$u_3(x_1, x_2, 0, t)=g(x_1, x_2, t)$$

$$g(x_1,x_2,t)=\begin{cases} H(t)-f(x_1,x_2), & H(t)-f(x_1,x_2)>0 \\ 0, & H(t)-f(x_1,x_2)\leqslant 0,\quad t\in[0,t_*] \end{cases} \tag{1.8}$$

Систему уравнений (1.2) и (1.3) можно записать в виде

$$C_{ijkl}u_{k,\,lj}-\rho u_i^{\cdot\cdot}=0 \tag{1.9}$$

Заметим, что функция g в (1.8) непрерывная, но не гладкая. В силу этого не существует решения задачи (1.9), (1.4), (1.5), (1.8) в классе дважды дифференцируемых функций. Поэтому надо ввести понятие обобщенного решения рассматриваемой задачи. Для этого предварительно введем некоторые определения [10—12].

Будем употреблять символ $L_2(R_+^3\times[0,\ t_*])$ для класса всех тензорозначных функций, квадрат которых интегрируем по Лебегу в $R_+^3\times[0,\ t_*]$. Пусть Ω — некоторая область, будем обозначать через $C_0^1(\Omega)$ множество функций, непрерывно дифференцируемых в Ω и обращающихся в нуль в пограничной полоске (своей для каждой функции) множества Ω; если Ω — бесконечная область, то потребуем дополнительно, чтобы функции из $C_0^1(\Omega)$ имели компактный носитель. Если существуют векторное поле $\mathbf{y}$ и поле тензоров второго ранга $\mathbf{z}$, интегрируемые в $R_+^3\times[0,\ t_*]$ такие, что выполнены соотношения (не суммировать):

$$\int\limits_0^{t_*}\int\limits_{R_+^3}\varphi_i^{\cdot}p_i dv\,dt=-\int\limits_0^{t_*}\int\limits_{R_+^3}\varphi_i y_i dv\,dt;\qquad \int\limits_0^{t_*}\int\limits_{R_+^3}\varphi_{i,j}p_i dv\,dt=-\int\limits_0^{t_*}\int\limits_{R_+^3}\varphi_i z_{ij} dv\,dt \tag{1.10}$$

$$dv\equiv dx_1dx_2dx_3,\quad \forall\varphi\in C_0^1(R_+^3\times[0,\ t_*])$$

то говорим, что $\mathbf{p}$ обладает обобщенной производной по времени $\mathbf{y}$ и обобщенным градиентом $\mathbf{z}$ на $R_+^3\times[0,\ t_*]$ и обозначаем $\partial^{\cdot}p_i\equiv y_i$ и $\partial_j p_i\equiv z_{ij}$. Через $W_2^1(R_+^3\times[0,\ t_*])$ обозначаем пространство Соболева всех векторозначных функций из $L_2(R_+^3\times[0,\ t_*])$, которые имеют обобщенные производные по времени и обобщенные градиенты, лежащие в $L_2(R_+^3\times[0,\ t_*])$. Говорят [12], что упорядоченная пара $[\mathbf{u},\ \boldsymbol{\sigma}]$ является слабым эластодинамическим состоянием на $R_+^3\times[0,\ t_*]$, соответствующим полям: объемных сил $\mathbf{F}$, плотности ρ и упругих постоянных $\mathbf{C}$, если только выполнены соотношения (не суммировать по i):

$$\mathbf{F}\in L_2(R_+^3\times[0,\ t_*]);\ \mathbf{u}\in W_2^1(R_+^3\times[0,\ t_*])$$

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\partial_l u_k,\quad (\mathbf{x},\ t)\in R_+^3\times[0,\ t_*] \tag{1.11}$$

$$\int\limits_0^{t_*}\int\limits_{R_+^3}(\rho\varphi_i^{\cdot}\partial^{\cdot}u_i-\varphi_{i,j}\sigma_{ij}+\varphi_i F_i)\,dv\,dt=0,\qquad \forall\varphi\in C_0^1(R_+^3\times[0,t_*])$$

Множество слабых эластодинамических состояний будем обозначать через $E_w(\mathbf{F},\ \rho,\ \mathbf{C};\ R_+^3\times[0,\ t_*])$.

Будем рассматривать решение задачи о вдавливании среди слабых эластодинамических состояний. Помимо этого будем также считать, что векторная функция $\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)$ непрерывна.

Итак, рассмотрим состояние $[\mathbf{u},\ \boldsymbol{\sigma}]\in E_w(0,\ \rho,\ \mathbf{C};\ R_+^3\times[0,\ t_*])$, $\mathbf{u}\in C(R_+^3\times\times[0,\ t_*])$, подчиняющееся обобщенным начальным и граничным условиям

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\ 0)=0,\ u_3(x_1,\ x_2,\ 0,\ t)=g(x_1,\ x_2,\ t)$$

$$\int\limits_0^{t_*}\int\limits_{R_+^3}(\rho\varphi_i^{\cdot}\partial^{\cdot}u_i-\varphi_{i,j}C_{ijkl}\partial_l u_k)\,dv\,dt=0 \tag{1.12}$$

Последнее интегральное тождество выполняется для любой функции φ такой, что $\varphi\in C^1(R_+^2\times[0,\ t_*])$, $\varphi(\mathbf{x},\ t_*)=0$ и $\varphi_3\in C_0^1(R_+^3)$ при $0\leqslant t\leqslant t_*$.

Пусть функция $g(x_1, x_2, t)$ является дважды дифференцируемой. Тогда легко видеть, что классическое (гладкое) решение начально-краевой задачи (1.9), (1.4), (1.5), (1.8) является обобщенным в смысле (1.12) и наоборот, любое обобщенное в смысле (1.12) решение является дважды непрерывно дифференцируемым. Доказательство осуществляется при помощи основной леммы вариационного исчисления, аналогично тому, как проводится доказательство соответствующих утверждений для других начально-краевых задач [11—13].

2. Начально-краевая задача для плоских волн. Пусть к граничной плоскости $x_3=0$, рассматриваемого однородного, анизотропного упругого полупространства R_+^3, начиная с момента времени $t=0$ приложена нагрузка, одинаковая для всех точек этой плоскости. В силу того, что среда однородная, а возмущения во всех точках плоскости одинаковы, в упругой среде возникнут плоские волны

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\equiv\mathbf{u}(x_3, t) \tag{2.1}$$

Ниже получены явные выражения для перемещений и напряжений, дающих, в зависимости от гладкости граничных условий, классическое и обобщенное решение задачи о плоских волнах.

Для плоской волны, с учетом (2.1), имеем $\mathbf{u}_{,\beta}(x_3, t)=0$, $\beta=1, 2$. Тогда система уравнений (1.9) принимает вид

$$\Lambda_{ik}u_{k,33}-\ddot{u}_i=0,\quad \Lambda_{ik}=C_{i3k3}/\rho \tag{2.2}$$

Матрица $\boldsymbol{\Lambda}=(\Lambda_{ik})$ симметрична и положительно определена, поэтому у нее существуют три ортогональных собственных вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, которым соответствуют три действительных собственных числа c_1^2, c_2^2, c_3^2 (не суммировать):

$$\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}_i=c_i^2\mathbf{e}_i \tag{2.3}$$

Собственные числа c_i^2 — положительны в силу положительной определенности матрицы $\boldsymbol{\Lambda}$.

Разложим вектор $\mathbf{u}(x_3, t)$ по ортогональному базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{u}(x_3, t)=u_1^0\mathbf{e}_1+u_2^0\mathbf{e}_2+u_3^0\mathbf{e}_3 \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.2) и учитывая (2.3), получим (не суммировать):

$$c_i^2\overset{0}{u}_{i,33}-\overset{0\cdot\cdot}{u_i}=0 \tag{2.5}$$

Легко показать справедливость следующей леммы восходящей к Даламберу.

Лемма Даламбера. Пусть функция $F(x, t)$, определенная при $x\geqslant0$ и $t\geqslant0$, $F(x, t)\in C^2(R_+\times[0, t_*])$, удовлетворяет одномерному волновому уравнению с нулевыми начальными условиями $F_{,xx}-a^{-2}\ddot{F}=0$, $F(x, 0)=\dot{F}(x, 0)=0$. Тогда F представима в виде

$$F(x, t)=\Phi(x/a-t) \tag{2.6}$$

где $\Phi(\xi)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента такая, что $\Phi'(0)=\Phi''(0)=0$; $\Phi(\xi)=0$ при $\xi\geqslant0$.

Применив лемму Даламбера, из (2.5) получим $u_i^0=\Phi_i(x_3/c_i-t)$. Отсюда и из (2.4) следует $\mathbf{u}(x_3, t)=\Phi_i(x_3/c_i-t)\mathbf{e}_i$.

Легко видеть, что в рассматриваемой задаче вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}_3(x_3, t)$ на произвольной плоскости $x_3=\mathrm{const}$ определяется выражением

$$\boldsymbol{\sigma}_3(x_3, t)=\rho\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{u}_{,3}(x_3, t).$$

Подставим сюда полученное выше разложение вектора $\mathbf{u}$ по базису $\mathbf{e}_i$, с учетом того, что векторы $\mathbf{e}_i$ собственные для матрицы $\boldsymbol{\Lambda}$, получим

$$\boldsymbol{\sigma}_3(x_3, t)=\rho c_i\Phi_i'(x_3/c_i-t)\mathbf{e}_i \tag{2.7}$$

где штрих над величиной означает производную по аргументу.

Какая картина колебаний будет в плоскости $x_3=\mathrm{const}$? Пусть $c_1\geqslant c_2\geqslant c_3$. Тогда при $0\leqslant t<x_3/c_1$ плоскость покоится; при $x_3/c_1\leqslant t<x_3/c_2$ все коле-

бания параллельны вектору $\mathbf{e}_1$; при $x_3/c_2 \leqslant t < x_3/c_3$ все колебания происходят в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$; при $t \geqslant x_3/c_3$ происходят пространственные колебания. Аналогичные утверждения будут справедливы и для вектора усилий $\boldsymbol{\sigma}_3(x_3, t)$.

Рассмотрим теперь начально-граничную задачу для плоских волн. Будем искать вектор $\mathbf{u}(x_3, t)$, удовлетворяющий системе уравнений (2.2), нулевым начальным условиям и граничным условиям на плоскости $x_3=0$ ($Y(t)$ — заданная, дважды непрерывно дифференцируемая функция времени):

$$\sigma_{13}(0, t)=\sigma_{23}(0, t)=0 \tag{2.8}$$

$$u_3(0, t)=Y(t) \tag{2.9}$$

Пусть $\mathbf{v}$ — вектор единичной нормали к границе полупространства R_+^3, направленный внутрь среды. Тогда условие (2.8) можно переписать в виде ($\lambda(t)$ — искомая функция):

$$\boldsymbol{\sigma}_3(0, t)=\lambda(t)\mathbf{v} \tag{2.10}$$

Пусть разложение вектора $\mathbf{v}$ по базису $\mathbf{e}_i$ имеет вид

$$\mathbf{v}=\alpha_i\mathbf{e}_i \tag{2.11}$$

Из (2.10), (2.11) и (2.7) получим

$$\rho c_i \Phi_i'(x_3/c_i - t)\,|_{x_3=0}\mathbf{e}_i=\lambda(t)\alpha_i\mathbf{e}_i$$

Из последнего равенства вытекает, что (не суммировать): $\Phi_i'(-t)=$ $=\alpha_i(\rho c_i)^{-1}\lambda(t)$. После интегрирования получим (не суммировать):

$$\Phi_i(-t)=\alpha_i(\rho c_i)^{-1}k(t), \qquad k(t)=-\int_{-t}^{0}\lambda(-\tau)\,d\tau \tag{2.12}$$

С другой стороны, из (2.4) и (2.11) имеем

$$u_3(x_3, t)=\langle\mathbf{u}(x_3, t), \mathbf{v}\rangle=\Phi_i(x_3/c_i-t)\alpha_i \tag{2.13}$$

Определим постоянную A для упругой анизотропной среды по формуле

$$A=(\alpha_j^2/c_j) \tag{2.14}$$

Сравнив выражение (2.13) при $x_3=0$ с выражением (2.12), с учетом (2.9) получим $k(t)=\rho A^{-1}Y(t)$.

Отсюда и из (2.12), (2.4) получаем окончательное выражение для вектора перемещений, дающее решение рассматриваемой начально-краевой задачи

$$\mathbf{u}(x_3, t)=\alpha_i c_i^{-1}A^{-1}Y(t-x_3/c_i)\mathbf{e}_i \tag{2.15}$$

Отсюда, с учетом (2.7), получим выражения для вектора напряжений в плоскости $x_3=\mathrm{const}$:

$$\boldsymbol{\sigma}_3(x_3, t)=-\rho\alpha_i A^{-1}Y'(t-x_3/c_i)\mathbf{e}_i \tag{2.16}$$

Поставим теперь начально-краевую задачу для плоских волн среди слабых эластодинамических состояний. Будем считать, что $\mathbf{u}(x_3, t)$, удовлетворяет следующим условиям (не суммировать по i):

$$\begin{gathered}\mathbf{u}\in W_2^1(R_+\times[0, t_*]), \quad \mathbf{u}\in C(R_+\times[0, t_*]), \quad \mathbf{u}(x_3, 0)=0 \\ u_3(0, t)=Y(t), \quad \int_0^{t_*}\int_0^{\infty}(\psi_{i,3}\Lambda_{ik}\partial_3 u_k-\psi_i^{\boldsymbol{\cdot}}\partial^{\boldsymbol{\cdot}}u_i)\,dx_3\,dt=0\end{gathered} \tag{2.17}$$

Последнее тождество выполняется для любых $\boldsymbol{\psi}$ таких, что $\boldsymbol{\psi}\in C^1(R_+\times$ $\times[0, t_*])$, $\boldsymbol{\psi}(x_3, t_*)=0$ и $\psi_3\in C_0^1(R_+)$ при $0\leqslant t\leqslant t_*$.

Утверждение 1. Обобщенное решение начально-краевой задачи (2.17) для плоских волн в анизотропном упругом полупространстве имеет вид (2.15) и (2.16).

Доказательство. Если $Y(\xi)$ — непрерывная функция одного аргумента, то выражение (2.15) удовлетворяет условиям (2.17), т. е. является обобщенным решением задачи, рассматриваемой в п. 2. В силу теоремы единственности для гиперболических систем уравнений теории упругости [12], такое решение одно. Выражение (2.16) дает величину вектора напряжений (здесь штрих — обобщенная производная).

3. Результирующие усилия в задаче о вдавливании тела. Далее докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть слабое эластодинамическое состояние $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}]$ является обобщенным решением начально-краевой задачи (1.12). Тогда интегральное перемещение $\mathbf{w}(x_3, t) = \int\int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\,dx_1\,dx_2$ и вектор силы контакта $\mathbf{T}(x_3, t) = \int\int \boldsymbol{\sigma}_3(\mathbf{x}, t)\,dx_1\,dx_2$ определяются следующими формулами

$$\mathbf{w}(x_3, t) = \alpha_i A^{-1} c_i^{-1} Y(t - x_3/c_i)\,\mathbf{e}_i, \quad T(x_3, t) = -\rho\alpha_i A^{-1} V(t - x_3/c_i)\,Q(t - x_3/c_i)\,\mathbf{e}_i \tag{3.1}$$

где $Q(t)$ — площадь области $G(t)$.

Следствие. На сверхсейсмической стадии сила контактного взаимодействия тела со средой определяется выражением

$$P(t) = \rho A^{-1} V(t)\,Q(t), \quad P \equiv -\langle \mathbf{T}(0, t), \boldsymbol{\nu}\rangle \tag{3.2}$$

где постоянные A и α_i зависят только от упругих свойств среды и определены в (2.11) и (2.14).

Для доказательства сформулируем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $u(x) \in L(R)$ и u имеет компактный носитель. Пусть $v(x) = \partial_x u(x)$. Тогда:

1) $v(x) = 0$ почти всюду при $x \in R \setminus \operatorname{supp} u$; 2) $\int\limits_R v(x)\,dx = 0$.

Пусть $u(\mathbf{x}, t) \in W_2^1(R_+^3 \times [0, t_*])$ и u имеет компактный носитель при $0 \leqslant t \leqslant t_*$. Введем функции $w(x_3, t)$, $g_i(x_3, t)$ и $g_4(x_3, t)$ с помощью равенств

$$w(x_3, t) = \int\int\limits_{R^2} u\,dx_1\,dx_2, \qquad g_4(x_3, t) = \int\int\limits_{R^2} \partial^{\boldsymbol{\cdot}} u\,dx_1\,dx_2, \qquad g_i(x_3, t) = \int\int\limits_{R^2} \partial_i u\,dx_1\,dx_2 \tag{3.3}$$

Лемма 2. Функции $w(x_3, t)$, $g_i(x_3, t)$, $g_4(x_3, t)$ обладают следующими свойствами: 1) w, g_i, g_4 — определены почти всюду в $R_+ \times [0, t_*]$ и суммируемы; 2) g_3 и g_4 являются обобщенными производными функции $w(x_3, t)$ по x_3 и t и соответственно; 3) g_1 и g_2 равны нулю почти для всех x_3 и t.

Действительно, первое следует из теоремы Фубини, третье — из леммы 1. Докажем второе утверждение. Пусть $\psi_0(\mathbf{x}, t) \in C_0^1(R_+^3 \times [0, t_*])$ и ψ_0 равна $\psi(x_3, t)$ на $\operatorname{supp} u$. Тогда из определения (1.10) следует

$$\int\limits_0^{t_*}\int\limits_{R_+^3} u\psi_{0,3}\,dv\,dt = -\int\limits_0^{t_*}\int\limits_{R_+^3} \psi_0 \partial_3 u\,dv\,dt = -\int\limits_0^{t_*}\int\limits_0^{\infty} \psi\left[\int\int\limits_{R^2} \partial_3 u\,dx_1\,dx_2\right] dx_3\,dt = -\int\limits_0^{t_*}\int\limits_0^{\infty} \psi g_3\,dx_3\,dt$$

С другой стороны, имеем

$$\int\limits_0^{t_*}\int\limits_{R_+^3} u\psi_{0,3}\,dv\,dt = \int\limits_0^{t_*}\int\limits_0^{\infty} \psi_{,3}\left(\int\int\limits_{R^2} u\,dx_1\,dx_2\right) dx_3\,dt = \int\limits_0^{t_*}\int\limits_0^{\infty} \psi_{,3} w(x_3, t)\,dx_3\,dt$$

Таким образом, имеем $g_3 = \partial_3 w$. Аналогично доказывается, что $g_4 = \partial^{\boldsymbol{\cdot}} w$.

Лемма 3. Функция $w(x_3, t) \in W_2^1(R_+ \times [0, t_*])$.

Доказательство. По предположению $u \in W_2^1(R_+^3 \times [0, t_*])$. Тогда из неравенства Коши — Буняковского следует

$$\int_0^{t_*}\int_{R_+} w^2 dx_3\, dt = \int_0^{t_*}\int_{R_+}\left(\iint_{R^2} u dx_1\, dx_2\right)^2 dx_3\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{t_*}\int_{R_+}\left[\iint_{R^2} u^2(x,t)\, dx_1\, dx_2 \int_{\operatorname{supp} u \cap R^2} 1^2 dx_1\, dx_2\right] dx_3\, dt$$

Так как носитель функции u ограничен, то $w \subset L_2(R_+ \times [0, t_*])$. Аналогичные утверждения для функций g_3 и g_4, построенным в (3.3) по $u(\mathbf{x}, t)$, доказываются точно так же.

Пусть $\mathbf{u}$ — обобщенное решение начально-краевой задачи в смысле (1.12), $\mathbf{w}(x_3, t)$ — вектор интегральных перемещений, полученный из этого решения.

Заметим, что в начальный момент $\operatorname{supp} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$ ограничен. Из энергетических оценок [13] вытекает, что скорость распространения возмущения в среде конечна, поэтому носитель функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ограничен при $0 \leqslant t \leqslant t_*$.

Утверждение 2. Вектор $\mathbf{w}$ удовлетворяет следующей начально-краевой задаче

$$\mathbf{w} \in W_2^1(R_+ \times [0, t_*]),\ \mathbf{w} \in C(R_+ \times [0, t_*]) \tag{3.4}$$

$$\mathbf{w}(x_3, 0) = 0, \qquad w_3(0, t) = Y(t), \qquad Y(t) \equiv \iint_{R^2} g(x_1, x_2, t)\, dx_1\, dx_2$$

$$\int_0^{t_*}\int_{R_+} (\rho\psi_i{}^{\cdot}\partial^{\cdot} w_i - \psi_{i,3} C_{i3k3}\partial_3 w_k)\, dx_3\, dt = 0$$

Последнее тождество выполняется для любых функций ψ таких, что $\psi(x_3, t) \in C^1(R_+ \times [0, t_*])$, $\psi(x_3, t_*) = 0$ и $\psi_3 \in C_0^1(R_+)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*$.

Доказательство. Из (1.5), с учетом лемм 1—3, получаем (3.4).

Из утверждения следует, что постановка начально-краевой динамической задачи для интегральной функции перемещений $\mathbf{w}(x_3, t)$ совпадает с постановкой начально-краевой задачи для плоских волн. Решение одномерной задачи для плоских волн получено в § 2 явно. Из этого явного решения следует утверждение сформулированной выше теоремы и следствия из нее.

Замечание. Если процесс вдавливания миновал сверхсейсмическую стадию и на плоскости $x_3 = 0$ существует область $G_1(t)$ (лежащая вне области $G(t)$), точки которой возмущены, то Y в условии (3.4) — интеграл перемещений $u_3(x_1, x_2, 0, t)$ и вместо (3.1) можно (аналогично тому, как это проделано для акустической среды [1]) записать

$$\mathbf{T}(x_3, t)|_{x_3=0} = -\rho A^{-1}\alpha_i [V(t - x_3/c_i) Q(t - x_3/c_i) + V_1(t - x_3/c_i) Q_1(t - x_3/c_i)]\, \mathbf{e}_i$$

где Q_1 — площадь области G_1, V_1 — средняя скорость точек среды, лежащих в G_1.

4. Удар пространственного тела по поверхности анизотропного упругого полупространства. Приводимые ниже формулы дают закон движения затупленного твердого тела произвольной формы после его удара со скоростью $V(0)$ по поверхности анизотропного упругого полупространства. Пусть задана начальная скорость движения тела $V(0)$, а саму функцию $V(t)$ надо найти из условия (1.7). При сверхсейсмическом движении точек линии $\partial G(t)$ площадь Q_1 равна нулю. Тогда из (1.7) и (3.2) имеем

$$mV^{\cdot}(t) = -\rho A^{-1} V(t) Q(t) \tag{4.1}$$

Заметим, что $V^{\cdot}(t) = V dv/dH$, где $v[H(t)] \equiv V(t)$. Тогда из (4.1) получим $m dv/dH = -\rho A^{-1} Q(H)$, $Q[H(t)] \equiv Q(t)$.

Интегрируя это уравнение, получаем выражение для скорости тела

$$v(H)=V(0)-\rho Y(H)A^{-1}m^{-1}, \qquad Y(H)=\int_0^H Q(h)\,dh \tag{4.2}$$

а также связь между t и глубиной вдавливания H:

$$t=\int_0^H \frac{dh}{V(0)-\rho Y(h)A^{-1}m^{-1}} \tag{4.3}$$

Здесь $Y(H)$ — объем тела под срезом на высоте H.

В частности, если тело является эллиптическим параболоидом, т. е. $f(x_1, x_2)=ax_1^2+bx_2^2$, $b>a>0$, то из (4.2) имеем $Q(h)=\pi h(ab)^{-1/2}$, $Y(H)={}^1/_2\pi H^2(ab)^{-1/2}$.

Подставляя это выражение в (4.3) и интегрируя, получаем

$$t=\beta^{-1}\ln\left|\frac{1+HV^{-1}(0)\beta/2}{1-HV^{-1}(0)\beta/2}\right|, \qquad \beta=\{2\pi\rho V(0)/[Am(ab)^{1/2}]\}^{1/2} \tag{4.4}$$

Из (4.4) получаем выражения для $V(t)$, $H(t)$ и $P(t)$:

$$H(t)=2V(0)\beta^{-1}(e^{\beta t}-1)/(e^{\beta t}+1), \quad V(t)=4V(0)e^{\beta t}/(e^{\beta t}+1)^2 \tag{4.5}$$

$$P(t)=-4V(0)m\beta(e^{\beta t}-e^{2\beta t})/(e^{\beta t}+1)^3$$

Выражения (4.5) дают точное решение задачи об ударе эллиптического параболоида по поверхности упругого анизотропного полупространства в элементарных функциях.

Из (4.5) легко получим, что $P(t)\leqslant P(t_m)$, где $t_m=\beta^{-1}\ln(2+3^{1/2})$.

Заметим, что выражения аналогичные (4.5) в задаче об ударе тела по поверхности изотропного полупространства были получены в [9], а в случае акустического полупространства задача удара разобрана в [14].

5. Частные виды анизотропии. Вычислим постоянные A и α_i в частных случаях анизотропии среды.

Акустическая и упругая изотропные среды. В случае изотропии тензор C_{ijkl} имеет вид $C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$, где λ и μ — постоянные Ламе, δ_{ij} — тензор Кронекера. Тогда в матрице $\mathbf{\Lambda}$ отличны от нуля только следующие компоненты

$$\Lambda_{11}=\Lambda_{22}=2\mu\rho^{-1}, \quad \Lambda_{33}=(\lambda+2\mu)\rho^{-1} \tag{5.1}$$

Для изотропной среды в качестве базиса $\mathbf{e}_i$ можно выбрать произвольные три ортогональные вектора. Выберем векторы $\mathbf{e}_i$ совпадающими с координатными ортами. В этом случае $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\alpha_3=1$. Из (2.14) и (5.1) получаем

$$A=c_3^{-1}=\rho^{1/2}(\lambda+2\mu)^{-1/2} \tag{5.2}$$

Отметим, что величина c_3 равна скорости распространения продольных волн.

При $\mu=0$ из (5.2) получаем выражение A для акустической среды

$$A=(\rho/\lambda)^{1/2} \tag{5.3}$$

При этом величина A^{-1} равна скорости распространения акустических волн. Из (5.2) и (5.3) следует, что в случаях акустической и изотропной упругих сред формула (3.2) была получена ранее в [1—3, 8, 9].

Кристалл с кубической системой симметрии и трансверсально изотропная среда. Будем считать, что в случае кристалла оси системы совпадают с координатными, а в случае трансверсально изотропной среды ось изотропии совпадает с осью x_3. Тогда матрица $\mathbf{\Lambda}$ будет диагональной в обоих случаях и ее компоненты равны $\Lambda_{11}=\Lambda_{22}=\rho^{-1}C_{1313}$, $\Lambda_{33}=\rho^{-1}C_{3333}$; $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\alpha_3=1$.

Очевидно, что координатные орты будут собственными векторами такой матрицы. Отсюда получим $A=c_3^{-1}=\rho^{1/2}C_{3333}^{-1/2}$.

Ортотропная среда. Пусть оси ортотропии совпадают с координатными осями. В этом случае, как и выше, получим

$$\alpha_1=\alpha_2=0,\ \alpha_3=1;\ A=(\rho/C_{3333})^{1/2}$$

Автор благодарит А. Г. Хованского за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Skalak R., Feit D.* Impact on the surface of a compressible fluid // Trans. ASME. Ser. B. J. Eng. for Industry. 1966. V. 88. N. 3. P. 325–331. Рус. перев.: Скалак Р., Фейт Д. Удар о поверхность сжимаемой жидкости // Конструирование и технология машиностроения. 1966. Т. 88. № 3. С. 97–104.
2. *Симонов И. В.* Динамическая задача о вдавливании осесимметричного штампа в упругое полупространство // Инж. ж. МТТ. 1967. № 2. С. 163–165.
3. *Robinson A. R., Thompson J. C.* Transient disturbances in a half-space during the first stage of frictionless indentation of a smooth rigid die of arbitrary shape // Quart. of Appl. math. 1975. V. 33. No. 3. P. 215–223.
4. *Кильчевский Н. А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наук. думка, 1976. 319 с.
5. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
6. *Кубенко В. Д.* Об одном подходе к исследованию распределения напряжений на поверхности тупого тела, проникающего в упругую среду // Теоретическая и прикладная механика. Киев; Донецк: Вища шк., 1986. № 17. С. 7–12.
7. *Россихин Ю. А.* Удар жесткого шара по упругому полупространству // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 5. С. 15–21.
8. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Результирующие реакции в пространственной задаче об ударе твердым телом по упругому полупространству // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 95–98.
9. *Thompson J. C., Robinson A. R.* An exact solution for the superseismic stage of dynamic contact between a punch and an elastic body // Trans. ASME. Ser E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. No. 4. P. 583–586.
10. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5. М.: Физматгиз, 1959. 655.
11. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
12. *Brockway G. S.* On the uniqueness of singular solutions to boundary-initial value problems in linear elastodynamics // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1972. V. 48. No. 3. P. 213–244.
13. *Егоров Ю. В., Шубин М. А.* Линейные дифференциальные уравнения с частными производными: Основы классической теории // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 30. Дифференциальные уравнения с частными производными. 1. М.: ВИНИТИ, 1988. 262 с.
14. *Бородич Ф. М.* О задачах взаимодействия затупленных тел с акустической средой // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 610–616.

Москва

Поступила в редакцию
16.I.1989