МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1990

УДК 539.3.01

И. А. СОЛДАТЕНКОВ

ОБ ОСОБЕННОСТИ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ РАЗМЕРА ОБЛАСТИ КОНТАКТА ПРИ ИЗНАШИВАНИИ КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕЛ

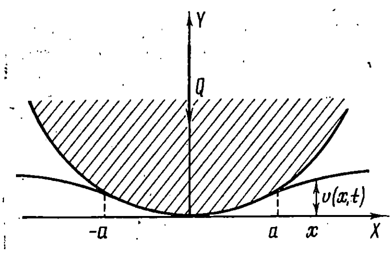
Анализируется характер скорости изменения размера области контакта в начальный момент процесса изнашивания гладкого штампа, взаимодействующего с упругой полуплоскостью. При достаточно общих предположениях относительно кинетики изнашивания получено выражение для особенности этой скорости в начале изнашивания. Аналитические результаты подтверждаются численными расчетами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим процесс изнашивания гладкого симметричного штампа, имеющего форму $y=g(x)$, и взаимодействующего с упругой полуплоскостью (фиг. 1). На штамп действует постоянная во времени нагрузка Q и считается, что контактные касательные напряжения τ_{xy} отсутствуют. Обозначим через $p=-\sigma_y|_{y=0}$ контактное давление и условимся, что скорость линейного износа W штампа в направлении оси Y определяется величиной p согласно закону изнашивания

$$\partial W(x,\ t)/\partial t=F(p(x,\ t)),\ W(x,\ 0)=0 \tag{1.1}$$

где $F(p)$ — положительно определенная и непрерывная функция. Будем также считать, что функция $F(p)$ ограничена снизу положительной константой.

Свяжем начало системы координат с центральной точкой контура штампа (фиг. 1). Тогда условие контакта, устанавливающее взаимосвязь износа W, формы g штампа и упругого перемещения v границы полуплоскости, будет иметь вид



Фиг. 1

$$W(x,\ t)-W(0,\ t)-v(x,\ t)+g(x)=0,\quad g(0)=0 \tag{1.2}$$

Величина v в условии контакта (1.2) при отсутствии напряжений τ_{xy} на границе полуплоскости связана с распределением контактного давления соотношением [1]:

$$v(x,t)=\frac{1}{\pi\theta}\int\limits_{-a(t)}^{a(t)}p(s,t)\ln\left|\frac{s-x}{s}\right|ds \tag{1.3}$$

где $a(t)$ — размер области контакта равный половине ее длины, $\theta=G(1-\nu)^{-1}$. С учетом равенства (1.3) условие контакта (1.2) примет вид

$$\frac{1}{\pi\theta}\int\limits_{-a(t)}^{a(t)}p(s,t)\ln|s-x|ds=W(x,t)+g(x)+l(t) \tag{1.4}$$

$$l(t)=\frac{1}{\pi\theta}\int\limits_{-a(t)}^{a(t)}p(s,t)\ln|s|ds-W(0,t)$$

Имеет место также условие равновесия

$$Q=\int_{-a(t)}^{a(t)} p(x,t)\,dx \tag{1.5}$$

При заданной нагрузке Q равенства (1.1), (1.4) и (1.5) образуют систему уравнений процесса изнашивания штампа, определяя неизвестные функции $W(x,t)$, $p(x,t)$ и $a(t)$.

2. Анализ уравнений изнашивания. Будем анализировать уравнения (1.1), (1.4) и (1.5) в предположении, что при $t\geqslant 0$ и $x\in[-a(t), a(t)]$ функция $W(x, t)$ является гладкой, а $p(x, t)$ — непрерывной и ограниченной. Относительно функции $a(t)$ будем предполагать, что при $t\geqslant 0$ она непрерывная и строго возрастает, а при $t>0$ имеет непрерывную производную $V(t)=da(t)/dt$.

Данные предположения представляются вполне приемлемыми, если функция $g(x)$, описывающая форму штампа, будучи гладкой и четной, строго возрастает при $x>0$. Для упрощения дальнейших выкладок положим $g(x)=kx^2$.

В силу строгого возрастания и непрерывности функции $a(t)$, существует при $a\geqslant a_0\equiv a(0)$ также строго возрастающая и непрерывная функция $t(a)$, обратная к $a(t)$. Доопределим функцию $t(a)$, положив $t(a)=0$ при $|a|<a_0$ и $t(a)=t(-a)$ при $a\leqslant -a_0$. Тогда закон изнашивания (1.1) можно представить в следующем виде

$$W(x,t)=\int_{t(x)}^{t} F(p(x,\tau))\,d\tau \tag{2.1}$$

Далее, ввиду наличия однозначной зависимости $t(a)$, будем наряду с t использовать в качестве временного параметра размер a области контакта, так что, например, $p(x, a)\equiv p(x, t(a))$, $V(a)\equiv V(t(a))$, причем имеет место соотношение

$$t(a)=\int_{a_0}^{a} db/V(b) \tag{2.2}$$

В переменных x, a равенство (2.1) имеет вид

$$W(x,a)=\int_{a_0}^{a}\lambda(x,b)F(p(x,b))\frac{db}{V(b)},\qquad \lambda(x,b)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant b\\ 0, & |x|>b\end{cases} \tag{2.3}$$

Получим теперь уравнение для скорости $V(a)$. Для этого заметим, что при условии гладкости $W(x, t)$ и ограниченности $p(x, t)$ справедлива формула обращения интегрального уравнения (1.4) [2]:

$$p(x,t)=\frac{\theta}{\pi}(a^2(t)-x^2)^{1/2}\int_{-a(t)}^{a(t)}\frac{W'(s,t)+g'(s)}{(a^2(t)-s^2)^{1/2}(s-x)}\,ds \tag{2.4}$$

причем для Q имеет место соотношение

$$Q=\theta\int_{-a(t)}^{a(t)}\frac{W'(x,t)+g'(x)}{(a^2(t)-x^2)^{1/2}}\,x\,dx \tag{2.5}$$

Запись $W'(x, t)$ здесь и далее означает производную от $W(x, t)$ по переменной x. Подставляя в равенства (2.4) и (2.5) $g'(x)=2kx$ и учитывая, что в силу (2.5) $Q=\pi\theta k a_0^2$, получим

$$p(x,t)=2k\theta(a^2(t)-x^2)^{1/2}+\frac{\theta}{\pi}(a^2(t)-x^2)^{1/2}\int\limits_{-a(t)}^{a(t)}\frac{W'(s,t)\,ds}{(a^2(t)-s^2)^{1/2}(s-x)} \tag{2.6}$$

$$\pi k(a^2(t)-a_0^2)=-\int\limits_{-a(t)}^{a(t)}\frac{W'(x,t)\,x}{(a^2(t)-x^2)^{1/2}}\,dx \tag{2.7}$$

Преобразуем интеграл в последнем равенстве путем интегрирования его по частям. Учтем при этом, что функция $a(t)$ строго возрастает, а $p(x,t)$ — ограниченная, и поэтому, в силу равенства (2.1), функция $W(x,t)$ имеет на концах $\pm a(t)$ области контакта порядок малости $\pm O\cdot(a(t)-x)$. В результате, используя переменные x, a, будем иметь из (2.7):

$$\pi k\left(1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right)=\int\limits_{-a}^{a}\frac{W(x,a)}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx\equiv I(a) \tag{2.8}$$

Далее обозначим через $p_0(x,a)=2k\theta(a^2-x^2)^{1/2}$ первое слагаемое в (2.6) и введем в рассмотрение износ $W_0(x,a)$, обусловленный этим слагаемым

$$W_0(x,a)=\int\limits_{a_0}^{a}\lambda(x,b)F(p_0(x,b))\,\frac{db}{V(b)} \tag{2.9}$$

Введем также в рассмотрение интеграл

$$I_0(a)=\int\limits_{-a}^{a}\frac{W_0(x,a)}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx \tag{2.10}$$

и функцию $\varepsilon(a)=(I(a)-I_0(a))/I_0(a)$. Тогда соотношение (2.8) можно записать в виде

$$\pi k(1-(a_0/a)^2)=(1+\varepsilon(a))I_0(a) \tag{2.11}$$

Функция $W_0(x,a)$ в (2.10) представляется интегралом согласно равенству (2.9). Нетрудно показать, что при сделанных относительно функций $a(t)$, $p(x,t)$ и $F(p)$ допущениях порядок интегрирования в (2.10) можно изменить, в результате чего из соотношения (2.11) можно получить следующее уравнение для $V(a)$:

$$\Phi(a)=(1+\varepsilon(a))\int\limits_{a_0}^{a}L(a,b)\,\frac{db}{V(b)} \tag{2.12}$$

$$\Phi(a)=\pi k\left(1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right),\qquad L(a,b)=\int\limits_{-b}^{b}\frac{F(p_0(x,b))}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx$$

При дальнейшем анализе уравнения (2.12) будет использоваться следующая лемма, являющаяся аналогом теоремы о среднем.

Лемма. Пусть функция $\varphi(x)$ — непрерывная на (α,β), функция $\psi(x)$ неотрицательная на $[\alpha,\beta]$, а $\psi(x)$ и $\varphi(x)\psi(x)$ — интегрируемые на $[\alpha,\beta]$, т. е. интегралы

$$i=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(x)\,dx,\qquad I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\psi(x)\,dx$$

сходятся, причем $i\neq0$. Тогда найдется $x_0\in[\alpha,\beta]$ и существует частичный предел $\lim_{x\to x_0}' \varphi(x)=\varphi_0$ такой, что

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\psi(x)\,dx=\varphi_0\int_\alpha^\beta \psi(x)\,dx$$

Доказательство. По теореме о среднем значении [3] имеем: $\varphi(x_\Delta)=I_\Delta/i_\Delta, I_\Delta=\int_{\alpha+\Delta}^{\beta-\Delta}\varphi(x)\psi(x)\,dx, \quad i_\Delta=\int_{\alpha+\Delta}^{\beta-\Delta}\psi(x)\,dx, x_\Delta\in(\alpha+\Delta, \quad \beta-\Delta)$, откуда, так как существуют пределы $\lim_{\Delta\to 0} I_\Delta=I$ и $\lim_{\Delta\to 0} i_\Delta=i\neq 0$, следует, что $\lim_{\Delta\to 0}\varphi(x_\Delta)=I/i\equiv\varphi_0$. Последнее равенство означает, что для любой последовательности $\{\Delta_n\}\to 0$, последовательность $\{\varphi(x_n)\}\equiv\{\varphi(x_{\Delta n})\}$ сходится к φ_0. Но последовательность $\{x_n\}\equiv\{x_{\Delta_n}\}$ ограниченная, и следовательно по теореме Больцано – Вейерштрасса [3] из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_k\}$, имеющую предел x_0, причем, так как $x_k\in(\alpha, \beta)$, то $x_0\in[\alpha, \beta]$ и в силу сходимости $\{\varphi(x_n)\}$ к φ_0, последовательность $\{\varphi(x_k)\}$ также будет сходиться к φ_0 [3].

Таким образом, имеем: $\{x_k\}\to x_0\in[\alpha, \beta]$ и $\{\varphi(x_k)\}\to\varphi_0=I/i$, т. е. существует частичный предел $\lim'_{x\to x_0}\varphi(x)=I/i$. Лемма доказана.

Вернемся к уравнению (2.12). Значения функции $L(a, b)$ в нем целиком определяются известным распределением $p_0(x, a)$ и видом зависимости $F(p)$. Пусть: а) $L(a, b)$ представляет собой непрерывную при $b\in(a_0, a)$ функцию; б) каждый из пределов $\lim_{b\to a_0} L(a, b)$ и $\lim_{b\to a} L(a, b)$ либо существует, либо равен бесконечности. Введем в рассмотрение функцию $L^*(a, b)$, доопределив где это возможно по непрерывности $L(a, b)$ как функцию b на $[a_0, a]$ и обозначим через $(a_0, a)^*$ область определения аргумента b функции $L^*(a, b)$, так что при $b\in(a_0, a)^*$, $L^*(a, b)$ является непрерывной и справедливо соотношение $(a_0, a)\subset(a_0, a)^*\subset[a_0, a]$.

Согласно равенству (2.6) распределение $p(x, a)$ контактного давления складывается из слагаемого $p_0(x, a)$, соответствующего деформации полуплоскости неизношенным штампом и слагаемого $p_1(x, a)\equiv p(x, a)-p_0(x, a)$, обусловленного наличием износа штампа, причем $p_1(x, a_0)\equiv 0$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть при $a\to a_0$: $p_1(x, a)$ равномерно по $x\in[-a, a]$ сходится к 0, а функция $L^*(a, b)$ равномерно по $b\in(a_0, a)^*$ сходится к Ω, причем Ω может быть как числом, так и обозначать ∞. Тогда существует частичный предел функции $V(a)$ при $a\to a_0$ равный Ω/A, где $A\equiv\lim_{a\to a_0}\cdot\Phi(a)/(a-a_0)=2\pi k/a_0$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что для функции $\varepsilon(a)=(I(a)-I_0(a)/I_0(a)$ в уравнении (2.12) справедливо равенство

$$\lim_{a\to a_0}\varepsilon(a)=0 \tag{2.13}$$

Для этого введем в рассмотрение отношение $E(x, a)=(F(p(x, a))-F(p_0(x, a)))/F(p_0(x, a))$ и заметим, что в силу равномерной по $x\in[-a, a]$ сходимости $p(x, a)$ к $p_0(x, a)$ при $a\to a_0$ и непрерывности и ограниченности снизу положительной константой функции $F(p)$, функция $E(x, a)$ при $a\to a_0$ равномерно по $x\in[-a, a]$ сходится к 0. Поэтому, если $m(a)$ и $M(a)$ – точные нижняя и верхняя грани $E(x, a)$ при фиксированном a, то

$$\lim_{a\to a_0} m(a)=\lim_{a\to a_0} M(a)=0 \tag{2.14}$$

Далее, используя теорему о среднем [3], равенство (2.3) с учетом (2.9) можно представить в виде

$$W(x, a)=\int_{a_0}^{a}\lambda(x, b)(1+E(x, b))F(p_0(x, b))\frac{db}{V(b)}=(1+E_1(x, a))W_0(x, a)$$

где $E_1(x, a)\in[m(a), M(a)]$. В свою очередь, заменяя согласно последнему равенству функцию $W(x, a)$ в интеграле $I(a)$, применяя теорему о среднем и учитывая (2.10), получим $I(a)=(1+E_2(a))I_0(a)$, где $E_2(a)\equiv\equiv\varepsilon(a)$ лежит между точными нижней и верхней гранями $E_1(x, a)$, т. е. $E_2(a)\equiv\varepsilon(a)\in[m(a), M(a)]$. Отсюда, с учетом равенств (2.14), следует (2.13).

Рассмотрим теперь уравнение (2.12). Воспользуемся леммой и представим интеграл в правой части (2.12) следующим образом

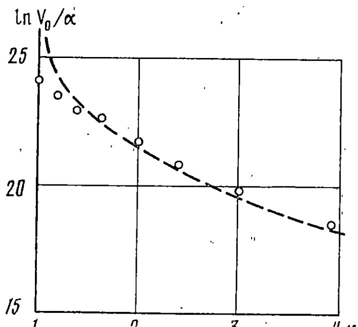
$$J(a)\equiv\int_{a_0}^{a} L(a, b)\frac{db}{V(b)}=\lim_{b\to\xi(a)}{}' L(a, b)\int_{a_0}^{a}\frac{db}{V(b)}, \quad \xi(a)\in[a_0, a] \tag{2.15}$$

Частичный предел в (2.15) существует. Это следует из существования интеграла $J(a)$ и того, что при $a>a_0$ интеграл в правой части (2.15) равен в силу (2.2) $t(a)\neq0$. Но тогда, в силу свойств а) и б) функции $L(a, b)$ и определения функции $L^*(a, b)$:

$$\lim_{b\to\xi(a)}{}' L(a, b)=L^*(a, \xi(a)), \quad \xi(a)\in(a_0, a)^*$$

так что, согласно (2.2) и (2.15) $J(a)=L^*(a, \xi(a))t(a)$. С помощью данного выражения для $J(a)$ уравнению (2.12) можно придать следующий вид

$$\Phi(a)=(1+\varepsilon(a))L^*(a, \xi(a))t(a)$$
$$\xi(a)\in(a_0, a)^* \tag{2.16}$$



Фиг. 2

Воспользуемся далее теоремой Лагранжа [3], согласно которой $t(a)\equiv t(a)-t(a_0)=(a-a_0)/V(\eta(a))$, $\eta(a)\in(a_0, a)$ и разделим обе части (2.16) на $(a-a_0)$. В результате будем иметь $V(\eta(a))=(1+\varepsilon(a))(\Phi(a)/(a-a_0))^{-1}L^*(a, \xi(a))$, откуда, в силу (2.13) и равномерной по $b\in(a_0, a)^*$ сходимости $L^*\cdot(a, b)$ к Ω при $a\to a_0$, вытекает требуемое утверждение

$$\lim_{a\to a_0}{}' V(a)=\Omega/A \tag{2.17}$$

Теорема доказана.

Данная теорема устанавливает связь поведения скорости V в начале процесса изнашивания в виде соотношения (2.17) с параметрами этого процесса при вышеупомянутых допущениях о его характере.

3. Пример. Соотношение (2.17) находит подтверждение при численном анализе процесса изнашивания. В качестве примера рассмотрим случай $F(p)=\alpha p_w(p/p_w)^{\gamma}+c$, $\gamma>1$, $c>0$, для которого

$$L(a, b)=R_\gamma b^{\gamma-2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-s^2)^{\gamma/2}}{(q^2-s^2)^{3/2}}ds+c\frac{2}{a^2(q^2-1)^{1/2}} \tag{3.1}$$

$$q=a/b\geqslant1, \quad R_\gamma=\alpha p_w^{1-\gamma}(2k\theta)^{\gamma}$$

Из выражения (3.1) имеем $(a_0, a)^*=[a_0, a)$, $L^*(a, b)=L(a, b)$ и $\Omega=\infty$, что в соответствии с (2.17) означает невозможность существования конечного предельного значения V в начальный момент изнашивания для рассматриваемого случая.

Заметим однако, что бесконечность величины Ω обуславливается вторым слагаемым в выражении (3.1), имеющим сингулярную особенность при $a\to a_0$, тогда как первое слагаемое при $a\to a_0$ имеет конечный предел $\Omega_r=\pi^{1/2}R_\gamma a_0^{\gamma-2}\Gamma((\gamma-1)/2)/\Gamma(\gamma/2)$, Γ – гамма-функция. Отсюда следует, что с уменьшением множителя c при втором слагаемом в (3.1) скорость V все быстрее после начала изнашивания будет принимать в соответствии с (2.17) значение

$$V_r = \frac{\Omega_r}{A} = \frac{R_\gamma a_0^{\gamma-1}\Gamma((\gamma-1)/2)}{2\pi^{1/2}k\Gamma(\gamma/2)} \tag{3.2}$$

Для проверки данного выхода по схеме изложенной в [4] рассчитывался процесс изнашивания тонкой полосы шириной h_0 связанной с упругой полуплоскостью. Система уравнений данного процесса при $h_0 \to 0$ и (или) $G_1 \to 0$ (G_1 – модуль сдвига материала полосы) переходят в уравнения рассматриваемого выше процесса изнашивания штампа. Поэтому следует ожидать, что при достаточной узкой и (или) мягкой полосе два указанных процесса будут приближенно совпадать, в частности иметь при $a \to a_0$ одинаковые значения V_r скорости V в начале изнашивания.

На фиг. 2 штриховой линией изображена зависимость величины $\ln(V_r/\alpha)$ от γ, полученная согласно (3.2), а кружками представлены значения этой же величины полученные путем экстраполяции на $a=a_0$ расчетных значений скорости $V(a)$ при $c=0$ для различных γ. В том и другом случаях использовались следующие значения параметров: $a_0=0,1$ м, $k=0,1$ м$^{-1}$, $G=7,7\cdot10^9$ Па, $\nu=0,3$, $\alpha=10^{-15}$ м/с, $p_w=10^9$ Па. Для полосы при расчетах было принято $h_0=10^{-4}$ м, $G_1=0,1\cdot G$, $\nu_1=\nu$.

Как видно из фиг. 2, при достаточно больших γ совпадение зависимости (3.2) с численными результатами представляется вполне удовлетворительным. Существенное различие, объяснимое конечноразностным характером схемы численных расчетов [4], появляется лишь при $\gamma \to 1+0$, когда правая часть (3.2) стремится к ∞.

Полученные результаты могут быть использованы при анализе кинетики изнашивания подвижных сопряжений, таких как направляющая скольжения, радиальный подшипник скольжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
2. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949, 270 с.
3. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, Т. 1. 1971, 599 с.; Т. 2. 1973. 447 с.
4. *Солдатенков И. А.* Изнашивание покрытий в упругих сопряжениях при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 2. С. 206–213.

Москва

Поступила в редакцию 21.XII.1987