МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1990

УДК 539.3:534.1

В. Д. КЛЮШНИКОВ, С. В. МУСТЯЦА

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОВЕРХНОСТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Настоящая работа посвящена исследованию явления поверхностной неустойчивости массива. Под последней понимается такая форма потери устойчивости, при которой возмущения возникают в непосредственной близости от свободной поверхности и быстро затухают при удалении от нее. Впервые решение о поверхностной неустойчивости, по-видимому, было получено М. Био для несжимаемой упругой полуплоскости [1]. Позднее это явление получило всестороннее описание в рамках различных подходов в трехмерной теории устойчивости деформируемых тел [2, 3].

Целью данной статьи является выявление некоторых особенностей, присущих известным ранее решениям о поверхностной неустойчивости массива, а также представление новых результатов.

Исследуем поверхностную неустойчивость в условиях плоской деформации для полупространства $x_2<0$, нагруженного в бесконечности усилиями интенсивности p вдоль оси Ox_1. Напряжения в исходном невозмущенном состоянии определяются следующим образом: $\sigma_{11}^\circ=p$, $\sigma_{12}^\circ=\sigma_{22}^\circ=0$ при условиях затухания вдоль оси Ox_2:

$$u_i|_{x_2\to-\infty}=0, \quad \sigma_{ij}|_{x_2\to-\infty}=0 \tag{1}$$

где u_i, σ_{ij} — как угодно малые приращения перемещений и напряжений при переходе из невозмущенного состояния в возмущенное (здесь и далее i, j принимают значения 1, 2). Тензор приращений напряжений и тензор приращений деформаций связаны законом Гука $e_{ij}=(1+\nu)(\sigma_{ij}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\delta_{ij})/E$, $e_{ij}={}^1/_2(u_{i,j})+u_{j,i})$, где E и ν — упругие модули.

Решение данной задачи методом Лейбензона — Ишлинского можно найти в работах [3, 4]. Учитывая повороты бесконечно малых элементов лишь при написании граничных условий, в бифуркационной задаче прийдем к следующим уравнениям равновесия и краевым условиям

$$\sigma_{ij,j}=0,\ \sigma_{22}=0,\ \sigma_{21}+pu_{2,1}=0\ (x_2=0) \tag{2}$$

В классическом варианте задача о поверхностной неустойчивости для различных моделей сред нашла отражение в [2, 5]. В рассматриваемом случае уравнения равновесия и краевые условия имеют вид

$$\sigma_{ij,j}+pu_{i,11}=0 \tag{3}$$

$$\sigma_{22}=\sigma_{21}=0\ (x_2=0) \tag{4}$$

В [6] на основе альтернативного представления тензора вращения предложены другие уравнения (неклассический вариант), которые в данном случае имеют вид

$$\sigma_{ij;j}-pu_{1,1i}=0 \tag{5}$$

$$\sigma_{22}=\sigma_{21}=0\ (x_2=0) \tag{6}$$

В то время, как решения изложенных задач для вариантов Лейбензона — Ишлинского и классического приходится искать в перемещениях, для неклассического варианта задача замыкается в напряжениях.

Следуя [2, 3] и разыскивая решения в виде соответствующих периодических функций, можно поставить вопрос об определении длины волны, характеризующей форму потери устойчивости. Обычно это делается с помощью удовлетворения некоторых интегральных условий, как, например, в задаче о шейке, где в качестве таковых принимаются [6]:

$$\int_{-h}^{h} \sigma_{11}\,dx_2=0, \qquad \int_{-h}^{h} \sigma_{12}\,dx_2=0 \tag{7}$$

$2h$ — толщина полосы. Однако в задаче о поверхностной неустойчивости попытка определить длину волны таким образом для классического и неклассического подходов оказывается несостоятельной, поскольку в обоих случаях удовлетворить одновременно условиям

$$\int_{-\infty}^{0} \sigma_{11}\,dx_2=0, \qquad \int_{-\infty}^{0} \sigma_{12}\,dx_2=0 \tag{8}$$

не удается ни при каком фиксированном $x_1=l=\mathrm{const}$. Лишь в подходе Лейбензона — Ишлинского это оказывается возможным: второе соотношение (8) выполнено автоматически в силу условий на свободной поверхности (2), а из первого следует выражение для длины полуволны [3]: $\lambda=\pi n/l$.

Однако, на самом деле требования (7), (8) не корректны. Имеют смысл лишь аналогичные требования для контактных усилий T_{11}, T_{12}, которые учитывают повороты бесконечно малых элементов

$$\int_{-\infty}^{0} T_{11}\,dx_2=0, \qquad \int_{-\infty}^{0} T_{12}\,dx_2=0 \tag{9}$$

но они выполняются автоматически в силу уравнений равновесия. Таким образом, определить длину волны, характеризующую форму потери устойчивости, из интегральных условий оказывается невозможным. Видимость нетривиального удовлетворения первого условия из (9) в подходе Лейбензона — Ишлинского проистекает из предполагаемого различия σ_{11} и T_{11}, чего в рамках варианта Лейбензона — Ишлинского в действительности нет.

Отмеченное положение об отсутствии критической длины волны следует из общих соображений, поскольку в рассматриваемой задаче (в противоположность задаче о шейке) нет характерного размера. Оно подтверждается и тем, что полученные выражения для определения нагрузки, соответствующей поверхностной потере устойчивости, оказываются независимыми от параметра типа длины волны.

Значение параметра нагрузки $\varepsilon=p(1+\nu)/E$, вычисленного по варианту Лейбензона — Ишлинского, согласно [4], равно $\varepsilon_*=-1/(1-2\nu)$.

В рамках классического подхода решение бифуркационных уравнений (3) в перемещениях, удовлетворяющее условию затухания (1), имеет вид [5]:

$$u_1=(A_1e^{\lambda a x_2}+B_1e^{\lambda b x_2})\cos\lambda x_1, \quad u_2=-(A_1ae^{\lambda a x_2}+B_1be^{\lambda b x_2})\sin\lambda x_1$$

$$a=(1+\varepsilon(1-2\nu)/(1-\nu))^{1/2}, \quad b=(1+2\varepsilon)^{1/2}$$

Удовлетворяя условиям на свободной поверхности (4), приходим к следующему уравнению для определения критической нагрузки:

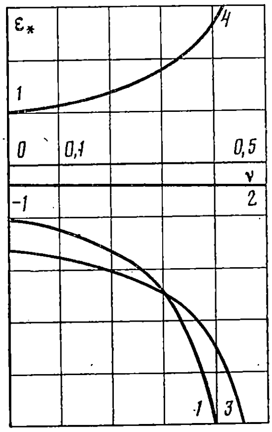
$$(1-\nu)\varepsilon^3+4(1-\nu)\varepsilon^2+2(2-\nu)\varepsilon+1=0$$

Как видно из последнего выражения, существуют лишь отрицательные значения ε_*, которые соответствуют сжимающей нагрузке. Для несжимаемого материала параметр ε_* приблизительно равен $-0{,}456$.

Как уже отмечалось, для неклассического варианта бифуркационную задачу (5)—(6) можно замкнуть в напряжениях и для сжимаемого материала так же, как это сделано в условиях несжимаемости в случае следящей нагрузки [6]. Действительно, поскольку $u_{1,1}=e_{11}$, то с введением тензора

$$\sigma_{ij}^*=\sigma_{ij}-\varepsilon\left((1-\nu)\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}\right)\delta_{ij} \qquad (10)$$

уравнения (5) принимают вид $\overset{*}{\sigma}_{ij,j}=0$, что делает возможным представление тензора σ_{ij}^* через функцию напряжений Φ, через которую в свою очередь в силу (10) выражаются напряжения σ_{ij}:



$$\sigma_{11}=\frac{(1+\nu\varepsilon)\Phi_{,22}-\nu\varepsilon\Phi_{,11}}{1-\varepsilon(1-2\nu)}$$

$$\sigma_{22}=\frac{(1-\varepsilon(1-\nu))\Phi_{,11}+\varepsilon(1-\nu)\Phi_{,22}}{1-\varepsilon(1-2\nu)},\quad \sigma_{12}=-\Phi_{,12} \qquad (11)$$

Из условий совместности деформаций имеем

$$\partial^4\Phi/\partial x_2^4+2g\partial^4\Phi/\partial x_1^2\partial x_2^2+ +f\partial^4\Phi/\partial x_1^4=0$$

$$g=1-\frac{\varepsilon(1-2\nu)}{2(1-\nu)},\qquad f=1-\frac{\varepsilon(1-2\nu)}{(1-\nu)}$$

Разыскивая функцию напряжений Φ в виде $\Phi=F(x_2)\sin\lambda x_1$ и учитывая условия затухания (1), получим выражение для Φ:

$$\Phi=(A_2e^{\lambda x_2}+B_2e^{\lambda\sqrt{f}\,x_2})\sin\lambda x_1$$

В результате подстановки (11) в (5) имеем условие для определения критического усилия

$$(1-2\varepsilon(1-\nu))[1-\varepsilon(1-2\nu)/(1-\nu)]^{1/3}=(1-\varepsilon)(1-\varepsilon(1-2\nu)) \qquad (12)$$

Для несжимаемого материала найти значение ε_* не удается, поскольку условие (12) при $\nu=0{,}5$ обращается в тождество. Для сжимаемого материала существуют как положительные, так и отрицательные корни (12). Первые лежат в интервале $1<\varepsilon<1-\nu/(1-2\nu)$, вторые — $\varepsilon<-[^2/_3\cdot(1-2\nu)]^{1/2}$.

На фигуре приведены диаграммы $\varepsilon_*\sim\nu$ для рассмотренных вариантов. Кривая *1* соответствует подходу Лейбензона — Ишлинского, кривая *2* — классическому, кривые *3* и *4* — неклассическому варианту. Как видно из диаграммы, наименьшее значение сжимающего усилия получается по классическому варианту. Выделение критических растягивающих усилий возможно лишь в рамках неклассического подхода. Для несжимаемого материала ($\nu=0{,}5$) нет критических нагрузок ни для подхода Лейбензона — Ишлинского, ни для неклассического варианта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biot M. A.* Mechanics of incremental deformations. N. Y.: Wiley, 1965. 504 p.
2. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1971. 276 с.
3. *Ержанов Ж. С., Егоров А. К.* Теория складкообразования в толще горных пород. (Математическое описание). Алма-Ата: Наука. 1968. 135 с.
4. Теория складкообразования в земной коре. М.: Наука, 1975. 239 с.
5. *Гузь А. Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища шк., 1986. 511 с.
6. *Клюшников В. Д.* Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.

Москва

Поступила в редакцию 15.V.1987