

УДК 539.3

© 1990 г.

В. И. МАШУКОВ, В. А. ОСИНОВ

**СПЕКТРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СЧЕТА
В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Изложены результаты анализа спектра матрицы, аппроксимирующей интегральный оператор в граничном интегральном уравнении краевой задачи теории упругости. Предлагается метод корректировки неточностей в спектре приближенного оператора, одновременно снижающий вычислительные затраты на решение интегрального уравнения. В приведенных примерах использованы интегральные операторы плоской задачи теории упругости.

1. Интегральные уравнения. Решение системы дифференциальных уравнений Ламе

$$\mu \Delta u_i(\mathbf{x}) + (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (1)$$

$$\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$$

можно представить в виде потенциала простого слоя [1]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_S \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) ds \quad (2)$$

где $\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ — матрица Кельвина фундаментальных решений системы (1) (см. [1]):

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x}) = c \delta_{ij} \ln |\mathbf{x}| - d x_i x_j / |\mathbf{x}|^2 \quad (3)$$

$$c = \frac{\lambda + 3\mu}{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad d = \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)}$$

S — граничный контур области деформирования. Матрица $T(\mathbf{n}(\mathbf{x}))$ с компонентами

$$T_{ij}(\mathbf{n}(\mathbf{x})) = \lambda n_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})} \quad (4)$$

называется оператором напряжений [1, 2]. Вектор $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = T(\mathbf{n}(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x})$ равен вектору усилий на площадке с нормалью $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, проходящей через точку \mathbf{x} . В дальнейшем $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — вектор нормали к контуру S , внешний по отношению к области деформирования D .

После применения оператора (4) к потенциалу (2) и вычисления предельного значения на S получится интегральное уравнение [1]:

$$-\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + A\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad A\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \int_S T(\mathbf{n}(\mathbf{x})) \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) ds \quad (5)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — вектор усилий, действующий на границу области деформирования.

Интегральный оператор в (5) — сингулярный, поэтому его значения

вычисляются следующим образом [1]:

$$\int_s T(\mathbf{n}(\mathbf{x})) \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) ds = \\ = \int_s [T(\mathbf{n}(\mathbf{x})) \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) - T(\mathbf{n}(\mathbf{y})) \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x})] ds + k\varphi(\mathbf{x}) \quad (6)$$

где $k=1$, если область D бесконечна, и $k=-1$, если область конечна. Подынтегральная функция в (6) имеет устранимую особенность при $\mathbf{x}=\mathbf{y}$.

Спектр интегрального оператора A в (5) имеет следующие характерные особенности [1, 2]: собственные числа действительны; спектр лежит в круге единичного радиуса; спектр имеет две точки сгущения $\pm(1-2\nu)/2(1-\nu)$, где ν — коэффициент Пуассона; три собственных значения равны 1, если область деформирования конечна, и равны -1 , если область бесконечна.

В приводимых ниже примерах рассматривается случай, когда единичные по модулю собственные значения положительны.

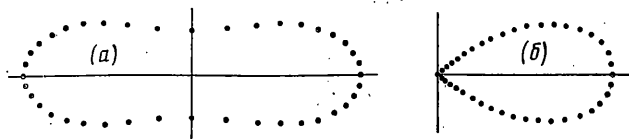
2. Приближенный оператор. При численном решении уравнения (5) [3, 4] граница области деформирования задается поточечно. Интегральный оператор (6) заменяется суммой значений подынтегральной функции в точках границы, умноженных на полусумму расстояний по дуге от точки до ближайших точек с той и другой стороны. В результате такой дискретизации функции на границе области деформирования аппроксимируются конечномерными векторами, а интегральный оператор A — матрицей A_p .

На фиг. 1 показаны точки, аппроксимирующие деформированный эллипс (а) и лемнискату (б). Точки контуров получаются с помощью конформных отображений внешности единичного круга функциями $c_1(z+c_2/z)$, $c(z+1)^{1/2}$. Для получения деформированного эллипса функция Жуковского применяется дважды: $1,5z+0,5/z$; $0,9z+0,4/z$. Для этих случаев были вычислены собственные значения и собственные векторы матриц A_p . Собственные значения матрицы в случае эллипса показаны на фиг. 2, а, в случае лемнискаты — на фиг. 2, б. На горизонтальной оси отмечается номер частоты собственного вектора, на вертикальной оси — величина соответствующего собственного значения. Под частотой собственного вектора как функции длины дуги здесь подразумевается его подобие функции \sin или \cos по количеству максимумов или по количеству нулевых значений. Светлыми кружками отмечены два собственных значения, отличающиеся друг от друга менее, чем на 0,01.

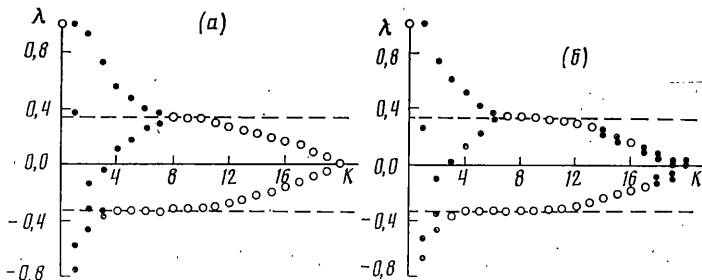
В рассматриваемом случае собственные векторы являются двумерными вектор-функциями, поэтому каждой частоте соответствуют четыре собственных вектора и, соответственно, четыре собственных значения. Нулевой частоте соответствуют два единичных собственных значения (жесткий сдвиг), еще одно единичное собственное значение соответствует единичной частоте (жесткий поворот). Штриховыми линиями на фиг. 2 показаны ожидаемые точки сгущения спектра.

Результаты вычислений спектра матриц A_p показали следующее: собственные значения матриц действительны; спектр лежит в круге единичного радиуса; собственные числа сгущаются к точкам $\pm(1-2\nu)/2(1-\nu)$ до девятой частоты собственных векторов; три собственных значения отличаются от единицы менее, чем на 0,0002 (эллипс) и 0,013 (лемниската). Начиная с десятой частоты собственные значения устремляются к нулю, что является существенным отличием спектра матрицы A_p от спектра интегрального оператора A .

Сгущение собственных значений высокочастотных собственных векторов к нулю объясняется недостаточным количеством точек для аппроксимаций таких функций. Для функций с такой частотой теряет смысл замена интеграла конечной суммой без увеличения числа точек. Для высокочастотных собственных векторов источником погрешностей при числен-



Фиг. 1



Фиг. 2

ном решении уравнения (5) являются искажение спектра и недостаток точек для аппроксимации высокочастотных векторов матрицы A_p .

Выправить спектр матрицы A_p и одновременно снизить вычислительные затраты на решение уравнения (5) позволяет следующий прием. Точечные функции длиной N разлагаются в ряд по системе M ортогональных базовых функций, причем $M \leq N/2$. У вектор-функций в ряд разлагаются отдельно проекции на оси Ox_1 и Ox_2 .

Для случаев, показанных на фиг. 1, в качестве базовых функций были взяты

$$f_i^1 = (N/2)^{1/2}, \quad f_i^{2j} = (N/2)^{1/2} \cos(ijH), \quad f_i^{2j+1} = (N/2)^{1/2} \sin(ijH)$$

$$H = 2\pi/N \quad (i=1, \dots, N; \quad j=1, \dots, (M-1)/2) \quad (7)$$

где i — номер точки на граничном контуре, а верхний индекс обозначает номер базовой функции.

Если $q_k = (q_{k1}^1, \dots, q_{kM}^1, q_{k1}^2, \dots, q_{kM}^2)$ — вектор коэффициентов в разложении в ряд точечной функции $\Phi_p = (\Phi_{p1}^1, \dots, \Phi_{pN}^1, \Phi_{p1}^2, \dots, \Phi_{pN}^2)$, тогда

$$q_{kj}^i = \sum_{n=1}^N \Phi_{pn}^i f_n^j$$

где верхний индекс у q_{kj}^i , Φ_{pn}^i обозначает номер проекции вектора на координатную ось ($i=1, 2$). С другой стороны, Φ_p является линейной комбинацией точечных функций и может быть представлена в виде

$$\Phi_p = B q_k \quad (8)$$

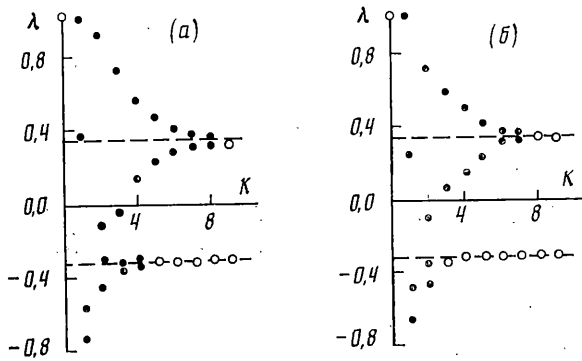
где матрица B размером $(2N \times 2M)$ имеет блочную структуру

$$B = \left\| \begin{array}{cc} f_1^1 \dots f_1^M & \\ \vdots & \vdots & 0 \\ f_N^1 \dots f_N^M & \\ & f_1^1 \dots f_1^M \\ 0 & \vdots & \vdots \\ & f_N^1 \dots f_N^M \end{array} \right\| \quad (9)$$

Матрица B' , имеющая размер $(2M \times 2N)$ и полученная транспонированием матрицы B , обладает следующим свойством:

$$B'B = E \quad (10)$$

где E — единичная матрица $(2M \times 2M)$.



Фиг. 3

С помощью (8), (9), (10) уравнение (5) преобразуется к виду

$$-\varphi_k + B'A_pB\varphi_k = B'F \quad (11)$$

В примерах на фиг. 1, 2 размер матрицы $B'A_pB$ взят равным 38×38 , в то время как размер матрицы A_p — 80×80 . На фиг. 3 показаны собственные значения матрицы $B'A_pB$, упорядоченные по частоте собственных векторов, для случаев деформированного эллипса (а) и лемнискаты (б).

На фиг. 3 отсутствует сгущение собственных значений к нулю. Казалось бы, такого же выправления спектра можно добиться, удвоив число точек перед вычислением интегрального оператора (например, путем интерполяции), и взяв каждое второе значение после вычисления интегрального оператора. Такая процедура проделана, и спектр полученного приближенного оператора оказался в точности совпадающим со спектром на фиг. 2. Лишь к небольшим изменениям высокочастотной части спектра приводило любое локальное увеличение плотности точек на контуре с последующим разрежением.

Приведенная процедура коррекции приближенного оператора оказывает влияние и на низкочастотную часть спектра в случае лемнискаты, изменяя собственные значения на $0,01-0,02$. Это связано с наличием угловой точки, так как в случае эллипса это влияние менее $0,001$.

Уменьшение в два раза длины строки матрицы, аппроксимирующей интегральный оператор, уменьшает вычислительные затраты при решении уравнения (11) итерационным методом в 4 раза. Вопрос о том, до каких пределов можно уменьшать длину строки матрицы или необходимо ее увеличивать, определяется формой граничного контура и правой частью в уравнениях (5), (11).

3. Априорная оценка точности счета. При численном решении задач теории упругости аппроксимируются граничные контуры области деформирования, краевые условия, плотности потенциалов, значения напряжений, деформаций и смещений на границе и в области и интегральные операторы. Информация о граничных контурах и краевых условиях не меняется в процессе решения задачи, но эта информация может быть использована для задания дополнительных точек на границе и, соответственно, дополнительных краевых условий в этих точках. Задание дополнительных значений может происходить динамически, если задача решается итерационным способом. Необходимость в дополнительных значениях возникает; если ($\delta > 0$ — наперед заданное число):

$$\|\varphi - BB'\varphi\| \geq \delta \|\varphi\| \quad (12)$$

В случае чебышевской нормы из (12) следует, в окрестности каких точек необходимо задать дополнительные значения. Для оценки точности аппроксимации интегральных операторов в (12) вместо φ следует подставить строки или столбцы матрицы, аппроксимирующей этот оператор.

Дополнительные значения точечных функций вычисляются как линейная комбинация значений базовых функций для промежуточных значе-

пий аргумента. В случае базовых функций (7):

$$f_{1+0,5}^{2j} = (N/2)^{1/2} \cos(1,5jH), \quad f_{1+0,5}^{2j+1} = (N/2)^{1/2} \sin(1,5jH)$$

$$q_k = B' \varphi_p, \quad \varphi_{p1,5}^1 = \sum_{j=1}^M f_{1,5}^j q_{kj}^1, \quad \varphi_{p1,5}^2 = \sum_{j=1}^M f_{1,5}^j q_{kj}^2 \quad (13)$$

4. Итерационный процесс. Пусть граница S области деформирования многосвязна и состоит из n связанных конечных частей S_k , а точка z_k принадлежит внутренности S_k . Пусть, далее, функции $\psi_{hj}(x)$, $x \in S$ ($j=1, 2, 3$) являются векторами усилий, приложенными на S , причем $\psi_{h1}(x)$, $\psi_{h2}(x)$ соответствуют единичным сосредоточенным усилиям, приложенным в точке z_k и параллельным осям Ox_1 , Ox_2 соответственно, а $\psi_{h3}(x)$ соответствует единичному сосредоточенному моменту в точке z_k . Если область деформирования конечна, тогда предполагается, что S_1 охватывает остальные контуры и $\psi_{1j}(x) = 0$ при $x \in S_i$, $i \neq 1$. Функции $\psi_{kj}(x)$ необходимы для определения оператора проектирования Π :

$$\Pi \varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^3 a_{kj} \psi_{kj}(x) \quad (14)$$

$$a_{kj} = \int_{S_k} \varphi_j(y) ds \quad (j=1, 2), \quad a_{k3} = \int_{S_k} (y_1 \varphi_2(y) - y_2 \varphi_1(y)) ds$$

С помощью оператора Π уравнение (11) преобразуется к виду

$$\varphi_k - A_r \varphi_k = F_r, \quad A_r = \Pi B' A_p B, \quad F_r = -\Pi B' F \quad (15)$$

Собственные значения оператора A_r по модулю меньше единицы, причем второе по величине модуля собственное значение в большинстве прикладных задач меньше 0,9. Максимальное же собственное значение может оказаться очень близким к единице. В уравнении

$$\varphi_k - A_r \varphi_k = (1 - \lambda_*^2)^{-2} [E + (A_r^2 - 2\lambda_*^2 E)] (E + A_r) F_r \quad (16)$$

$$A_r = (1 - \lambda_*^2)^{-2} (A_r^2 - \lambda_*^2 E)^2, \quad \lambda_* = (1 - 2\nu) / 2(1 - \nu)$$

спектр оператора A_r положителен, и точка сгущения спектра близка к нулю. Собственные значения оператора A_r , по модулю равные 0,9, 0,8, соответствуют собственным значениям оператора A_r 0,6561, 0,4096 при $\nu=0$ и 0,5575, 0,2704 при $\nu=0,5$. Спектр оператора A_r разрежен в окрестности единицы, поэтому для решения уравнения (16) достаточно обратить оператор $E - A_r$ для собственных значений из интервала $[0; 0,45]$, а затем вычислить оставшуюся часть решения, оценивая собственные значения по двум последовательным итерациям. С этой целью из уравнения

$$(1-x)P(x) = V^{-1} P_c \left(\frac{x}{A} \right) + 1 \quad (17)$$

определяется полином $P(x)$:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad P_c(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n+1} x^{n+1}$$

$$a_{n+1} = 0, \quad a_i = - \sum_{j=i+1}^{n+1} \frac{c_j}{VA^j}, \quad V = -P_c \left(\frac{1}{A} \right), \quad A = 0,45$$

где $P_c(x)$ — смещенный полином Чебышева. Если взять $P(x)$ четвертой степени, тогда $P_c(x) = 512x^5 - 1280x^4 + 1120x^3 - 400x^2 + 40x - 1$ и на интервале $[0; 0,45]$ функция $(1-x)P(x)$ будет отличаться от единицы менее, чем на $1/6935$.

С помощью полинома $P(x)$ уравнение (16) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \varphi_{kk} + \varphi_{k0}, \quad \varphi_{kk} = P(A_R) f_1 \\ f_1 &= (1 - \lambda_*^2)^{-2} [E + (A_r^2 - 2\lambda_*^2 E)] (E + A_r) F_r, \\ F_0 &= f_1 - (E - A_R) P(A_R) f_1, \quad \varphi_{k0} - A_R \varphi_{k0} = F_0 \end{aligned} \quad (18)$$

Для вычисления φ_{k0} может быть применен такой же прием, как при вычислении φ_{kk} , но это сопряжено со значительными вычислительными затратами, так как равномерная аппроксимация функции $(1-x)^{-1}$ на интервале (a, b) при $0,45 \leq a < b < 1$ и $b > 0,95$ требует высокой степени $P(x)$. Но равномерная аппроксимация функции $(1-x)^{-1}$ и не требуется, так как на интервале (a, b) спектр оператора A_R разрежен, и практически при одном граничном контуре на интервале (a, b) оператор A_R имеет 3-4 собственных значения. Если на интервале (a, b) оператор A_R имеет одно собственное значение, то уравнение (18) решается известным образом:

$$F_A = A_R F_0, \quad \lambda = F_A^i / F_0^i, \quad \varphi_{k0} = F_0 / (1 - \lambda) \quad (19)$$

где F_A^i, F_0^i — значения функций в граничной точке с номером i . По аналогии с (19) может быть определен итерационный процесс, когда на интервале (a, b) имеется не одно собственное значение. Пусть в этом случае k — номера точек на граничном контуре, в которых $|F_0^k|$ равны и максимальны, при этом отношение $|F_A^k / F_0^k|$ максимально для значений F_A^k, F_0^k . Если это отношение больше или равно единице, то значение λ берется равным 0,5. В противном случае в качестве λ берется значение, при котором достигает минимума функция $g(\lambda) = \max_i |\lambda F_0^i - F_A^i|$. С помощью λ вычисляются новые значения правой части в (18) и функции φ_{kj} :

$$\begin{aligned} F_{j+1} &= F_j - (E - A_R) \varphi_{kj} \\ \varphi_{k(j+1)} &= (1 - \lambda)^{-1} F_j, \quad \varphi_k = \varphi_{kk} + \sum_j \varphi_{kj} \end{aligned}$$

Итерационный процесс заканчивается, если норма φ_{kj} оказывается меньше заданного предела или λ оказывается меньше 0,45. В последнем случае, если (15) удовлетворяется недостаточно точно, необходимо повторить решение, взяв в уравнении (15) невязку в качестве правой части.

Методы ускорения сходимости итерационных процессов подробно рассмотрены в [5]. Здесь сделана попытка максимального учета функциональных свойств конкретного оператора.

Авторы благодарят Е. И. Шемякина за внимание, проявленное к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
2. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. / Под ред. В. Д. Купрадзе. М.: Наука, 1976. 662 с.
3. Машуков В. И. Численное решение некоторых двумерных задач теории упругости с помощью сингулярных интегральных уравнений. // Динамика твердого тела. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1980. Вып. 45. С. 130-140.
4. Паргон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
5. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986. 446 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
27.IV.1988