**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1990**

УДК 531.383

Ю. Н. ЧЕЛНОКОВ

О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Предложены кватернионные уравнения движения динамически симметричного твердого тела с подвижной точкой подвеса, находящегося под действием произвольного внешнего момента, имеющие вид уравнений движения четырехмерного нелинейного осциллятора, совершающего в случае относительного движения тела по инерции одночастотные гармонические колебания с частотой, пропорциональной модулю кинетического момента тела. Введены две формы уравнений относительного ротационного движения твердого тела в кватернионных оскулирующих элементах, не содержащие тригонометрических функций от медленных переменных и не вырождающиеся ни при каком угловом положении тела.

Рассмотрена задача о движении под действием сил тяготения симметричного твердого тела, имеющего малое смещение центра масс относительно точки подвеса в любом направлении, при произвольном перемещении точки подвеса тела в пространстве. Получены кватернионные осредненные уравнения первого приближения, формулы для векторов угловых скоростей вращения вектора кинетического момента тела и его оси симметрии, установлены случаи интегрируемости осредненных уравнений в квадратурах.

Полученные модели и результаты могут быть использованы в теории гироскопов с неконтактным подвесом.

1. Уравнения движения. Рассмотрим динамически симметричное твердое тело, находящееся под действием произвольного внешнего момента, полагая, что точка O подвеса тела перемещается в инерциальном пространстве произвольным образом. Движение тела будем рассматривать относительно системы координат $OX_1X_2X_3(X)$, перемещающейся относительно инерциальной системы координат $O^*X_1^*X_2^*X_3^*(X^*)$ поступательно (одноименные оси систем координат X и X^* полагаем параллельными). С телом жестко свяжем систему координат $OY_1Y_2Y_3(Y)$, направив оси OY_i по главным осям инерции тела для точки O. Примем, что ось OY_3 является осью динамической симметрии тела. Угловое положение тела относительно системы координат $X(X^*)$ будем задавать собственным кватернионом $\mathbf{s}$, компоненты которого s_j $(j=\overline{0,\ 3})$ являются параметрами Родрига — Гамильтона конечного поворота системы координат Y относительно X [1, 2].

Уравнения движения тела будем рассматривать в специальной системе координат $OY_1'Y_2'Y_3'(Y')$, вращающейся с абсолютной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, коллинеарной кинетическому моменту $\mathbf{L}$ относительного движения тела, вычисленному относительно точки O:

$$\mathbf{\Omega}=\boldsymbol{\omega}+\mathbf{u}=\mathbf{L}/I_1,\quad \mathbf{u}=[(I_3-I_1)/I_1]r\mathbf{y}_3$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость вращения тела, $\mathbf{u}$ — относительная угловая скорость вращения системы координат Y' относительно Y, r — проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ на ось OY_3, $\mathbf{y}_3$ — единичный вектор оси OY_3, I_1, I_3 — моменты инерции тела относительно осей OY_1 и OY_3.

Взаимную ориентацию систем координат Y', Y, X будем задавать собственными кватернионами $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{z}$ в соответствии со схемой поворотов

$$X \underset{\boldsymbol{\omega}}{\overset{\mathbf{s}}{\rightarrow}} Y \underset{\mathbf{u}}{\overset{\boldsymbol{\mu}}{\rightarrow}} Y' \sim X \underset{\mathbf{\Omega}}{\overset{\mathbf{z}}{\rightarrow}} Y'$$

Уравнения движения твердого тела в переменных z_j получаются из уравнений (4.5) относительного движения динамически симметричных материальных систем работы [3] и имеют вид

$$\mathbf{z}^{\cdot\cdot}+(L/(2I_1))^2\mathbf{z}=(1/(2I_1))\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z} \tag{1.1}$$

$$(L/(2I_1))^2=(^1/_4)\Omega^2=z_0^{\cdot 2}+z_1^{\cdot 2}+z_2^{\cdot 2}+z_3^{\cdot 2} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}'+\mathbf{M}'',\quad \mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}=\mathbf{z}\circ\mathbf{M}_{Y'}=\mathbf{z}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{M}_Y\circ\boldsymbol{\mu} \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\mu}=\mathbf{1}\cos(\tau_1/2)-\mathbf{i}_3\sin(\tau_1/2) \tag{1.4}$$

$$\tau_1^{\cdot}=[(I_1-I_3)/I_1]r=[2(I_1-I_3)/I_3](-z_3z_0^{\cdot}+z_2z_1^{\cdot}-z_1z_2^{\cdot}+z_0z_3^{\cdot}) \tag{1.5}$$

$$\mathbf{s}=\mathbf{z}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}},\quad \mathbf{s}=s_0\mathbf{1}+\sum s_i\mathbf{i}_i,\quad \mathbf{z}=z_0\mathbf{1}+\sum z_i\mathbf{i}_i\quad i=\overline{1,3} \tag{1.6}$$

Здесь и далее запись вида $\mathbf{a}_\xi$ означает отображение вектора $\mathbf{a}$ на базис ξ ($\xi=X, Y, Y'$) [2]; точка означает дифференцирование по времени t, производная от кватерниона $\mathbf{b}$ вычисляется в предположении неизменности ортов гиперкомплексного пространства $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$: $\mathbf{b}^{\cdot}=b_0^{\cdot}\mathbf{1}+b_1^{\cdot}\mathbf{i}_1+b_2^{\cdot}\mathbf{i}_2+b_3^{\cdot}\mathbf{i}_3$; знак $\circ$ означает кватернионное умножение, верхняя черта — сопряженный кватернион; $\mathbf{M}'$ — главный момент всех внешних сил, действующих на твердое тело, вычисленный относительно точки O, $\mathbf{M}''$ — главный момент переносных сил инерции, вычисленный относительно той же точки O.

Кватернионное уравнение движения твердого тела (1.1) эквивалентно системе из четырех дифференциальных уравнений второго порядка относительно параметров Родрига — Гамильтона z_j ($j=\overline{0,3}$). Соотношения (1.3), (1.4) вместе с дифференциальным уравнением (1.5) служат для пересчета проекций моментов внешних сил и переносных сил инерции от осей системы координат Y, связанной с твердым телом, к осям системы координат Y'. Необходимость в этом пересчете отпадает, если эти моменты заданы в системе координат $X(X^*)$. Первое соотношение (1.6) служит для нахождения параметров s_j, характеризующих ориентацию твердого тела в инерциальной системе координат X^*, через параметры z_j, характеризующие ориентацию оси симметрии твердого тела в этой же системе координат.

При использовании в качестве независимой переменной безразмерного времени τ, связанного со временем t дифференциальным соотношением $d\tau=(L/I_1)dt$, уравнение (1.1) заменяется уравнениями

$$\frac{d^2\mathbf{z}}{d\tau^2}+\frac{1}{4}\mathbf{z}=\frac{1}{2L^2}\left(-\frac{dL^2}{d\tau}\frac{d\mathbf{z}}{d\tau}+I_1\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}\right) \tag{1.7}$$

$$\frac{dL^2}{d\tau}=4I_1\,\mathrm{sqal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{z}}}{d\tau}\circ\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}\right),\qquad \frac{dt}{d\tau}=\frac{I_1}{L}$$

где $\mathrm{sqal}(\cdot)$ — скалярная часть кватерниона $(\cdot)$.

Как видно из уравнений (1.1), (1.7), относительное движение твердого тела по инерции (когда $\mathbf{M}=\mathbf{M}'+\mathbf{M}''=0$) в переменных z_j изоморфно движению одночастотного четырехмерного гармонического осциллятора. Частота колебаний осциллятора во времени t, равная $L/(2I_1)$, зависит в соответствии с (1.2) от начальных условий движения и пропорциональна модулю кинетического момента твердого тела, а частота колебаний осциллятора в безразмерном времени τ не зависит от начальных условий движения и равна 1/2.

Для относительного ротационного движения твердого тела, т. е. такого относительного движения, кинетическая энергия которого существенно больше суммы работ моментов внешних сил и переносных сил инерции, уравнения (1.1) и (1.7) имеют вид уравнений движения четырехмерного одночастотного возмущенного осциллятора. Исследование этого движения твердого тела целесообразно проводить с помощью уравнений движения в кватернионных оскулирующих элементах.

Первая форма уравнений относительного ротационного движения твердого тела в кватернионных оскулирующих элементах получается из уравнения (1.7) с помощью метода вариации произвольных постоянных и имеет вид [3, 4]:

$$d\alpha/d\tau=-\mathbf{f}\sin\tau/2,\ d\beta/d\tau=\mathbf{f}\cos\tau/2,\ dt/d\tau=I_1/L$$

$$dL^2/d\tau=4I_1\,\mathrm{sqal}[(d\bar{\mathbf{z}}/d\tau)\circ\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}] \tag{1.8}$$

$$\mathbf{f}=(1/L^2)[-(dL^2/d\tau)d\mathbf{z}/d\tau+I_1\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}]$$

$$\mathbf{z}=\alpha\cos\frac{\tau}{2}+\beta\sin\frac{\tau}{2},\quad \frac{d\mathbf{z}}{d\tau}=\frac{1}{2}\left(-\alpha\sin\frac{\tau}{2}+\beta\cos\frac{\tau}{2}\right) \tag{1.9}$$

Эти уравнения необходимо в общем случае дополнить соотношениями (1.3)—(1.5), позволяющими производить пересчет проекций момента **M** из системы координат Y в систему координат Y' или X.

Вторая форма уравнений относительного ротационного движения твердого тела в кватернионных оскулирующих элементах получается с помощью введения в рассмотрение системы координат η, связанной с вектором **L** кинетического момента тела. Ось $O\eta_3$ этой системы координат направляется по вектору **L**, а проекция $\omega_3{}^*$ вектора $\boldsymbol{\omega}^*$ абсолютной угловой скорости вращения системы координат η на направление вектора **L** (ось $O\eta_3$) полагается равной нулю. Взаимная ориентация систем координат η и X, Y' и η задается при этом собственными кватернионами **e**, **x** в соответствии со схемой поворотов

$$X\underset{\boldsymbol{\omega}^*}{\overset{\mathbf{e}}{\rightarrow}}\eta\underset{\mathbf{u}^*}{\overset{\mathbf{x}}{\rightarrow}}Y'\sim X\underset{\boldsymbol{\Omega}}{\overset{\mathbf{z}}{\rightarrow}}Y'$$

Рассмотрение кватернионных кинематических уравнений вращения системы координат η относительно X и системы координат Y' относительно η с учетом связи векторов $\boldsymbol{\omega}^*$ и **M** приводит к второй форме уравнений движения твердого тела в кватернионных оскулирующих элементах, имеющей вид [4]:

$$2d\mathbf{e}/d\tau=(I_1/L)\mathbf{e}\circ\boldsymbol{\omega}_\eta{}^*$$

$$2d\mathbf{c}/d\tau=-(I_1/L)\boldsymbol{\omega}_\eta{}^*\circ(1\cos\tau+\mathbf{i}_3\sin\tau)\circ\mathbf{c}$$

$$dt/d\tau=I_1/L \tag{1.10}$$

$$dL/d\tau=-(I_1/L)\,\mathrm{sqal}(\mathbf{i}_3\circ\mathbf{M}_\eta)=(I_1/L)M_{\eta_3}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\eta{}^*=(1/L)\,\mathrm{vect}(\mathbf{i}_3\circ\mathbf{M}_\eta)=(1/L)(-M_{\eta_2}\mathbf{i}_1+M_{\eta_1}\mathbf{i}_2) \tag{1.11}$$

$$\mathbf{M}_\eta=\bar{\mathbf{e}}\circ\mathbf{M}_X\circ\mathbf{e}=\mathbf{x}\circ\mathbf{M}_{Y'}\circ\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{M}_Y\circ\boldsymbol{\mu}\circ\bar{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{z}=\mathbf{e}\circ\mathbf{x},\quad \mathbf{x}=(1\cos(\tau/2)+\mathbf{i}_3\sin(\tau/2))\circ\mathbf{c} \tag{1.12}$$

Эти уравнения необходимо дополнить соотношениями (1.4), (1.5) для кватерниона $\boldsymbol{\mu}$.

Уравнения (1.8) ((1.10)) являются кватернионными уравнениями относительного ротационного движения твердого тела в стандартной форме с медленными переменными α, β, L^2(**e**, **c**, L) и с двумя быстрыми переменными τ, τ_1, если моменты **M**′, **M**″ не являются периодическими функциями времени t, и с тремя быстрыми переменными τ, τ_1, t, если моменты **M**′, **M**″ — периодические функции времени t. Переменные α, β и **e**, **c** являются кватернионными оскулирующими элементами, а переменная $L^2(L)$ — скалярным элементом.

Отметим, что для симметричного твердого тела, движущегося по инерции, $\tau^{\cdot}=L/I_1=\psi^{\cdot}=\mathrm{const}$ — угловая скорость прецессии тела, а $\tau_1{}^{\cdot}=[(I_1-I_3)/I_1]r=\varphi^{\cdot}=\mathrm{const}$ — угловая скорость собственного вращения тела.

Оскулирующие элементы α, β, L(**e**, **c**, L), найденные из уравнений (1.8) ((1.10)), позволяют не только определить ориентацию твердого тела относительно инерциальной системы координат (для этого необходимо вычислить кватернион **s** по формулам (1.6), (1.4), (1.5), (1.9) ((1.12)), но и установить закон изменения вектора кинетического момента **L** твердого тела по формулам: $\mathbf{L}_X=L\mathbf{e}\circ\mathbf{i}_3\circ\bar{\mathbf{e}}=L\beta\circ\bar{\alpha}$. Связь оскулирующих элементов α, β с элементами **e**, **c** устанавливается соотношениями: $\alpha=\mathbf{e}\circ\mathbf{c}$, $\beta=\mathbf{e}\circ\mathbf{i}_3\circ\mathbf{c}$.

В отличие от известных уравнений движения твердого тела в угловых оскулирующих элементах [5, 6] уравнения в кватернионных оскулирующих элементах (1.8) и (1.10) не содержат тригонометрических функций от медленных переменных, снижающих эффективность использования ЭВМ, и не вырождаются ни при каких угловых положениях твердого тела и вектора $\mathbf{L}$.

2. Движение тяжелого твердого тела с подвижной точкой подвеса. В качестве примера, иллюстрирующего особенности использования предлагаемых уравнений, рассмотрим движение под действием сил тяготения симметричного твердого тела, имеющего малое смещение центра масс относительно точки подвеса в любом направлении, полагая, что точка подвеса тела перемещается в пространстве произвольным образом.

Будем считать, что силы тяготения приводятся к одной равнодействующей силе $\mathbf{F}$, приложенной в центре масс тела и направленной по вертикали OZ_3 в ее отрицательную сторону ($\mathbf{F}=-F\mathbf{z}_3$). Обозначим через $\mathbf{d}$ радиус-вектор, проведенный из точки подвеса тела в его центр масс, а через d_i — проекции вектора $\mathbf{d}$ на оси системы координат Y, жестко связанной с телом. Тогда сумма моментов сил тяготения и переносных сил инерции

$$\mathbf{M}=m\mathbf{a}\times\mathbf{d}, \quad \mathbf{a}=\mathbf{w}-\mathbf{g}=\mathbf{w}-\mathbf{F}/m \tag{2.1}$$

где m — масса тела; $\mathbf{a}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{g}$ — векторы кажущегося, абсолютного и гравитационного ускорений точки подвеса тела.

В рассматриваемом случае в уравнениях движения тела (1.1) или (1.7) в соответствии с (2.1) следует положить

$$\begin{gathered}\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}=m\mathbf{a}_X\circ\mathbf{z}\circ\mathbf{d}_{Y'}+m(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})z\\ \mathbf{d}_{Y'}=\bar{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{d}_Y\circ\boldsymbol{\mu}=(d_1\cos\tau_1-d_2\sin\tau_1)\mathbf{i}_1+(d_2\cos\tau_1+d_1\sin\tau_1)\mathbf{i}_2+d_3\mathbf{i}_3.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Эти уравнения имеют вид уравнений движения четырехмерного одночастотного возмущенного осциллятора. Роль малого параметра в рассматриваемой задаче играет безразмерное отношение ma^*dI_1/L^2, где $a^*=|\mathbf{a}^*|$ — максимально возможное кажущееся ускорение точки подвеса тела, $d=|\mathbf{d}|$ — расстояние от точки подвеса тела до его центра масс.

Для исследования движения тела может быть использована как первая, так и вторая форма уравнений движения в кватернионных оскулирующих элементах. Анализ показывает, что уравнения (1.10) более удобны для аналитического решения рассматриваемой задачи, поскольку позволяют получить осредненные уравнения, легче интегрируемые в квадратурах (уравнения (1.8) могут оказаться более удобными при численном решении задачи в силу их бóльшей симметрии).

Медленными переменными в уравнениях движения тела (1.10), (1.11), (2.2) являются параметры Родрига — Гамильтона e_j, c_j (компоненты кватернионов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{c}$) и модуль кинетического момента L, а быстрыми переменными — переменные τ и τ_1. Частоты переменных τ и τ_1 во времени t определяются формулами $\tau^\bullet=L/I_1$, $\tau_1^\bullet=[(I_1-I_3)/I_1]r$, а в безразмерном времени τ — соотношениями: $d\tau/d\tau=1$, $d\tau_1/d\tau=[(I_1-I_3)/L]r$.

Для невозмущенного движения симметричного твердого тела (когда $\mathbf{d}=0$) переменные $\mathbf{e}$, $\mathbf{c}$, L являются постоянными величинами. Частоты $\tau^\bullet$, $\tau_1^\bullet$ в этом случае, как уже отмечалось, также постоянны и имеют смысл угловых скоростей прецессии и собственного вращения твердого тела соответственно.

Для возмущенного движения тела (когда $\mathbf{d}\neq0$), правые части уравнений (1.10), дополненных соотношениями (1.11), (2.2), для медленных переменных $\mathbf{e}$, $\mathbf{c}$, L являются периодическими функциями быстрых переменных τ и τ_1 с периодом 2π. Для получения уравнений первого приближения проведем независимое осреднение правых частей этих уравнений по каждой из быстрых переменных τ и τ_1. Сохраняя за осредненными переменными прежние обозначения и переходя после осреднения от безразмерного времени τ ко времени t, получим следующие уравнения первого приближения:

$$2\mathbf{e}^\bullet=(md_3/L)c_{33}(\mathbf{a}_X\circ\mathbf{e}-a_{\eta_3}\mathbf{e}\circ\mathbf{i}_3) \tag{2.3}$$

$$2\mathbf{c}^{\bullet}=(md_3/L)\,a_{\eta_3}(\mathbf{c}\circ\mathbf{i}_3-c_{33}\mathbf{i}_3\circ\mathbf{c}) \qquad (2.4)$$

$$a_{\eta_3}=2a_1^*(e_0e_2+e_1e_3)+2a_2^*(e_2e_3-e_0e_1)+a_3^*[1-2(e_1^2+e_2^2)] \qquad (2.5)$$

$$c_{33}=1-2(c_1^2+c_2^2)=2(c_0^2+c_3^2)-1, \quad L=\mathrm{const}, \quad \tau=(L/I_1)t$$

Здесь $\mathbf{a}_X$ — отображение вектора $\mathbf{a}$ кажущегося ускорения точки подвеса тела на инерциальный базис X^* (или X), являющееся известной функцией времени t; a_{η_3} — проекция вектора $\mathbf{a}$ на направление вектора $\mathbf{L}$ (ось $O\eta_3$), $a_i^*=a_i^*(t)$ — проекция вектора $\mathbf{a}$ на ось X_i^* (компонента кватерниона $\mathbf{a}_X$), c_{33} — косинус угла между осью симметрии тела и вектором кинетического момента $\mathbf{L}$.

Кватернионное уравнение (2.4) эквивалентно системе четырех скалярных уравнений

$$\begin{aligned} 2c_0^{\bullet}&=-(md_3/L)\,a_{\eta_3}(1-c_{33})\,c_3, & 2c_3^{\bullet}&=(md_3/L)\,a_{\eta_3}(1-c_{33})\,c_0 \\ 2c_1^{\bullet}&=(md_3/L)\,a_{\eta_3}(1+c_{33})\,c_2, & 2c_2^{\bullet}&=-(md_3/L)\,a_{\eta_3}(1+c_{33})\,c_1. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Эта система имеет интегралы $c_0^2+c_3^2=\mathrm{const}$, $c_1^2+c_2^2=\mathrm{const}$, поэтому $c_{33}=\mathrm{const}$.

Таким образом, модуль кинетического момента тела L и угол между осью симметрии тела и вектором кинетического момента тела остаются в первом приближении постоянными.

Кватернионное уравнение (2.3), описывающее движение вектора кинетического момента тела в инерциальном базисе, в силу равенства $c_{33}=\mathrm{const}$ может рассматриваться отдельно от кватернионного уравнения (2.4), характеризующего движение оси симметрии тела в базисе η. После нахождения переменных $e_j=e_j(t)$ из замкнутой подсистемы нелинейных дифференциальных уравнений (2.3) может быть определена в соответствии с (2.5) как функция времени t проекция кажущегося ускорения a_{η_3}. После чего из системы линейных нестационарных дифференциальных уравнений (2.4) (или (2.6)) могут быть найдены переменные $c_j=c_j(t)$.

Прежде чем переходить к интегрированию систем уравнений (2.3) и (2.4), установим угловую скорость вращения вектора кинетического момента тела $\mathbf{L}$ в инерциальном базисе X^* и угловую скорость вращения оси симметрии тела в базисе η, связанном с вектором $\mathbf{L}$.

Учитывая уравнение (2.3), получаем следующее выражение для отображения вектора абсолютной угловой скорости вращения базиса η на инерциальный базис X^*: $\boldsymbol{\omega}_X^*=2\mathbf{e}^{\bullet}\circ\bar{\mathbf{e}}=(md_3/L)\,c_{33}(\mathbf{a}_X-a_{\eta_3}\mathbf{l}_X)$, где $\mathbf{l}_X$ — отображение на инерциальный базис единичного вектора $\mathbf{l}$, направленного по вектору $\mathbf{L}$.

В соответствии с этим выражением в векторной записи имеем

$$\boldsymbol{\omega}^*=(md_3/L)\,c_{33}(\mathbf{a}-a_{\eta_3}\mathbf{l}) \qquad (2.7)$$

Из формулы (2.7) видно, что абсолютная угловая скорость вращения базиса η складывается из двух составляющих: из составляющей

$$\boldsymbol{\omega}^{**}=(md_3/L)\,c_{33}\mathbf{a}(t), \quad L=\mathrm{const}, \quad c_{33}=\mathrm{const} \qquad (2.8)$$

параллельной вектору кажущегося ускорения $\mathbf{a}$, и из составляющей $\boldsymbol{\omega}^{***}=-(md_3/L)\,c_{33}a_{\eta_3}\mathbf{l}$, параллельной вектору $\mathbf{L}$ (оси $O\eta_3$).

Изменение направления вектора $\mathbf{L}$ в инерциальном базисе происходит за счет составляющей $\boldsymbol{\omega}^{**}$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{\omega}^{**}$, определяемый формулой (2.8), является угловой скоростью вращения вектора кинетического момента тела в инерциальном базисе.

Аналогично находим угловую скорость $\mathbf{u}^{**}$ вращения оси симметрии твердого тела относительно базиса η:

$$\mathbf{u}^{**}=[\,(1/I_1)-(md_3/L^2)\,c_{33}a_{\eta_3}]\,\mathbf{L}, \qquad (2.9)$$

где $\mathbf{y}_3$ — единичный вектор оси симметрии тела.

Таким образом, из осредненных уравнений движения симметричного твердого тела следует, что в первом приближении вектор кинетического момента твердого тела **L**, оставаясь неизменным по модулю, вращается в инерциальном пространстве с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^{**}$, определяемой формулой (2.8). Эта угловая скорость пропорциональна вектору кажущегося ускорения точки подвеса тела и является известной функцией времени. Ось симметрии твердого тела движется (в соответствии с (2.9)) вокруг вектора кинетического момента по конической поверхности на постоянном угловом расстоянии от него с угловой скоростью

$$u^{**}=(L/I_1)-(md_3/L)a_{\eta_3}c_{33},\quad a_{\eta_3}=a_{\eta_3}(t,\mathbf{e}(t));\quad L,\ c_{33}=\mathrm{const},$$

которая зависит от ориентации вектора кинетического момента тела в инерциальном пространстве (параметров e_j) и от времени t (это движение рассматривается относительно системы координат η).

Отметим, что для симметричного твердого тела с неподвижной точкой подвеса из формулы (2.8) следует формула, полученная в [7] с помощью осреднения уравнений движения твердого тела по движению Эйлера — Пуансо по пути, предложенному в [8] для нерезонансных случаев. Для гармонических колебаний точки подвеса твердого тела в неподвижной горизонтальной плоскости из формулы (2.8) при $d_3=1$ и $c_{33}=1$ (прецессионная постановка) следует формула для угловой скорости вращения оси симметрии твердого тела, вытекающая при отсутствии сил диссипации из уточненного прецессионного уравнения, полученного в [9].

3. Интегрирование осредненных уравнений. Введем вместо кватернионной переменной **e** новую переменную $^*\mathbf{e}$ по формулам

$$\mathbf{e}=\mathbf{e}^*\circ(1\cos(\tau_2/2)+\mathbf{i}_3\sin(\tau_2/2))\qquad(3.1)$$

$$\tau_2^{\boldsymbol{\cdot}}=-(md_3/L)c_{33}a_{\eta_3}\qquad(3.2)$$

Здесь проекция кажущегося ускорения a_{η_3} является в соответствии с (2.5), (3.1) функцией времени t и новых переменных e_j^* (компонент кватерниона $\mathbf{e}^*$):

$$a_{\eta_3}=2a_1^*(e_0^*e_2^*+e_1e_3^*)+2a_2^*(e_2^*e_3^*-e_0^*e_1^*)+a_3^*[1-2(e_1^{*2}+e_2^{*2})]\qquad(3.3)$$

В новых переменных уравнение (2.3) принимает вид

$$2\mathbf{e}^{*\boldsymbol{\cdot}}=(md_3/L)c_{33}\mathbf{a}_X(t)\circ\mathbf{e}^*=\boldsymbol{\omega}_X^{**}(t)\circ\mathbf{e}^*\qquad(3.4)$$

Это уравнение является кватернионным кинематическим уравнением вращательного движения базиса η^* относительно инерциального базиса X^*, записанным в отображениях на базис X^*. Ось η_3^* базиса η^* направлена по вектору кинетического момента **L** (совпадает с осью η_3 базиса η), а абсолютная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}^{**}$ вращения базиса η^* определяется формулой (2.8) и является (в отображениях на базис X^*) известной функцией времени t.

Уравнение (3.4) интегрируется в квадратурах в известных случаях интегрируемости кинематических уравнений: когда вектор кажущегося ускорения **a** точки подвеса твердого тела постоянен по направлению в инерциальном базисе, но переменен по модулю, когда вектор **a** совершает в инерциальном пространстве коническое движение, а также в более общем случае [10], обобщающем первые два, когда

$$\mathbf{a}_X=f^*(t)\left[p_1^*\mathbf{i}_1+q_1^*\cos\left(\psi_1^*\int_{t_0}^{t}f^*(t)\,dt+\mu^*\right)\mathbf{i}_2+q_1^*\sin\left(\psi_1^*\int_{t_0}^{t}f^*(t)\,dt+\mu^*\right)\mathbf{i}_3\right]$$

где p_1^*, q_1^*, ψ_1^*, μ^* — некоторые постоянные, $f^*(t)$ — произвольная функция времени.

В ряде случаев движение точки подвеса твердого тела удобно задавать с помощью введения сопровождающего трехгранника Дарбу Z [1], ось Z_3 которого направлена по геоцентрической вертикали, а ориентация осей Z_1, Z_2 в азимуте произвольна. Обозначим через $\boldsymbol{\nu}$ кватернион, характеризующий ориентацию трехгранника Дарбу относительно инерциального базиса. Тогда

$$\mathbf{a}_X=\mathbf{v}\circ\mathbf{a}_Z\circ\bar{\mathbf{v}} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{e}^*=\mathbf{v}\circ\boldsymbol{\lambda} \tag{3.6}$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ — собственный кватернион, характеризующий ориентацию базиса η^* относительно Z.

Подставляя (3.5), (3.6) в уравнение (3.4), и учитывая кинематическое уравнение

$$2\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{v}\circ\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ \tag{3.7}$$

где $\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ$ — отображение вектора $\boldsymbol{\omega}^\circ$ абсолютной угловой скорости вращения базиса Z на его же оси, получим для кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ уравнение

$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}}=[(md_3/L)c_{33}\mathbf{a}_Z-\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ]\circ\boldsymbol{\lambda} \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) является кватернионным кинематическим уравнением вращательного движения базиса η^* относительно Z.

Таким образом, в случае, когда движение точки подвеса твердого тела задано с помощью введения сопровождающего трехгранника Дарбу, уравнение (3.4) заменяется уравнениями (3.8), (3.7) и соотношением (3.6). Уравнения (3.8), (3.7) являются линейными дифференциальными уравнениями с переменными во времени t коэффициентами. Для движения точки подвеса твердого тела с постоянной скоростью v по дуге большого круга невращающейся сферы, концентрической с Земным шаром, коэффициенты уравнений являются постоянными, и уравнения интегрируются в квадратурах.

После нахождения зависимостей $e_j^*=e_j^*(t)$ может быть определена в соответствии с формулой (3.3) как функция времени t проекция кажущегося ускорения a_{η_3}, а затем и переменная τ_2 по формуле

$$\tau_2=-(md_3/L)c_{33}\int\limits_0^t a_{\eta_3}(t)\,dt \tag{3.9}$$

получаемой из уравнения (3.2) (при этом полагается, что при $t=0$ $\tau_2=0$).

Итак, для нахождения зависимостей $e_j=e_j(t)$ (решения уравнения (2.3)) в случае задания вектора кажущегося ускорения $\mathbf{a}$ точки подвеса твердого тела своими проекциями $a_j^*=a_j^*(t)$ в инерциальном базисе необходимо проинтегрировать систему (3.4) из четырех линейных дифференциальных уравнений с переменными в общем случае коэффициентами. После чего необходимо воспользоваться соотношениями (3.3), (3.9), (3.1). Случаи интегрируемости кватернионного уравнения (3.4) были указаны выше. Если же вектор $\mathbf{a}$ задан своими проекциями (через посредство проекций вектора $\boldsymbol{\omega}^\circ$) в трехграннике Дарбу, то для нахождения параметров $e_j=e_j(t)$ необходимо найти решение $\lambda_j=\lambda_j(t)$ системы (3.8) из четырех линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. После чего необходимо воспользоваться соотношениями (3.5), (3.6), (3.3), (3.9), (3.1). При этом полагается, что задан кватернион $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)$, характеризующий ориентацию трехгранника Дарбу в инерциальном базисе. В случае, когда кватернион $\mathbf{v}$ не задан, а задан лишь вектор $\boldsymbol{\omega}^\circ$ абсолютной угловой скорости вращения трехгранника Дарбу, необходимо наряду с уравнением (3.8) интегрировать кинематическое линейное нестационарное уравнение (3.7). Один из случаев интегрируемости уравнений (3.8), (3.7) был указан выше.

Перейдем к нахождению переменных c_j. Учитывая соотношение (3.2), перейдем в уравнении (2.4) к новой независимой переменной τ_2:

$$2d\mathbf{c}/d\tau_2=\mathbf{i}_3\circ\mathbf{c}-c_{33}{}^{-1}\mathbf{c}\circ\mathbf{i}_3,\quad c_{33}=\mathrm{const} \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) является линейным с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$\mathbf{c}=c_0{}^+(\sin\psi_0\mathbf{1}-\mathbf{i}_3\cos\psi_0)+c_1{}^+(\sin\psi_1\mathbf{i}_1-\cos\psi_1\mathbf{i}_2) \tag{3.11}$$

$$\psi_0={}^1/_2(1-c_{33}^{-1})\tau_2+\psi_0^+,\quad \psi_1={}^1/_2(1+c_{33}^{-1})\tau_2+\psi_1^+$$

где c_0^+, c_1^+, ψ_0^+, ψ_1^+ — произвольные постоянные интегрирования.

Следовательно, зависимости $c_j=c_j(t)$ легко находятся после определения переменных $e_j^*=e_j^*(t)$ по формулам (3.11), (3.9), (3.3).

Итак, интегрирование нелинейных осредненных уравнений (2.3), (2.4) сводится к интегрированию линейного нестационарного уравнения (3.4) (или (3.8)), имеющего вид кватернионного кинематического уравнения в параметрах Родрига — Гамильтона. Ориентация твердого тела в инерциальном базисе находится после определения переменных e_j и c_j по формулам (1.6), (1.4), (1.12), где следует положить $\tau_1=[(I_1-I_3)/I_1I_3]c_{33}Lt$, $\tau=Lt/I_1$.

Рассмотренная задача иллюстрирует эффективность применения предлагаемых кватернионных уравнений движения динамически симметричного твердого тела для исследования его ротационных движений. Полученные модели и результаты могут быть использованы в теории гироскопов с неконтактным подвесом.

Автор благодарит В. Ф. Журавлева, обратившего внимание автора на рассмотренную задачу, за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
3. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные методы в задачах относительного движения динамически симметричных материальных систем. I // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 30–37.
4. *Челноков Ю. Н.* Об осцилляторном и ротационном движениях одного класса механических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 28–35.
5. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
6. *Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 862 с.
7. *Климов Д. М., Космодемьянская Г. Н., Черноусько Ф. Л.* О движении гироскопа с неконтактным подвесом // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 2. С. 3–8.
8. *Черноусько Ф. Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474–483.
9. *Журавлев В. Ф.* Об одной форме уравнений движения симметричного твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 5–11.
10. *Челноков Ю. Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига — Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 11–20.

Саратов

Поступила в редакцию 25.VIII.1987