МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1990

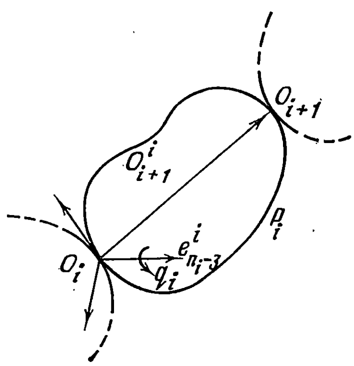
УДК 531.8

А. Т. ЗАРЕМБА

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МНОГОЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С ГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

Получены новые выражения для производных произвольного порядка коэффициентов кинематических соотношений многозвенной цепи через матрицы-функции самих коэффициентов. На их основе рассматриваются алгоритмы формирования уравнений динамики манипулятора и их линеаризации, которые имеют рекуррентный вид и легко формализуются. Исследуется случай наложения на систему голономных связей общего вида; синтезируется управление, обеспечивающее стабилизацию программного движения, описываемого заданной вектор-функцией обобщенных координат.

1. Основные кинематические соотношения. Задача формирования уравнений движения сложных многозвенных механических систем [1—9] актуальна при динамическом анализе, оптимизации структуры и синтезе законов управления. В [1] уравнения динамики конструируются с использованием матриц (4×4) преобразования однородных координат. Более эффективные вычислительные алгоритмы на основе уравнений Ньютона — Эйлера рассматриваются в [2]. Вычисление коэффициентов уравнений движения при помощи рекуррентного построения матриц инерции замороженной цепи производится в [2—3]. В [4] получены уравнения Лагранжа второго рода для многозвенных манипуляторов с использованием кинематических винтов [5]. В [6—7] на основе последовательно выполняемых декомпозиции и агрегатирования конструируются модели механики многозвенных технических систем со структурой дерева. В [8] рассматриваются механические системы, содержащие упругие элементы большой жесткости, и методами малого параметра производится асимптотический анализ уравнений Лагранжа. Динамические свойства многозвенного манипулятора с существенно упругими звеньями исследуются в [9].



В работе рассматривается механическая система, представляющая собой открытую кинематическую цепь P_0, $P_1, \ldots, P_n$ (фигура), отдельные звенья которой соединены между собой вращательными или поступательными кинематическими парами пятого класса. Относительное положение сопрягаемых звеньев определяется обобщенной координатой пары q_i $(i=\overline{1,n})$, равной величине поворота или поступательного перемещения вдоль оси пары. Сочленение отдельных звеньев только парами пятого класса не сужает класс исследуемых механизмов, поскольку пары произвольного класса можно получить совмещением в одной точке нескольких кинематических пар пятого класса [5]. Предполагается, что основание механизма — звено P_0 является неподвижным. С последним звеном цепи P_n жестко связан рабочий орган или обзорно-информационная система, осуществляющая взаимодействие с объектами внешней среды. Все звенья цепи представляют собой абсолютно твердые тела с известными значениями массо-инерционных параметров, причем массо-инерционные параметры рабочего органа учитываются совместно с массо-инерционными параметрами звена P_n.

Свяжем с i-м звеном кинематической цепи систему координат $E_i=(O_i, [\mathbf{e}^i])$, где O_i — начало системы координат, $[\mathbf{e}^i]=(\mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \mathbf{e}_3^i)$ — ортонормированный базис, причем одна из осей базиса совпадает с осью кинематической пары L_i, а точка O_i с ее центром $(i=\overline{1, n})$. Номер оси системы координат, совпадающей с осью кинематической пары, определяется целочисленным параметром $n_i \in \overline{1, 6}$, причем для поступательной кинематической пары выполнено $n_i \in \overline{1, 3}$, а для вращательной $n_i \in \overline{4, 6}$.

Относительное положение двух соседних систем координат E_{i-1} и E_i задается шестью параметрами [6]: вектором $\mathbf{O}_i^{i-1,u}$ линейного сдвига точки O_i относительно O_{i-1}, который для поступательной пары определен в системе координат E_i $(u=i)$, а для вращательной пары в E_{i-1} $(u=i-1)$, и тремя углами θ_j^i $(j=\overline{1, 3})$, которые устанавливают матрицу ориентации ортов базиса $[\mathbf{e}^i]$ в $[\mathbf{e}^{i-1}]$ через произведение трех матриц простейших поворотов

$$C_i^{i-1}=C_1(\theta_1^i)C_2(\theta_2^i)C_3(\theta_3^i)$$

$$C_k(\alpha)=E+(1-\cos\alpha)\langle\mathbf{e}_k\rangle\langle\mathbf{e}_k\rangle+\sin\alpha\langle\mathbf{e}_k\rangle \quad (k\in\overline{1, 3}) \qquad (1.1)$$

где $C_k(\alpha)$ — матрица поворота вокруг орта $\mathbf{e}_k$ на угол α, $\langle\mathbf{e}_k\rangle$ — кососимметрическая матрица, порождаемая вектором $\mathbf{e}_k$, k — номер оси, вокруг которой выполняется поворот на угол α.

Из шести скалярных параметров $O_{ij}^{i-1,u}$, θ_j^i $(j=\overline{1, 3})$ один является обобщенной координатой пары L_i, а остальные — постоянные линейные или угловые конструктивные параметры звена P_{i-1}.

Следовательно, для поступательной кинематической пары система координат E_{i-1} приводится к E_i при помощи трех поворотов на углы θ_j^i $(j=\overline{1, 3})$ и последующего переноса на вектор $\mathbf{O}_i^{i-1,i}$, причем переменная величина переноса в направлении орта $\mathbf{e}_{n_i}^i$ является обобщенной координатой кинематической пары L_i.

При $n_i \in \overline{4, 6}$ точка O_{i-1} смещается на постоянный вектор $\mathbf{O}_i^{i-1,i-1}$ и далее выполняются три поворота, причем переменная величина поворота $q_i=\Theta^i_{(n_i-3)}$ вокруг орта $\mathbf{e}_{(n_i-3)}$ является обобщенной координатой кинематической пары L_i. Предполагается, что поворот вокруг оси $\mathbf{e}^i_{(n_i-3)}$ на переменный угол q_i выполняется последним из всех ненулевых поворотов при переходе из E_{i-1} в E_i.

В дальнейшем используются выражения для вектора квазискоростей $\mathbf{V}_k^{jk}=\|\mathbf{v}_k^{jk}, \boldsymbol{\omega}_k^{jk}\|$ и его локальной производной $\mathbf{V}_k^{jk*}$ через обобщенные координаты, скорости и ускорения системы [6, 7]:

$$\mathbf{V}_k^{jk}=\sum_{i=j+1}^{k} L_k^{iT}\mathbf{f}^i q_i^{\cdot} \quad (k>j), \qquad \mathbf{V}_k^{jk*}=\sum_{i=j+1}^{k}(L_k^{iT}\mathbf{f}^i q_i^{\cdot\cdot}+\Phi_k^{ikT}L_k^{iT}\mathbf{f}^i q_i^{\cdot}) \qquad (1.2)$$

где $\mathbf{V}_k^{jk}$ — вектор квазискоростей, $\mathbf{v}_k^{jk}$, $\boldsymbol{\omega}_k^{jk}$ — линейная и угловая скорости звена P_k относительно E_j в осях E_k; $\mathbf{f}^i$ — единичный вектор (6×1) с единицей на месте с номером n_i. В (1.2) матрица (6×6) L_k^i преобразования координат скользящего вектора при переходе из E_i в E_k и блочная матрица Φ_k^{ik} (6×6), порожденная вектором $\mathbf{V}_k^{ik}$, определяются равенствами [6]:

$$L_k^i=\begin{Vmatrix} C_k^i & 0 \\ \langle\mathbf{O}_k^i\rangle^i C_k^i & C_k^i \end{Vmatrix}, \quad \Phi_k^{ik}=\begin{Vmatrix} \langle\boldsymbol{\omega}_k^i\rangle^k & 0 \\ \langle\mathbf{v}_k^i\rangle^k & \langle\boldsymbol{\omega}_k^i\rangle^k \end{Vmatrix}$$

где C_k^i — матрица ортов $[\mathbf{e}^k]$ в $[\mathbf{e}^i]$ определяется произведением матриц вида (1.1) $C_k^i=C_{i+1}^iC_{i+2}^{i+1}\ldots C_k^{k-1}$.

Простая форма записи кинематических соотношений (1.2) обусловлена оговоренным ранее порядком выполнения сдвигов и поворотов при переходе из E_{i-1} в E_i, при котором вектор квазискоростей $\mathbf{V}_i^{i-1,i}$ двух соседних звеньев цепи равен $\mathbf{V}_i^{i-1,i}=\mathbf{f}^i q_i^{\cdot}$. При синтезе алгоритмов управления роботом необходимы также соотношения вида (1.2) для случая обратного хода по кинематической цепи. При $k<j$ учитывая, что вектор квазискоростей $\mathbf{V}_{i-1}^{i,i-1}$ не имеет такого простого представления как вектор $\mathbf{V}_i^{i-1,i}$, вводится оператор G перестановки компонент шестимерного вектора, определенный блочной матрицей (6×6) (E — единичная матрица (3×3)):

$$G=\begin{Vmatrix}0 & E\\ E & 0\end{Vmatrix}$$

Для операции перестановки компонент шестимерного вектора выполняются следующие основные правила:

$$G(\mathbf{a}+\mathbf{b})=G\mathbf{a}+G\mathbf{b},\quad G^2\mathbf{a}=\mathbf{a},\quad G(k\mathbf{a})=kG\mathbf{a}$$

$$GL_k^{iT}\mathbf{a}=L_i^kG\mathbf{a},\qquad G\Phi_k^{ikT}\mathbf{a}=-\Phi_k^{ik}G\mathbf{a}$$

Теперь с учетом равенств

$$\mathbf{V}_i^{ki}=-L_i^{kT}\mathbf{V}_k^{ik},\qquad \mathbf{V}_i^{ki*}=-L_i^{kT}\mathbf{V}_k^{ik*}-\Phi_i^{kiT}L_i^{kT}\mathbf{V}_k^{ik} \tag{1.3}$$

соотношения (1.2) преобразуются в выражения для кинематических винтов

$$\begin{gathered}G\mathbf{V}_k^{jk}=-\sum_{i=k+1}^{j}L_i^kG\mathbf{f}^iq_i^{\cdot}\qquad (k<j)\\ G\mathbf{V}_k^{jk*}=-\sum_{i=k+1}^{j}L_i^k(G\mathbf{f}^iq_i^{\cdot\cdot}+\Phi_i^{ki}G\mathbf{f}^iq_i^{\cdot})\end{gathered} \tag{1.4}$$

Введем в рассмотрение векторы $\mathbf{l}_k^i$ и $\mathbf{g}_k^i$, которые равны единичному орту $\mathbf{f}^i$, приведенному к осям связанной со звеном P_k системы координат

$$\begin{gathered}\mathbf{l}_k^i=L_k^{iT}\mathbf{f}^i\quad (i\leqslant k),\quad \mathbf{l}_k^i\equiv 0\quad (i>k)\\ \mathbf{g}_k^i\equiv 0\quad (i<k),\quad \mathbf{g}_k^i=L_k^{iT}\mathbf{f}^i=G(L_i^kG\mathbf{f}^i)\quad (i\geqslant k)\end{gathered} \tag{1.5}$$

Обозначим символом $\langle\mathbf{f}^t\rangle$ матрицу размерности (6×6)

$$\langle\mathbf{f}^t\rangle=\begin{Vmatrix}\langle\mathbf{f}_2^t\rangle & 0\\ \langle\mathbf{f}_1^t\rangle & \langle\mathbf{f}_2^t\rangle\end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{f}_1^t$, $\mathbf{f}_2^t$ векторы (3×1), состоящие из первых и последних трех компонент шестимерного вектора $\mathbf{f}^t$ соответственно; $\langle\mathbf{f}_1^t\rangle$, $\langle\mathbf{f}_2^t\rangle$ — кососимметрические матрицы (3×3).

Для матриц (1.6) справедливы следующие соотношения

$$\begin{gathered}\langle\mathbf{f}^t\rangle^T\mathbf{f}^l=-\langle\mathbf{f}^l\rangle^T\mathbf{f}^t,\quad \langle\mathbf{f}^t\rangle\langle\mathbf{f}^l\rangle-\langle\mathbf{f}^l\rangle\langle\mathbf{f}^t\rangle=-\langle\langle\mathbf{f}^t\rangle^T\mathbf{f}^l\rangle\\ \langle L_k^{tT}\mathbf{f}^t\rangle=L_t^k\langle\mathbf{f}^t\rangle L_k^t,\quad \langle k\mathbf{f}^t\rangle=k\langle\mathbf{f}^t\rangle\end{gathered} \tag{1.7}$$

Равенства (1.7) доказываются поблочным перемножением с использованием свойств кососимметрических матриц (3×3) [10].

В силу первых уравнений (1.2), (1.7) матрица Φ_k^{ik} представляется суммой матриц (1.6)

$$\Phi_k^{ik}=\sum_{s=i+1}^{k}\langle\mathbf{l}_k^s\rangle q_s^{\cdot}\quad (k>i),\qquad \Phi_k^{ik}=-\sum_{s=k+1}^{i}\langle\mathbf{g}_k^s\rangle q_s^{\cdot}\quad (k<i) \tag{1.8}$$

и кинематические соотношения (1.2), (1.7) преобразуются к виду

$$\mathbf{V}_k^{jk}=\sum_{i=j+1}^{k}\mathbf{l}_k{}^i q_i{}^{\cdot} \quad (k>j), \qquad \mathbf{V}_k^{jk*}=\sum_{i=j+1}^{k}\sum_{s=i+1}^{k}(\mathbf{l}_k{}^i q_i{}^{\cdot\cdot}+\langle\mathbf{l}_k{}^s\rangle^T\mathbf{l}_k{}^i q_i{}^{\cdot} q_s{}^{\cdot})$$

$$\mathbf{V}_k^{jk}=-\sum_{i=k+1}^{j}\mathbf{g}_k{}^i q_i{}^{\cdot} \quad (k<j), \qquad \mathbf{V}_k^{jk*}=\sum_{i=k+1}^{j}\sum_{s=k+1}^{i}(\mathbf{g}_k{}^i q_i{}^{\cdot\cdot}-\langle\mathbf{g}_k{}^s\rangle^T\mathbf{g}_k{}^i q_i{}^{\cdot} q_k{}^{\cdot}) \tag{1.9}$$

Отметим, что вектор $\mathbf{l}_k{}^i$ равен (1.5), (1.9) частной производной вектора $\mathbf{V}_k{}^{jk}(\mathbf{V}_k^{jk*})$ по обобщенной скорости $q_i{}^{\cdot}$ (ускорении $q_i{}^{\cdot\cdot}$) кинематической пары L_i:

$$\mathbf{l}_k{}^i=\partial\mathbf{V}_k{}^{jk}/\partial q_i{}^{\cdot}=\partial\mathbf{V}_k^{jk*}/\partial q_i{}^{\cdot\cdot} \tag{1.10}$$

а вектор $g_k{}^i$ определяется одним из соотношений

$$\mathbf{g}_k{}^i=-\partial\mathbf{V}_k{}^{jk}/\partial q_i{}^{\cdot}=-\partial\mathbf{V}_k^{jk*}/\partial q_i{}^{\cdot\cdot} \tag{1.11}$$

Для нахождения частной производной $(\mathbf{l}_k{}^i)^t$ вектора $\mathbf{l}_k{}^i$ по обобщенной координате q_t дифференцируется соотношение (1.5)

$$(\mathbf{l}_k{}^i)^t=L_k{}^{tT}\frac{\partial}{\partial q_t}(L_t^{t-1T})L_{t-1}^{iT}\mathbf{f}^i \qquad (t\in\overline{i+1,k}) \tag{1.12}$$

Здесь производная матрицы $L_t{}^{t-1}$ определяется выражением

$$\partial L_t^{t-1}/\partial q_t=L_t^{t-1}\langle\mathbf{f}^t\rangle \tag{1.13}$$

которое при умножении на $q_t{}^{\cdot}$ совпадает с равенством, полученным в [6] для $L_t{}^{t-1\cdot}$. С учетом (1.13) выражение (1.12) преобразуется к виду

$$(\mathbf{l}_k{}^i)^t=L_k{}^{tT}\langle\mathbf{f}^t\rangle^T L_t{}^{kt}L_k{}^{tT}L_t{}^{iT}\mathbf{f}^i=$$

$$=\langle L_k{}^{tT}\mathbf{f}^t\rangle^T L_k^{iT}\mathbf{f}^i=\langle\mathbf{l}_k{}^t\rangle^T\mathbf{l}_k{}^i \quad (t\in i+1,\ k) \tag{1.14}$$

Формула (1.14) позволяет значительно упростить вычисление производных векторов $\mathbf{l}_k{}^i$, которые находятся умножением $\mathbf{l}_k{}^i$ на известную (1.6) матрицу — функцию самих коэффициентов вместо выполнения дифференцирования и многократного матричного умножения [1—3].

Последовательным дифференцированием (1.14) находятся выражения для частных производных вектора $\mathbf{l}_k{}^i$ произвольного порядка.

Теорема 1. Пусть целые числа $t_1, t_2, \ldots, t_p$ удовлетворяют неравенствам

$$i\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant t_p\leqslant k \tag{1.15}$$

Тогда частная производная $(\mathbf{l}_k{}^i)^{t_j,\ldots,t_1}$ вектора $\mathbf{l}_k{}^i$ порядка p по обобщенным координатам механизма $q_{t_1}, q_{t_2}, \ldots, q_{t_p}$ определяется выражением

$$(\mathbf{l}_k{}^i)^{t_j,\ldots,t_1}=\langle\mathbf{l}_k{}^{t_p}\rangle^T\ldots\langle\mathbf{l}_k{}^{t_2}\rangle^T\langle\mathbf{l}_k{}^{t_1}\rangle^T\mathbf{l}_k{}^i \tag{1.16}$$

Доказательство. Справедливость равенства (1.16) устанавливается по индукции. При $p=1$ (1.16) совпадает с (1.14). Пусть выражение (1.16) определяет производную вектора $\mathbf{l}_k{}^i$ порядка p. Покажем, что (1.16) справедливо для производной вектора $\mathbf{l}_k{}^i$ порядка $p+1$. Для этого правая часть (1.16) дифференцируется по $q_{t_{p+1}}$. Предположим, что t_{p+1} принадлежит первому интервалу $i\leqslant t_{p+1}\leqslant t_1$. Тогда в правой части (1.16) от $q_{t_{p+1}}$ зависит только вектор $\mathbf{l}_k{}^i$. В результате находится равенство

$$\frac{\partial}{\partial q_{t_{p+1}}}(\mathbf{l}_k{}^i)^{t_j,\ldots,t_s}=\langle\mathbf{l}_k^{t_p}\rangle^T\ldots\langle\mathbf{l}_k{}^{t_2}\rangle^T\langle\mathbf{l}_k{}^{t_1}\rangle^T\frac{\partial}{\partial q_{t_{p+1}}}\mathbf{l}_k{}^i=\langle\mathbf{l}_k^{t_p}\rangle^T\ldots$$

$$\ldots\langle\mathbf{l}_k{}^{t_2}\rangle^T\langle\mathbf{l}_k{}^{t_1}\rangle^T\langle\mathbf{l}_k^{t_{p+1}}\rangle^T\mathbf{l}_k{}^i \tag{1.17}$$

Заменой индексов $(i\to i+1,\ p+1\to 1)$ (1.17) приводится к виду (1.16). Предположим, что получено выражение вида (1.16) для производной вектора $\mathbf{l}_k^i$ порядка $p+1$ для случая $t_{j-1}<t_{p+1}\leqslant t_j$:

$$\frac{\partial}{\partial q_{t_{p+1}}}(\mathbf{l}_k^i)^{t_j,\ldots,t_s}=\langle\mathbf{l}_k^{t_p}\rangle^T\ldots\langle\mathbf{l}_k^{t_j}\rangle^T\langle\mathbf{l}_k^{t_{p+1}}\rangle^T\langle\mathbf{l}_k^{t_{j-1}}\rangle^T\ldots\langle\mathbf{l}_k^{t_1}\rangle^T\mathbf{l}_k^i \quad (1.18)$$

При рассмотрении соседнего интервала $t_j<t_{p+1}\leqslant t_{j+1}$ к (1.18) необходимо добавить равенство (1.16), продифференцированное по вектору $\mathbf{l}_k^{t_j}$. В результате выражение для производной преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial q_{t_{p+1}}}(\mathbf{l}_k^i)^{t_j,\ldots,t_s}=\langle\mathbf{l}_k^{t_p}\rangle^T\ldots\langle\mathbf{l}_k^{t_{j+1}}\rangle^T\{\langle\langle\mathbf{l}_k^{t_{p+1}}\rangle^T\mathbf{l}_k^{t_j}\rangle^T+\langle\mathbf{l}_k^{t_j}\rangle^T\langle\mathbf{l}_k^{t_{p+1}}\rangle^T\}\ldots$$

$$\ldots\langle\mathbf{l}_k^{t_1}\rangle^T=\langle\mathbf{l}_k^{t_p}\rangle^T\ldots\langle\mathbf{l}_k^{t_{j+1}}\rangle^T\langle\mathbf{l}_k^{t_{p+1}}\rangle^T\langle\mathbf{l}_k^{t_j}\rangle^T\ldots\langle\mathbf{l}_k^{t_1}\rangle^T\mathbf{l}_k^i$$

где при свертке выражения в фигурных скобках используется второе равенство (1.7). Последовательным рассмотрением всех интервалов $j=\overline{2,n}$ устанавливается справедливость выражения (1.16) для производной вектора $\mathbf{l}_k^i$ порядка $p+1$ для любого $t_{p+1}\in\overline{i,k}$. Теорема доказана.

Соотношение (1.16) определяет производную вектора $\mathbf{l}_k^i$ при условии (1.15). Если $t_j\notin\overline{i+1,k}$ при любом $j\in\overline{1,p}$, то $(\mathbf{l}_k^i)^{t_j,\ldots,t_1}=0$. Для определения частных производных вектора $\mathbf{g}_k^i$ находится производная матрицы L_{t-1}^t по q_t. Для этого L_{t-1}^t дифференцируется по времени

$$\dot{L}_{t-1}^t=L_{t-1}^t\langle\mathbf{V}_{t-1}^{t,t-1}\rangle=-L_{t-1}^t\langle L_{t-1}^{tT}\mathbf{f}^t\dot{q}_t\rangle=-\langle\mathbf{f}^t\rangle L_{t-1}^t\dot{q}_t \quad (1.19)$$

Из (1.19) следует

$$\partial L_{t-1}^t/\partial q_t=-\langle\mathbf{f}^t\rangle L_{t-1}^t \quad (1.20)$$

Значение производных вектора $\mathbf{g}_k^i$ по обобщенным координатам механизма устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть целые числа $t_1, t_2, \ldots, t_p$ удовлетворяют неравенствам

$$k\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant t_p\leqslant i \quad (1.21)$$

Тогда частотная производная $(\mathbf{g}_k^i)^{t_p,\ldots,t_1}$ вектора $\mathbf{g}_k^i$ порядка p по обобщенным координатам механизма $q_{t_1}, q_{t_2}, \ldots, q_{t_p}$ определяется выражением

$$(\mathbf{g}_k^i)^{t_p,\ldots,t_1}=(-1)^p\langle\mathbf{g}_k^{t_1}\rangle^T\langle\mathbf{g}_k^{t_2}\rangle^T\ldots\langle\mathbf{g}_k^{t_p}\rangle^T\mathbf{g}_k^i \quad (1.22)$$

Для доказательства теоремы 2 дифференцированием второго равенства (1.5) находится производная вектора $\mathbf{g}_k^i$ первого порядка

$$(\mathbf{g}_k^i)^t=L_k^{t-1,T}\frac{\partial}{\partial q_t}(L_{t-1}^{tT})L_t^{iT}\mathbf{f}^i=-L_k^{tT}\langle\mathbf{f}^t\rangle^T L_t^{iT}\mathbf{f}^i=$$

$$=-\langle L_k^{tT}\mathbf{f}^t\rangle^T L_k^{iT}\mathbf{f}^i=-\langle\mathbf{g}_k^t\rangle^T\mathbf{g}_k^i \quad (1.23)$$

Соотношение (1.22) находится пошаговым дифференцированием равенства (1.23) и определяет частную производную вектора $\mathbf{g}_k^i$ при условии (1.21). Если $t_j\notin\overline{k,i-1}$ при любом $j\in\overline{1,p}$, то $(\mathbf{g}_k^i)^{t_p,\ldots,t_1}=0$.

2. Уравнения динамики манипулятора. Для получения уравнений динамики механизма записывается, учитывая кинематические соотношения (1.9) выражение для кинетической энергии системы

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k,\,i,\,j=1}^{n}\mathbf{l}_k^{iT}\Theta_k^k\mathbf{l}_k^j\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad (2.1) \qquad \Theta_k^k=\left\|\begin{matrix}Em_k & \langle\mathbf{r}_c^k\rangle^{kT}m_k\\ \langle\mathbf{r}_c^k\rangle^k m_k & \Theta_k^k\end{matrix}\right\| \quad (2.2)$$

где Θ_k^k — матрица (6×6) инерции Мизеса [5, 6], m_k — масса звена, $\mathbf{r}_c^{kk}$ — радиус-вектор центра масс звена P_k в системе координат E_k, Θ_k^k — матрица (3×3) тензора инерции звена, определенная в базисе $[\mathbf{e}^k]$ $(k=\overline{1,n})$.

Выражение для элементарной работы δA сил, воздействующих на механизм, имеет вид

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n}\left\{Q_i+\sum_{k=i}^{n}\mathbf{l}_k^{iT}(\mathbf{F}_{gk}{}^k+\mathbf{F}_{ek}{}^k)\right\}\delta q_i \qquad (2.3)$$

где Q_i — управляющее воздействие в i-шарнире, $F_{ei}{}^i$, $F_{gi}{}^i$ — динамические винты [5, 6] внешних возмущений и силы тяжести звена в осях системы координат

$$F_{gi}^{i}=m_i g\left\|\begin{matrix}E & 0\\ 0 & \langle\mathbf{r}_c{}^i\rangle^i\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\mathbf{z}_i\\ \mathbf{z}_i\end{matrix}\right\| \qquad (2.4)$$

где $\mathbf{z}_i$ — единичный орт в направлении вектора силы тяжести в базисе $[\mathbf{e}^i]$. Дифференцированием (2.1) находятся следующие уравнения движения

$$A(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\sum_{k=\max(i,j)}^{n}\ \sum_{i,j,s=1}^{n}[q_s^{\cdot T}d_{sj}{}^{ki}q_j^{\cdot}]\eta_i=\mathbf{f}_g+\mathbf{f}_e+\mathbf{Q} \qquad (2.5)$$

где η_i — n-мерный единичный вектор с единицей на i-м месте

$$a_{ij}=\sum_{k=\max(i,j)}^{n}\mathbf{l}_k^{iT}\Theta_k{}^k\mathbf{l}_k^j \qquad (2.6)$$

$$\begin{gathered}d_{sj}{}^{ki}={}^1/_2\{\mathbf{l}_k^{iT}\Theta_k{}^k(\mathbf{l}_k^j)^s+(\mathbf{l}_k^{iT})^s\Theta_k{}^k\mathbf{l}_k^j+(\mathbf{l}_k^{sT})^j\Theta_k{}^k\mathbf{l}_k^i+\\+\mathbf{l}_k^{sT}\Theta_k{}^k(\mathbf{l}_k^i)^j-(\mathbf{l}_k^{sT})^i\Theta_k{}^k\mathbf{l}_k^j-(\mathbf{l}_k^{sT})\Theta_k{}^k(\mathbf{l}_i^j)^i\}\end{gathered} \qquad (2.7)$$

$$f_{gi}=\sum_{k=i}^{n}\mathbf{l}_k^{iT}\mathbf{F}_{gk}{}^k,\qquad f_{ei}=\sum_{k=i}^{n}\mathbf{l}_k^{iT}\mathbf{F}_{ek}{}^k \qquad (2.8)$$

Для повышения экономичности алгоритма формирования коэффициентов уравнения (2.5) производится суммирование по звеньям кинематической цепи. С учетом (1.5) выражение (2.6) для элементов матрицы A преобразуется к виду

$$a_{ij}=\mathbf{f}^{iT}\Theta_i{}^{i*}\mathbf{l}_i^j+\mathbf{l}_j^{iT}\Theta_j{}^{j*}\mathbf{f}^j(1-\delta_{ij}) \qquad (2.9)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\Theta_i{}^{i*}$ — эффективная матрица инерции (6×6) участка кинематической цепи начиная со звена P_i до рабочего органа, определенная в системе координат E_i [6]:

$$\Theta_i{}^{i*}=\sum_{k=i}^{n}L_k{}^i\Theta_k{}^kL_k{}^{iT} \qquad (2.10)$$

Для свертки по индексу k выражения (2.7) вычисляется производная матрицы $\Theta_i{}^{i*}$.

Теорема 3. Производная $(\Theta_i{}^{i*})^s$ матрицы $\Theta_i{}^{i*}$ по обобщенной координате q_s механизма определяется равенствами

$$(\Theta_i{}^{i*})^s=\langle\mathbf{g}_i{}^s\rangle\Theta_i{}^{s*}+\Theta_i{}^{s*}\langle\mathbf{g}_i{}^s\rangle^T\quad(s>i),\quad(\Theta_i{}^{i*})^s\equiv 0\quad(s\leqslant i) \qquad (2.11)$$

где $\Theta_i{}^{s*}$ — эффективная матрица инерции участка кинематической цепи начиная со звена P_s до рабочего органа, определенная в E_i:

$$\Theta_i{}^{s*}=L_s{}^i\Theta_s{}^{s*}L_s{}^{iT} \qquad (2.12)$$

Доказательство. Выражение (2.11) находится дифференцированием (2.10) с учетом (1.5), (1.13):

$$\frac{\partial}{\partial q_s}\sum_{k=i}^{n}(L_k{}^i\Theta_k{}^kL_k{}^{iT})=\sum_{k=s}^{n}\left(L_{s-1}^{\ i}\frac{\partial}{\partial q_s}(L_s^{\ s-1})L_k{}^s\Theta_k{}^kL_k{}^{iT}+\right.$$

$$+L_h{}^i\Theta_h{}^k L_h{}^{sT}\frac{\partial}{\partial q_s}(L_s^{s-1T})L_{s-1}^{iT}\Big)=L_s{}^i(\langle \mathbf{f}^s\rangle\Theta_s{}^{s*}+\Theta_s{}^{s*}\langle \mathbf{f}^s\rangle^T)L_s{}^{iT}=$$

$$=\langle g_i{}^s\rangle\Theta_i{}^{s*}+\Theta_i{}^{s*}\langle g_i{}^s\rangle^T$$

Теорема доказана.

Последовательным дифференцированием равенства (2.11) по координатам $q_{t_1},\ldots,q_{t_p}$, выполняемым в порядке убывания их номеров $i\leqslant t_1\leqslant\ldots$ $\ldots\leqslant t_p\leqslant n$, находятся рекуррентные соотношения, определяющие производную матрицу $\Theta_i{}^{i*}$ порядка p:

$$\partial/\partial q_{tj}(\Theta_i{}^{i*})^{t_p,\ldots,t_{j+1}}=\langle \mathbf{g}_i{}^{t_j}\rangle(\Theta_i{}^{i*})^{t_p,\ldots,t_{j+1}}+$$
$$+(\Theta_i{}^{i*})^{t_p,\ldots,t_{j+1}}\langle \mathbf{g}_i{}^{t_j}\rangle^T \tag{2.13}$$

Равенство (2.13) следует из дифференцируемости функции $\Theta_i{}^{i*}$ и теоремы 3. С учетом (2.10)—(2.13) производится суммирование выражений (2.7) по индексу k:

$$d_{sj}{}^i={}^1/{}_2\{\mathbf{f}^{iT}\Theta_i{}^{i*}(\mathbf{l}_i{}^j)^s+\mathbf{f}^{iT}(\Theta_i{}^{i*})^s\mathbf{l}_i{}^j+(\mathbf{l}_j{}^{iT})^s\Theta_j{}^{j*}\mathbf{f}^j+$$
$$+\mathbf{l}_j{}^{iT}(\Theta_j{}^{j*})^s\mathbf{f}^j(1-\delta_{ij})+\mathbf{f}^{iT}\Theta_i{}^{i*}(\mathbf{l}_i{}^s)^j+\mathbf{f}^{iT}(\Theta_i{}^{i*})^j\mathbf{l}_i{}^s+$$
$$+(\mathbf{l}_s{}^{iT})^j\Theta_s{}^{s*}\mathbf{f}^s+\mathbf{l}_s{}^{iT}(\Theta_s{}^{s*})^j\mathbf{f}^s(1-\delta_{is})-\mathbf{f}^{sT}\Theta_s{}^{s*}(\mathbf{l}_s{}^j)^i-$$
$$-\mathbf{f}^{sT}(\Theta_s{}^{s*})^i\mathbf{l}_s{}^j-(\mathbf{l}_j{}^{sT})^i\Theta_j{}^{j*}\mathbf{f}^j-\mathbf{l}_j{}^{sT}(\Theta_j{}^{j*})^i\mathbf{f}^j(1-\delta_{js})\} \tag{2.14}$$

Соотношения (2.6), (2.8), (2.14) определяют уравнения динамики механизма в виде

$$A(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{b}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot},\ \mathbf{f}_g,\ \mathbf{f}_e)=\mathbf{Q} \tag{2.15}$$

где составляющие матрицы A определяются равенствами (2.9) и

$$b_i=\sum_{s,j=1}^{n}d_{sj}{}^i q_s^{\cdot}q_j^{\cdot}-f_{gi}-f_{ei}\qquad (i=\overline{1,n})$$

Следовательно, использование в формулах (2.6), (2.7) выражения для эффективной матрицы инерции (2.10) позволяет свернуть выражения для коэффициентов по индексу k и упростить их вычисление. Рассматривается следующий рекуррентный алгоритм определения коэффициентов уравнения (2.15) — прямой прогонкой от основания к последнему звену вычисляются: векторы $\mathbf{l}_k{}^i=L_k^{k-1T}\mathbf{l}_{k-1}^{i}$ $(k=\overline{2,n}, i=\overline{1,k-1})$, слагаемые $f_{gi}{}^k=f_{gi}^{k-1}+l_k{}^{iT}\mathbf{F}_{gk}{}^k$, $f_{ei}{}^k=f_{ei}^{k-1}+l_k{}^{iT}\mathbf{F}_{ek}{}^k$, производные $(\mathbf{l}_k{}^i)^j=\langle \mathbf{l}_k{}^j\rangle^T\mathbf{l}_k{}^i$ $(i=\overline{1,k-1}, j=\overline{i+1,k}, k=\overline{1,n})$.

Обратной прогонкой от последнего звена к основанию $i=\overline{n-1,1}$ вычисляются: векторы $\mathbf{g}_i{}^k=GL_{i+1}^{i}G\mathbf{g}_{i+1}^{k}$, радиус — векторы $\mathbf{p}_k{}^i$ центра масс звена P_k в осях E_i: $\mathbf{p}_k{}^i=C_{i+1}^{i}\mathbf{p}_k^{i+1}+\mathbf{O}_{i+1}^{ii}$, $\mathbf{p}_i{}^i=\mathbf{r}_c{}^{ii}$, матрицы моментов инерции $\Theta_i{}^k$ звена P_k в осях E_i: $\Theta_i{}^k=m_k(-\langle\mathbf{p}_k{}^i\rangle\langle O_{i+1}^{i}\rangle^i-\langle\mathbf{O}_{i+1}^{i}\rangle^i\langle\mathbf{p}_k{}^i\rangle+\langle\mathbf{O}_{i+1}^{i}\rangle^i\langle\mathbf{O}_{i+1}^{i}\rangle^i)+$ $+C_{i+1}^{i}\mathbf{\Theta}_{i+1}^{k}C_{i+1}^{iT}$, эффективные матрицы инерции $\Theta_i^{k-1*}=\Theta_i^{k-1}+\Theta_i^{k*}$, $\Theta_i{}^{n*}=\Theta_i{}^n$, производные матриц $\Theta_i{}^{i*}$, левые части уравнений (2.15).

При вычислении символов $d_{sj}{}^i$ для произвольного набора индексов i, j, $s=\overline{1,n}$ в фигурных скобках (2.14) отличны от нуля не более трех слагаемых.

Предполагается, что на манипулятор наложено m голономных связей

$$\mathbf{f}(\mathbf{q},\ t)=0 \tag{2.16}$$

где $\mathbf{f}$—m-мерная, непрерывная со своими производными до второго порядка включительно вектор-функция $(m\leqslant n)$.

С учетом (2.16) уравнения движения (2.15) принимают вид

$$A(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{b}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot},\ \mathbf{f}_l,\ \mathbf{f}_g)=\mathbf{Q}+\Gamma^T\mathbf{N} \qquad (2.17)$$

где $\mathbf{N}$ — вектор $(m\times 1)$ неизвестных реакций связей, $\Gamma=\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{q}$ — матрица $(m\times n)$ частных производных вектор-функции $\mathbf{f}(\mathrm{rang}\,\Gamma=m)$. Если связи (2.16) определяют положение и ориентацию рабочего органа манипулятора как функцию времени $\mathbf{f}(\mathbf{q},\ t)=\mathbf{r}_n{}^0(q)-\mathbf{f}_1(t)$, где $\mathbf{r}_n{}^0$ — шестимерный вектор параметров приведения системы координат E_0 к E_n, то столбцы γ_i матрицы Γ равны $\gamma_i=\mathbf{l}_n{}^i$, а их производные по времени определяются выражениями

$$\gamma_i^{\cdot}=\sum_{s=i}^{n}(\mathbf{l}_n{}^i)^s q_s^{\cdot} \qquad (i=\overline{1,n})$$

Для нахождения вектора реакций N (2.16) дважды дифференцируется по времени

$$\Gamma\mathbf{q}^{\cdot\cdot}=-\Gamma^{\cdot}\mathbf{q}^{\cdot}-(\partial\mathbf{f}/\partial t)^{\cdot} \qquad (2.18)$$

Исключением $\mathbf{q}^{\cdot\cdot}$ из (2.18) находится выражение

$$\mathbf{N}=-D^{-1}\{\Gamma A^{-1}(\mathbf{Q}-\mathbf{b})+\Gamma^{\cdot}\mathbf{q}^{\cdot}+(\partial\mathbf{f}/\partial t)^{\cdot}\},\quad D=\Gamma A^{-1}\Gamma^T \qquad (2.19)$$

Соотношения (2.17), (2.19) описывают динамику манипулятора с голономными связями (2.16).

3. Синтез стабилизирующего управления. Если равенства (2.16) рассматриваются как уравнения гиперповерхностей, пересечение которых определяет траекторию движения манипулятора, то умножением вектора реакций N (2.19) при $Q=0$ на матрицу $AP^{-1}\Gamma^T$, где $P=\Gamma^TD^{-1}\Gamma$ находится выражение для управления

$$\mathbf{Q}_c=\mathbf{b}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})-A(\mathbf{q})\{\Gamma^+(\Gamma^{\cdot}\mathbf{q}^{\cdot}+(\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{q})^{\cdot}+\Gamma_1\mathbf{f}^{\cdot}+\Gamma_0\mathbf{f}-$$
$$-(E-\Gamma^+\Gamma)\mathbf{v}\} \qquad (3.1)$$

где $\Gamma^+=\Gamma^T(\Gamma\Gamma^T)^{-1}$ — псевдообратная матрица [1] для матрицы Γ, Γ_0, Γ_1 — матрицы параметров алгоритма управления размерности $(m\times m)$, v — произвольный вектор $(n\times 1)$.

Закон управления (3.1) обеспечивает асимптотическую устойчивость движения манипулятора, задаваемого равенствами (2.16), если для любого t существует хотя-бы одно допустимое значение вектора $\mathbf{q}_p$ при котором выполняется равенство $\mathbf{f}(\mathbf{q}_p,\ t)=0$. Для доказательства данного утверждения уравнение динамики системы (2.15) с управлением (3.1) преобразуется к виду

$$A\{(E-\Gamma^+\Gamma)(\mathbf{q}^{\cdot\cdot}-\mathbf{v})+\Gamma^+(\mathbf{f}^{\cdot\cdot}+\Gamma_1\mathbf{f}^{\cdot}+\Gamma_0\mathbf{f})\}=0 \qquad (3.2)$$

Подстановкой в (3.2) значения $q^{\cdot\cdot}$:

$$\mathbf{q}^{\cdot\cdot}=-\Gamma^+(\Gamma^{\cdot}\mathbf{q}^{\cdot}+(\partial\mathbf{f}/\partial t)^{\cdot}+\Gamma_1\mathbf{f}^{\cdot}+\Gamma_0\mathbf{f})+(E-\Gamma^+\Gamma)\mathbf{v} \qquad (3.3)$$

с учетом равенства $(E-\Gamma^+\Gamma)^2=E-\Gamma^+\Gamma$ находится уравнение

$$A\Gamma^+(\mathbf{f}^{\cdot\cdot}+\Gamma_1\mathbf{f}^{\cdot}+\Gamma_0\mathbf{f})=0 \qquad (3.4)$$

Выбором начальных рассогласований $\mathbf{f}_0$, $\mathbf{f}_0^{\cdot}$ достаточно близкими к нулевым обеспечивается выполнение условия $\mathrm{rang}\,\Gamma^+=m$ и (3.4) приводится к равносильной системе

$$\mathbf{f}^{\cdot\cdot}+\Gamma_1\mathbf{f}^{\cdot}+\Gamma_0\mathbf{f}=0 \qquad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что при соответствующем задании матриц Γ_0, Γ_1 составляющие вектора $\mathbf{f}$ стремятся к нулю, т. е. закон управления (3.1) обеспечивает асимптотическую устойчивость программного движения (2.16).

Если равенства (2.16) задают программное движение в пространстве обобщенных координат манипулятора $\mathbf{f}(\mathbf{q},\ t)=\mathbf{q}-\mathbf{q}_p(t)$, то выполнено

$\Gamma=\Gamma^{+}=E$ и управление (3.1) преобразуется в стабилизирующее управление с обратными связями по $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}^{\cdot}$ [12].

Отметим, что при $m<n$ обобщенные ускорения при управлении (3.1) определены с точностью до произвольного вектора $(E-\Gamma^{+}\Gamma)\mathbf{v}$, который удовлетворяет однородной системе линейных уравнений (2.18).

В случае $m>n$, когда число условий, определяющих движение, больше числа обобщенных координат манипулятора, на обобщенных ускорениях (3.3) достигается точная нижняя грань квадрата нормы невязки системы линейных уравнений (2.18) [11].

4. Линеаризация уравнений динамики. При исследовании движения механизма в окрестности заданного положения $\mathbf{q}_0$ или заданной программной траектории $\mathbf{q}_p(t)$ используется линеаризованное уравнение динамики. Предполагается, что вектор $\mathbf{q}_p(t)$ удовлетворяет уравнениям движения (2.17) и связям (2.16). Разложением коэффициентов (2.17) по вектору $\Delta\mathbf{q}=\mathbf{q}-\mathbf{q}_p$ находятся уравнения

$$A(\mathbf{q}_p)\Delta\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{q}^{\cdot}}\Delta\mathbf{q}^{\cdot}+\left(\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{q}}+\frac{\partial A}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{q}_p^{\cdot\cdot}-\frac{\partial\Gamma^T}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{N}_p\right)\Delta\mathbf{q}=\Delta\mathbf{Q}+\Gamma^T\Delta\mathbf{N} \tag{4.1}$$

которые описывают движение механизма в малых отклонениях.

Здесь $\Delta\mathbf{Q}=\mathbf{Q}-\mathbf{Q}_p$ — вектор $(1\times n)$ отклонений управляющих воздействий от программного значения. Коэффициенты уравнений (4.1) определяются равенствами

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{q}_p^{\cdot\cdot}\right)_{ij}=\sum_{s=1}^{n}\{\mathbf{f}^{iT}(\Theta_i^{\,i*}\mathbf{l}_i^{\,s})^{j}+(\mathbf{l}_s^{\,iT}\Theta_s^{\,s*})^{j}\mathbf{f}^{s}(1-\delta_{is})\}q_{ps}^{\cdot\cdot}$$

$$\left(\frac{\partial b}{\partial\mathbf{q}^{\cdot}}\right)_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\{\mathbf{f}^{iT}(\Theta_i^{\,i*}\mathbf{l}_i^{\,j})^{s}+(\mathbf{l}_j^{\,iT}\Theta_j^{\,j*})^{s}\mathbf{f}^{j}-\mathbf{l}_j^{\,iT}(\Theta_j^{\,j*})^{s}\mathbf{f}^{j}\delta_{ij}+$$
$$+\mathbf{f}^{iT}(\Theta_i^{\,i*}\mathbf{l}_i^{\,s})^{j}+(\mathbf{l}_s^{\,iT}\Theta_s^{\,s*})^{j}\mathbf{f}^{s}-\mathbf{l}_s^{\,iT}(\Theta_s^{\,s*})^{j}\mathbf{f}^{s}\delta_{is}-$$
$$-\mathbf{f}^{sT}(\Theta_s^{\,s*}\mathbf{l}_s^{\,j})^{i}-(\mathbf{l}_j^{\,sT}\Theta_j^{\,j*})^{i}\mathbf{f}^{j}+\mathbf{l}_j^{\,sT}(\Theta_j^{\,j*})^{i}\mathbf{f}^{j}\delta_{js}\}q_{ps}^{\cdot}$$

$$\left(\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{q}}\right)_{ij}=\sum_{s,t=1}^{n}\{\mathbf{f}^{iT}(\Theta_i^{\,i*}\mathbf{l}_i^{\,t})^{s,j}+(\mathbf{l}_t^{\,iT}\Theta_t^{\,t*})^{s,j}\mathbf{f}^{t}-[\mathbf{l}_t^{\,iT}(\Theta_t^{\,t*})^{s}]^{j}\mathbf{f}^{t}\delta_{it}-$$
$$-\mathbf{f}^{sT}(\Theta_s^{\,s*}\mathbf{l}_s^{\,t})^{i,j}+{}^{1}/_{2}[\mathbf{l}_t^{\,sT}(\Theta_t^{\,t*})^{i}]^{j}\mathbf{f}^{t}\delta_{ts}\}q_{ps}^{\cdot}q_{pt}^{\cdot}-\sum_{k=i}^{n}(\mathbf{l}_k^{\,iT})^{j}(\mathbf{F}_{gk}^{\,k}+\mathbf{F}_{ek}^{\,k}) \tag{4.2}$$

где первая и вторая производные вектора $\mathbf{l}_k^{\,i}$ и матрицы $\Theta_i^{\,i*}$ находятся из соотношений (1.16), (1.22), (2.11), (2.13). Наиболее трудоемким при вычислении коэффициентов (4.2) уравнения (4.1) является двойное суммирование с использованием вторых производных вектора $\mathbf{l}_k^{\,i}$ при определении элементов матрицы $\partial\mathbf{b}/\partial\mathbf{q}$. Вектор $\Delta\mathbf{N}$ отклонений реакций связей от программного значения (2.19) определяется подстановкой значения $\Delta\mathbf{q}^{\cdot\cdot}$ (4.1) в линеаризованное уравнение (2.18).

На основе алгоритмов пп. 1–4 разработан пакет прикладных программ кинематического и динамического анализа многозвенных манипуляторов. Среди решаемых кинематических задач для манипуляторов с заданной кинематической схемой и геометрическими параметрами вычисляется положение и ориентация, скорости и ускорения произвольного сечения механизма в рабочей зоне. Также на основе рекуррентных соотношений п. 3 конструируются уравнения динамики системы, вычисляются инерционные нагрузки на звенья, обратной прогонкой от рабочего органа к основанию определяются статистические и динамические нагрузки в произвольном сечении. Решение задачи динамического силового анализа позволяет на этапе проектирования оценивать необходимое усилие привода, определять усилия в элементах конструкции и точность позиционирования рабочего органа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пол Р.* Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора. М.: Наука. 1976. 103 с.
2. *Walker M. W., Orin D. E.* Efficient dynamic computer simulation of robot mechanisms // Trans. ASME. J. Dynamic Systems, Measurement, Control. 1982. V. 104. No. 3. P. 205–211.
3. *Vukobratovic M.* An efficient procedure for generating dynamic manipulator models // Robotica. 1985. V. 3. No. 3. P. 147–152.
4. *Аксельрод Б. В.* Описание динамики манипулятора с применением теории винтов // Изв. АН СССР. МТТ. № 2. С. 79–84.
5. *Диментберг Ф. М.* Теория пространственных шарнирных механизмов. М.: Наука, 1982. 335 с.
6. *Коноплев В. А.* Конструирование агрегативных моделей механики носителя систем твердых тел // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 24–31.
7. *Коноплев В. А.* Агрегативные модели механики систем твердых тел со структурой дерева // Изв. АН СССР. МТТ. № 6. С. 46–53.
8. *Черноусько Ф. Л.* Динамика систем с упругими элементами большой жесткости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 101–113.
9. *Заремба А. Т.* Динамическая модель плоского упругого манипулятора // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 22–30.
10. *Виттенберг Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
11. *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983. 335 с.
12. Динамика управления роботами/Под ред. Е. И. Юревича. М.: Наука, 1984. 334 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
27.VI.1988