

УДК 531.011

© 1990 г.

Ю. А. САДОВ

ВТОРИЧНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В статье [1] описан класс систем с двумя быстрыми угловыми переменными, усредненное движение которых вблизи резонансных отношений частот отличается характерными особенностями, названными вторичными резонансными эффектами. Эти особенности непосредственно обусловлены тем, что главные члены эволюционных уравнений получаются во втором приближении метода усреднения и содержат малые резонансные знаменатели. В данной статье показано, что аналогичные особенности существуют и в многочастотных системах, описана простая механическая система, относящаяся к рассматриваемому классу, теоретический анализ дополнен примерами численного изучения одной из таких систем.

1. Рассматривается класс близких к гамильтоновым систем с быстрыми фазами, которые описываются уравнениями вида:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_n &= \omega_n(J) + \varepsilon^2 \partial V / \partial J_n, & J_n &= -\varepsilon^2 \partial V / \partial \varphi_n \\ x_m &= \varepsilon F_m(J, \varphi, x) \quad (n=1, \dots, N; m=1, \dots, M); & V &= V(J, \varphi, x) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь φ — угловые переменные (быстрые фазы), J — переменные действия, x — дополнительные неконсервативные переменные, ε — малый параметр. Периодические по φ функции V и F_m будем представлять рядами Фурье

$$V = \sum_k v_k(J, x) e^{i(k, \varphi)}, \quad F_m = \sum_k f_{mk}(J, x) e^{i(k, \varphi)}$$

где k — векторный индекс $k = (k_1, \dots, k_N)$. В дальнейшем будем считать, что число членов в каждом ряду конечно $\|k\| = |k_1| + \dots + |k_N| \leq K$, что позволяет избежать ряда технических трудностей.

В невозмущенном движении ($\varepsilon=0$) переменные J сохраняют свои значения, углы φ изменяются равномерно.

Переходя к исследованию возмущенного движения, сделаем прежде всего усредняющую замену переменных для x :

$$x_m = x'_m - i\varepsilon \sum_k \frac{f_{mk}(J, x)}{(k, \omega)} e^{i(k, \varphi)} \quad (1.2)$$

Штрих при знаке суммирования означает отсутствие члена с $\|k\|=0$. Уравнение для x' не содержит в главном члене угловых переменных $x'_m = \varepsilon f_{m0}(J, x') + O(\varepsilon^2)$.

Замена x на x' согласно (1.2) в уравнениях для J дает:

$$\dot{J}_n = -i\varepsilon^2 \sum_k k_n v_k(J, x') e^{i(k, \varphi)} - \varepsilon^3 \sum_k \sum_l \sum_{j=1}^M k_n \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{f_{jl}}{(l, \omega)} e^{i(k+l, \varphi)} \quad (1.3)$$

Усреднение этих уравнений по φ с точностью до членов порядка ε^4 с помощью замены переменных вида

$$J_n = J'_n + \varepsilon^2 \sum_k A_{nk}(J', x') e^{i(k, \varphi)} + \varepsilon^2 \sum_k B_{nk}(J', x') e^{i(k, \varphi)}$$

приводит к искомым эволюционным уравнениям для J' :

$$J_n'' = \varepsilon^3 \sum_l \frac{l_n P_l(J', x')}{(l, \omega)} \quad (1.4)$$

$$P_l(J', x') = \sum_{j=1}^M f_{jl}(J', x') \frac{\partial v_{-l}(J', x')}{\partial x_j'} \quad (1.5)$$

В формулах (1.3)–(1.5) l , как и k , — векторный индекс, значениями которого являются целочисленные точки из множества $0 \leq \|l\| \leq K$; k_n , l_n — n -е компоненты соответствующих целочисленных векторов.

Существенно, что при усреднении из уравнений (1.3) полностью исключились члены порядка $O(\varepsilon^2)$, так как они представляют собой производные по φ от периодической функции. В результате, главный член эволюционных уравнений для J имеет порядок $O(\varepsilon^3)$ и содержит резонансные знаменатели (l, ω) , обращающиеся в 0 при резонансных отношениях частот. Такая структура уравнений и обеспечивает возникновение вблизи резонансов особенностей движения эволюционной системы, названных в [4] вторичными резонансными эффектами.¹ Необычность таких явлений связана с тем, что они обнаруживаются в многочастотной системе при нерезонансном усреднении, оправданном только вне резонансных зон асимптотически малой вместе с ε ширины.

2. Для двухчастотных систем в предположении однородности функций V и F в [1] отмечены следующие конкретные вторичные эффекты резонансов: 1) увеличение скорости эволюции вблизи резонансов, 2) наличие вблизи каждого резонанса области, все траектории из которой либо втягиваются в зону резонанса (притягивающий резонанс), либо выталкиваются из этой области (отталкивающий резонанс), 3) существование при некоторых условиях околорезонансных стационарных (устойчивых или неустойчивых) отношений частот. Указанные особенности приводят к тому, что каждая траектория через некоторое время $\Delta t \sim O(\varepsilon^{-3})$ выходит на режим, соответствующий стационарному отношению частот (резонансному или околорезонансному). При дальнейшей эволюции системы возможен выход траектории за пределы области устойчивости многообразия постоянного отношения частот. В этом случае возникает относительно быстрый переход (скачок) к другому такому, уже устойчивому, многообразию.

Примером механической системы рассматриваемого класса является спутник с магнитным демпфером [2]. В качестве более простого примера можно указать систему, состоящую из двух маховиков, соединенных упругими связями с телом пренебрежимо малой массы (демпфером), движение которого задемпфировано. Положение маховиков задается угловыми координатами φ_1 , φ_2 , положение демпфера — переменной x .

Движение маховиков в такой системе описывается лагранжевыми уравнениями, причем лагранжиан $L = (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)/2 - V(\varphi_1, \varphi_2, x)$ зависит также и от x . Движение демпфера определяется уравнением первого порядка, в котором существенным является наличие диссипативного члена.

В качестве конкретного примера рассмотрим систему, включающую лагранжеву часть с потенциальной функцией

$$V(\varphi_1, \varphi_2, x) = (a_1 + b_1 x) \sin \varphi_1 + (a_2 + b_2 x) \sin \varphi_2 + (a_3 + b_3 x) \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + (a_4 + b_4 x) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (2.1)$$

и уравнение демпфера

$$x'' + \mu x = d_1 \sin \varphi_1 + d_2 \sin \varphi_2 + d_3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + d_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

¹ Название «вторичные резонансные эффекты» связано с тем, что описываемые явления вызываются непосредственно увеличением амплитуды колебаний переменной x вблизи резонансов (см. уравнение (1.2)), которое является одним из основных (первичных) эффектов резонансности, и, таким образом, вторичны по отношению к нему.

Вводя предположение о быстром вращении: $\varphi_1 = J_1/\varepsilon$, $\varphi_2 = J_2/\varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и переходя к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$, получаем уравнение движения в виде (1.1):

$$d\varphi_n/d\tau = J_n, \quad dJ_n/d\tau = -\varepsilon^2 \partial V / \partial \varphi_n \quad (n=1, 2) \quad (2.2)$$

$$dx/d\tau = \varepsilon [-\mu x + d_1 \sin \varphi_1 + d_2 \sin \varphi_2 + d_3 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) + d_4 \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Переходя, как в п. 1, к усредненной переменной x' по формуле

$$x' = x + \varepsilon \left[\frac{d_1}{J_1} \cos \varphi_1 + \frac{d_2}{J_2} \cos \varphi_2 + \frac{d_3}{J_1 + J_2} \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{d_4}{J_1 - J_2} \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

и заменяя x на x' в уравнениях (2.2) с последующим усреднением этих уравнений по φ_1 и φ_2 , находим уравнения эволюции частот J_1 , J_2 :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1}{d\tau} &= \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{b_1 d_1}{J_1} + \frac{b_3 d_3}{J_1 + J_2} + \frac{b_4 d_4}{J_1 - J_2} \right) \\ \frac{dJ_2}{d\tau} &= \frac{\varepsilon^3}{2} \left(\frac{b_2 d_2}{J_2} + \frac{b_3 d_3}{J_1 + J_2} - \frac{b_4 d_4}{J_1 - J_2} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эти уравнения представляют собой упрощенный и конкретизированный вариант общих эволюционных уравнений (1.4). Существенное упрощение здесь связано с тем, что уравнения (2.3) не содержат x и образуют автономную систему. В общем случае это не так, и для получения автономных уравнений приходится проводить еще дополнительную процедуру исключения быстрой в данном случае переменной x (см. [4], [2]).

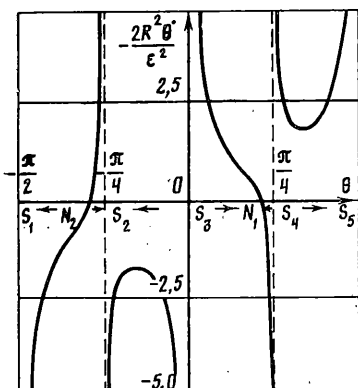
Знаменатели отдельных слагаемых в правых частях уравнений (2.3) обращаются в нуль на прямых $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, $J_1 + J_2 = 0$, $J_1 - J_2 = 0$ пространства (J_1, J_2) , соответствующих существенным резонансам исходной системы (2.2).

Качественное исследование движений, описываемых системой (2.3), удобнее провести в полярных координатах (R, θ) плоскости (J_1, J_2) , таких что $J_1 = R \cos \theta$, $J_2 = R \sin \theta$. Возвращаясь, кроме того, к времени t в качестве независимой переменной, находим:

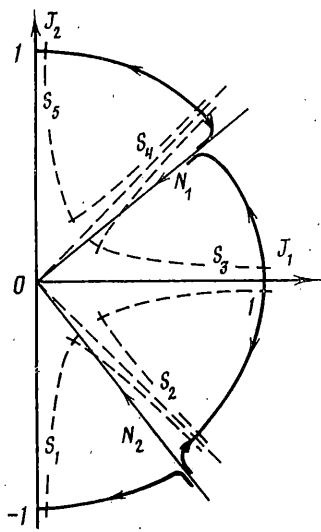
$$R' = (\frac{1}{2} \varepsilon^2 / R) (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) \quad (2.4)$$

$$\theta' = -\frac{\varepsilon^2}{2R^2} \left[\beta_1 \operatorname{tg} \theta - \beta_2 \operatorname{ctg} \theta - \beta_3 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) + \beta_4 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) \right]$$

где $\beta_n = b_n d_n$ ($n=1, \dots, 4$). Из первого уравнения системы (2.4) следует, что R изменяется со временем монотонно, и направление этого изменения определяется знаком суммы $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$. Более интересно движение по углу θ . Описывающее это движение уравнение инвариантно по отношению к преобразованию $\theta \rightarrow \pi + \theta$, поэтому достаточно рассматривать его в области $]-\pi/2, \pi/2]$. В этой области правая часть уравнения имеет особенности (простые полюса) в точках $\theta = 0, \pi/2, \pi/4, -\pi/4$, соответствующих четырем существенным резонансам рассматриваемой системы. При некоторых распределениях знаков β_n правая часть может иметь также и нули, которым отвечают стационарные значения угла θ , то есть постоянные отношения частот J_2/J_1 . В [4] показано, что при определенных требованиях к гладкости функций, входящих в правые части уравнений (2.2), эти нули находятся вблизи резонансных значений J_2/J_1 , и соответствующие им отношения частот оказываются стационарными окolorезонансными отношениями частот. Заметим еще, что при приближении θ к резонансному значению $dR/d\theta$ стремится к нулю. Поэтому фазовые траектории системы (2.4) подходят к резонансным лучам $\theta = 0, \pi/2, \pi/4, -\pi/4$ под прямым углом с обеих сторон, и пополнение двух соответствующих траекторий предельной точкой, лежащей на таком луче, дает гладкую кривую.



Фиг. 1



Фиг. 2

Указанные свойства эволюционных уравнений проиллюстрированы на фиг. 1, 2 для системы со следующими значениями параметров:

$$\epsilon=0,07; \quad \mu=1, \quad a_1=1, \quad a_2=-1, \quad a_3=a_4=0, \quad b_1=b_2=1 \quad (2.5)$$

$$b_3=b_4=-0,5; \quad d_1=-1,2; \quad d_2=1; \quad d_3=0,5; \quad d_4=-0,5.$$

На фиг. 1 показана зависимость от θ определяющего (стоящего в скобках) сомножителя правой части уравнения для θ из (2.4). Видно, что на промежутке $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ имеется 7 особых значений θ , в окрестности которых изменяется знак производной θ' . Пять из них, S_n ($n=1, \dots, 5$) при $\theta_1=-\pi/2$, $\theta_2=-\pi/4$, $\theta_3=0$, $\theta_4=\pi/4$, $\theta_5=\pi/2$ представляют собой резонансные значения θ . Здесь расположены полюса выражения для θ' . В двух точках N_1 ($\theta \approx 38^\circ, 47'$) и N_2 ($\theta \approx -51^\circ, 28'$) θ' обращается в нуль. Эти точки соответствуют стационарным околорезонансным отношениям частот. Распределение знаков производной θ' указывает направление изменения θ на каждом из шести участков отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$. На фиг. 1 оно показано стрелками вдоль оси абсцисс. Видно, что резонансы S_1, S_2, S_5 и стационарная точка N_1 являются асимптотически устойчивыми, а точки S_3, S_4 и N_2 — неустойчивы.

Некоторые фазовые траектории изучаемой системы приведены на фиг. 2. Остальные траектории получаются из показанных гомететий с центром в начале координат. Лучи OS_n ($n=1, \dots, 5$), выходящие из начала координат, соответствуют резонансным значениям отношения частот. Стационарные нерезонансные отношения J_2/J_1 располагаются на лучах ON_1, ON_2 , которые сами являются траекториями системы. Хорошо видны особенности поведения траекторий вблизи этих лучей. В то же время на резонансных лучах в геометрии фазовых кривых нет видимых особенностей в согласии со сделанным выше замечанием о гладкости пополненных на резонансах траекторий. Но направление движения по траекториям изменяется при переходе через резонанс.

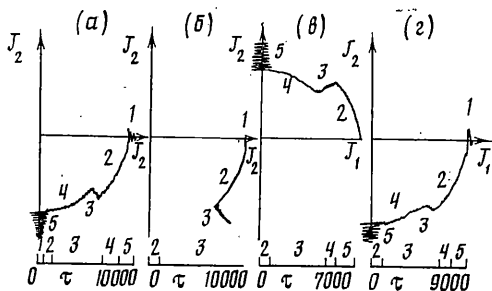
Траектории фиг. 2 принадлежат динамической системе (2.3), которая получена из системы (2.2) с параметрами (2.5) независимым усреднением по углам φ_1 и φ_2 . Движения усредненной системы аппроксимируют движения исходной вне резонансных зон. Ширина таких зон имеет в данном случае порядок $O(\epsilon)$, а точнее $O(\epsilon/|J|)$, так как уравнения (2.2) при использовании t в качестве независимой переменной зависят от ϵ только через комбинации ϵ/J_n . Поэтому ширина резонансных зон, внутри которых движение исходной системы не описывается усредненными уравнениями, увеличивается с уменьшением $R=|J|$. Качественная конфигурация таких зон показана на фиг. 2 штриховыми линиями. В центральной части фигуры, там где сливаются все резонансные зоны, движение системы нельзя рассматривать в рамках принятой здесь асимптотической схемы быстрого вращения.

Детальное исследование движений системы внутри резонансных зон требует специального анализа на основе, например, процедур резонансного усреднения. Но априорно можно ожидать существования различных комбинаций резонансного и нерезонансного поведения вблизи резонанса. Так, своеобразные виды движений могут возникнуть вблизи резонанса, устойчивого внешне (то есть вне пределов резонансной зоны, при независимом усреднении по углам), но неустойчивого внутренне (что определяется с помощью специфического для данного резонанса усреднения). Движение внутри резонансных зон должно, как правило, зависеть и от соотношения фаз угловых переменных.

Интересные эффекты потери устойчивости со скачкообразными переходами с одного устойчивого многообразия на другое возможны вследствие описанного выше явления расширения резонансных зон при уменьшении скорости вращения,

когда околорезонансная стационарная точка поглощается расширяющейся резонансной зоной.

Конкретные проявления подобного рода эффектов, трудных для полного теоретического анализа, можно видеть на фиг. 3. Здесь показаны полученные численным интегрированием проекции четырех траекторий системы (2.2) с параметрами (2.5)



Фиг. 3

$=0$ (участок 1), что по-видимому свидетельствует не только о внешней, но и о внутренней неустойчивости этого резонанса.

В случаях *а, в, г* эволюция переменных J_1, J_2 заканчивается на резонансе $J_1=0$ (участок 5), и дальше происходит только медленное возрастание $|J_2|$. Хорошо заметно при этом уменьшение амплитуды колебаний.

Достаточно точно описывается изложенной выше теорией усредненное движение на межрезонансных участках 2 и 4. Эти участки составляют относительно малую по времени часть движения и с точки зрения макросистемы, описывающей большие изменения переменных J_1, J_2 на больших интервалах времени, могут рассматриваться как переходные процессы между стабильными (устойчивыми), нестабильными (неустойчивыми) и метастабильными (временно устойчивыми) установившимися движениями, происходящими вблизи резонансов.

Наиболее сложные и разнообразные явления наблюдаются в окрестности комбинационных резонансов $J_1+J_2=0$ и $J_1-J_2=0$. На фиг. 3, *а* изображен случай временного захвата в резонанс $J_1+J_2=0$. Движение вдоль резонансного луча происходит в данном случае в направлении уменьшения $|J|$, и вероятно поэтому (вследствие расширения резонансной зоны) и происходит выход из резонанса.

Другой вариант захвата в тот же резонанс показан на фиг. 3, *б*. Здесь, однако, резонансное движение сопровождается увеличением $|J|$ и заметным уменьшением амплитуды колебаний. При этом едва ли можно ожидать выхода из резонанса. Разный характер движения в резонансной зоне на фиг. 3, *а* и 3, *б* связан с различием в фазе $\varphi_1+\varphi_2$ на представленных там траекториях к моменту попадания в резонансную зону.

Участок 3 на фиг. 3, *в* представляет собой движение со стационарным околорезонансным отношением частот. Качественный характер движения здесь вполне соответствует тому, который предсказывается усредненными уравнениями (ср. фиг. 2). И здесь при уменьшении $|J|$ до некоторого значения происходит выход из рассматриваемого режима с относительно быстрым переходом к устойчивому резонансному движению.

Пожим на предыдущий случай выглядит движение, представленное на фиг. 3, *г*. На участке 3 тоже осуществляется метастабильное околорезонансное движение. Однако, здесь это движение порождено, по-видимому, совсем другими причинами, не описываемыми в рамках нерезонансного усреднения. Во-первых, полученное в расчете стационарное отношение частот ($\theta \approx -47^\circ, 5$) заметно отличается от вычисленного для стационарного режима N_2 . Кроме того этот режим является неустойчивым, а резонанс $J_1+J_2=0$ — устойчивый. Все это дает основание предполагать, что движение на рассматриваемом участке происходит на границе резонансной зоны в результате своеобразного конфликта внешней устойчивости резонанса с внутренней его неустойчивостью для данной траектории.

В целом описанная здесь совокупность медленных движений в пространстве переменных J_1, J_2 образует некоторую новую систему — макросистему по отношению к исходной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садов Ю. А. Вторичный резонансный эффект в двухчастотной почти гамильтоновой системе с быстрыми фазами // Устойчивость движения. Новосибирск: Наука, 1985. С. 179–184.
2. Садов Ю. А. Быстрое вращение спутника с магнитным демпфером. 4. Диссипативная эволюция. Резонансные эффекты // Космич. исследования. 1986. Т. 24. № 4. С. 553–563.

Москва

Поступила в редакцию
2.II.1988