

УДК 539.3

© 1990 г.

В. И. ДУДИНСКИЙ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЕ НА УПРУГОМ НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Исследованиям контактного взаимодействия тонкостенных элементов конструкций (типа упругих пластин, балок, накладок) с упругим основанием посвящены многочисленные работы [1–10]. Многими авторами в качестве основания рассматривалось упругое изотропное полупространство, как правило, однородное или с модулем упругости, изменяющимся с глубиной по степенному или экспоненциальному законам. обстоятельный обзор этих исследований и обширную библиографию можно найти в [2, 4, 5, 7].

В публикуемой работе решена осесимметричная контактная задача об изгибе круглой пластины на упругом основании при переменном контакте. Отрыв края пластины от основания обусловлен соотношением упругих характеристик материалов пластины и основания. Поведение пластины описывается теорией тонких пластин Кирхгофа – Лява, а в качестве основания рассмотрено упругое изотропное непрерывно-неоднородное полупространство с переменным по глубине коэффициентом Пуассона и постоянным модулем сдвига. Методом парных интегральных уравнений решение задачи сведено к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Получено уравнение для определения радиуса площадки контакта. Для частных случаев нагружения пластины приведены результаты численных расчетов, иллюстрирующие влияние неоднородности основания на условия отрыва края пластины и величину радиуса площадки контакта.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Пусть точки упругого изотропного полупространства принадлежат области $z \geq 0$ в цилиндрической системе координат r, θ, z . Относительно упругих свойств материала полупространства предполагаем, что модуль сдвига μ является постоянным, а коэффициент Пуассона $\nu(z)$ — произвольная функция глубины. При этом модуль упругости, определяемый соотношением $E(z) = 2\mu[1 + \nu(z)]$ является положительно определенной функцией глубины. На поверхности $z=0$ упругого полупространства покоится круглая пластина радиуса R и толщины h , ось симметрии которой совпадает с осью z . Упругие свойства материала пластины определяются постоянными E_1, ν_1 . Поведение пластины описывается классической теорией тонких пластин, основанной на гипотезе Кирхгофа – Лява. Сверху пластина нагружена осесимметрично распределенной по поверхности нормальной нагрузкой интенсивности $q(r)$ и сосредоточенной силой P в центре, а по контуру — окружными парами сил с изгибающим моментом M . Трение между пластиной и полупространством отсутствует. Допускается возможность отрыва края пластины от поверхности полупространства (условия односторонней связи), обуславливаемая соотношением упругих характеристик материалов пластины и полупространства (т. е. радиус площадки контакта R_1 меньше радиуса пластины). В области контакта пластины с полупространством возникает реактивное (контактное) давление $p(r)$. Поверхность полупространства вне зоны контакта свободна от нагрузок. Требуется определить радиус площадки контакта, прогибы (перемещения точек срединной плоскости пластины) $w(r)$ и контактное давление, знание которых позволяет произвести расчет напряженно-деформированного состояния пластины по известным соотношениям [11].

Математическая постановка рассматриваемой осесимметричной задачи заключается в решении двух взаимосвязанных краевых задач: одной — об

изгибе круглой пластины и другой — смешанной краевой задачи теории упругости для полупространства.

Соответствующая краевая задача об изгибе круглой пластины в рамках теории тонких пластин Кирхгофа — Лява заключается в решении уравнения [11]:

$$D\nabla^2\nabla^2w(r)=q(r)-p(r) \quad (r\leq R) \quad (1.1)$$

при следующих граничных условиях:

$$r=R: M_r(r)=-D\left[\nabla^2w(r)-\frac{1-\nu_1}{r}\frac{dw(r)}{dr}\right]=M \quad (1.2)$$

$$Q(r)=D\frac{d}{dr}[\nabla^2w(r)]=0$$

$$r=0: 2\pi rQ(r)=P, \quad dw(r)/dr=0 \quad (1.3)$$

где $\nabla^2=d^2/dr^2+r^{-1}d/dr$ — оператор Лапласа, $D=E_1h^3/[12(1-\nu_1^2)]^{-1}$ — цилиндрическая жесткость пластины, M_r — изгибающий момент в окружном сечении, Q — поперечная сила.

Осесимметричная смешанная краевая задача линейной теории упругости для полупространства формулируется следующим образом:

$$\text{grad}(\alpha \text{div } \mathbf{u}) + \nabla^2\mathbf{u}=0 \quad (z\geq 0) \quad (1.4)$$

$$u_z(r, 0)=w(r) \quad (r\leq R_1) \quad (1.5)$$

$$\sigma_z(r, 0)=0 \quad (r>R_1) \quad (1.6)$$

$$\tau_{rz}(r, 0)=0 \quad (r\geq 0) \quad (1.7)$$

где $\alpha(z)=[1-2\nu(z)]^{-1}$, $\mathbf{u}=(u_r, 0, u_z)$ — вектор перемещений, σ_z , τ_{rz} — компоненты тензора напряжений. К граничным условиям (1.5)–(1.7) необходимо добавить условия обращения в ноль перемещений и напряжений на бесконечности.

Рассматриваемая задача относится к классу задач с неизвестной областью контакта. Дополнительными условиями определения области контакта является положительность контактного давления в области контакта и обращение его в ноль в точках границы области контакта, т. е.

$$p(r)\geq 0 \quad (r<R_1), \quad p(R_1)=0 \quad (1.8)$$

Решение краевой задачи (1.1)–(1.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} w(r)=w_0 &- \frac{Mr^2}{2D(1+\nu_1)} - \frac{Pr^2}{8\pi D}\left[\frac{2+\eta}{2} + \ln(R_1/r)\right] + \\ &+ \frac{1}{4D}\int_0^r [q(t)-p(t)] [(r^2+t^2)\ln(r/t) - (r^2-t^2)] t dt - \\ &- \frac{r^2}{4D}\int_0^R q(t)\left[\ln(R/t) + \frac{\eta}{2}(1-t^2/R^2)\right] t dt + \\ &+ \frac{r^2}{4D}\int_0^{R_1} p(t)\left[\ln(R_1/t) + \frac{\eta}{2}(1-t^2/R_1^2)\right] t dt + \\ &+ \frac{Pr^2 \ln \beta}{8\pi D} - \frac{r^2 \ln \beta}{4D}\int_0^{R_1} p(t) t dt + \frac{\eta r^2(1-\beta^2)}{8DR_1^2}\int_0^{R_1} p(t) t^3 dt \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\beta=R_1/R$, $\eta=(1-\nu_1)/(1+\nu_1)$, а постоянная $w_0=w(0)$ находится из

$$P + 2\pi \int_0^R q(t)t dt = 2\pi \int_0^{R_1} p(t)t dt \quad (1.10)$$

Используя теорию интегрального преобразования Ханкеля к решению уравнения равновесия (1.4), вертикальные перемещения точек границы упругого изотропного полупространства с переменным по глубине коэффициентом Пуассона и нормальные напряжения в этих точках при выполнении условий на бесконечности и условия (1.7) можно представить в виде [12]:

$$u_z(r, 0) = \frac{1-\nu_0}{\mu} \int_0^\infty [1+k(t)] \Psi(t) J_0(rt) dt, \quad \sigma_z(r, 0) = - \int_0^\infty t \Psi(t) J_0(rt) dt \quad (1.11)$$

$$k(t) = \left[2(1-\nu_0) t \int_0^\infty \frac{\exp(-2tx) dx}{1-\nu(x)} \right]^{-1} - 1 \quad (1.12)$$

где $\nu_0 = \nu(0)$, J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а функция Ψ связана с контактным давлением $p(r) = -\sigma_z(r, 0)$ (с учетом (1.6)) соотношением

$$\Psi(t) = \int_0^{R_1} r p(r) J_0(tr) dr \quad (1.13)$$

Соотношения (1.11) позволяют использовать для решения смешанной краевой задачи (1.4)–(1.7) метод парных интегральных уравнений.

Отметим, что в случае рассматриваемой задачи при полном контакте пластины с полупространством (условия двусторонней связи) решение задачи (1.1)–(1.3) получается из (1.9) при $R_1 = R$ ($\beta = 1$).

2. Сведение задачи к интегральному уравнению. Удовлетворяя граничным условиям (1.5)–(1.6) с помощью интегральных представлений (1.11), получаем следующие парные интегральные уравнения относительно Ψ :

$$\int_0^\infty [1+k(t)] \Psi(t) J_0(rt) dt = \frac{\mu}{1-\nu_0} w(r) \quad (r \leq R_1)$$

$$\int_0^\infty t \Psi(t) J_0(rt) dt = 0 \quad (r > R_1) \quad (2.1)$$

которые известным образом (с использованием операторов дробного интегрирования) приводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно некоторой функции ϕ [12, 13]:

$$\phi(x) + \int_0^1 \phi(y) N(x, y) dy = G(x) \quad (x \in [0, 1]) \quad (2.2)$$

$$N(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k\left(\frac{t}{R_1}\right) \cos(xt) \cos(yt) dt, \quad G(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{r w(R_1 r) dr}{(x^2 - r^2)^{1/2}}$$

Функция ϕ связана с Ψ соотношением

$$\Psi(t) = \frac{2\mu R_1}{\pi(1-\nu_0)} \int_0^1 \phi(x) \cos(R_1 t x) dx \quad (2.3)$$

Выделив в $G(x)$ члены, зависящие в силу (1.9) от $p(r)$, и воспользовавшись соотношениями (1.9), (1.11), (1.13), уравнение (2.2) преобразуем к виду

$$\varphi(x) + \int_0^1 \varphi(y) K(x, y) dy = F(x) \quad (x \in [0, 1]) \quad (2.4)$$

$$K(x, y) = N(x, y) + \delta \beta^3 [K_0(x, y) - K_1(x, y)]$$

$$K_0(x, y) = 1/4 \{ (x+y)^2 \ln [2(x+y)] + (x-y)^2 \ln |2(x-y)| - 3x^2 - 2y^2 \ln(2y) - \eta x^4 (1-2y^2) \}, \quad K_1(x, y) = 1/2 x^2 [\eta(1-\beta^2)y^2 - \ln \beta]$$

$$F(x) = w_0 - \frac{MR^2 \beta^2 x^2}{D(1+\nu_1)} + \frac{PR^2 \beta^2 x^2}{4\pi D} \left[\ln(2\beta x) - \frac{3+\eta}{2} \right] +$$

$$+ \frac{q_0 R^4}{4D} \left\{ \beta^4 \int_0^x q_1(R_1, r) \left[(r^2 + 2x^2) \ln \left(\frac{x + (x^2 - r^2)^{1/2}}{r} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 3x(x^2 - r^2)^{1/2} \right] r dr - \beta^2 x^2 \int_0^1 q_1(Rr) [\eta(1-r^2) - 2 \ln r] r dr \right\}$$

$$\delta = 2\mu R^3 [\pi D(1-\nu_0)]^{-1} \quad q(r) = q_0 q_1(r) \quad q_0 = \text{const}$$

а для контактного давления и прогибов пластины в зоне контакта получаем следующие выражения:

$$p(r) = \frac{2\mu}{\pi R_1(1-\nu_0)} \left[\frac{\varphi(1)}{(1-\rho^2)^{1/2}} - \int_\rho^1 \frac{\varphi'(t) dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \right] \quad (2.5)$$

$$w(r) = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^1 \varphi(t) dt \int_0^\infty k(s/R_1) \cos(ts) J_0(\rho s) ds + \int_0^\rho \frac{\varphi(t) dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} \right] \quad \rho = r/R_1 \quad r \leq R_1$$

Выражение для прогибов пластины $w(r)$ при $r \leq R$ через функцию φ можно получить непосредственной подстановкой выражения для контактного давления (2.5) в (1.9). Безразмерный параметр δ характеризует соотношение упругих характеристик материалов пластины и полупространства. При заданных условиях нагружения пластины существует такое значение $\delta = \delta_*$ (критическое), что при значениях $\delta \geq \delta_*$ происходит отрыв края пластины от поверхности полупространства. Таким образом, для полного решения задачи необходимо найти значение δ_* , затем — величину R_1 . После чего, решив интегральное уравнение (2.4), вычисляем контактное давление и прогибы пластины.

При $\nu = \text{const}$ ($k(t) = 0$; $N(x, y) = 0$) получаем решение задачи об изгибе круглой пластины на упругом изотропном однородном полупространстве; при $\beta = 1$ ($K_1(x, y) = 0$) — о полном контакте пластины с полупространством; при $D \rightarrow \infty$ ($\delta \rightarrow 0$) и $\beta = 1$ — о вдавливании кругового штампа с плоским основанием в упругое изотропное неоднородное полупространство.

3. Определение радиуса площадки контакта. Второе условие (1.8) в силу (2.5) эквивалентно условию

$$\varphi(1) = 0 \quad (3.1)$$

а уравнение (1.10) принимает вид

$$P + q_0 \lambda \pi R^2 = \frac{4\mu R_1}{1-\nu_0} \int_0^1 \varphi(t) dt, \quad \lambda = 2 \int_0^1 q_1(Rt) t dt \quad (3.2)$$

Решение уравнения (2.4) будем искать в виде

$$\varphi(x) = w_0 \varphi_1(x) + \frac{q_0 R^4}{4D} \varphi_2(x) - \frac{MR^2}{D(1+\nu_1)} \varphi_3(x) + \frac{PR^2}{4\pi D} \varphi_4(x) \quad (3.3)$$

где $\varphi_i(x)$ ($i=1, \dots, 4$) являются соответственно решениями интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\varphi_i(x) + \int_0^1 \varphi_i(y) K(x, y) dy = F_i(x) \quad (3.4)$$

$$F_1(x) = 1, \quad F_2(x) = \beta^4 \int_0^x q_1(R_1 r) \left[(r^2 + 2x^2) \ln \left(\frac{x + (x^2 - r^2)^{1/2}}{r} \right) - \right. \\ \left. - 3x(x^2 - r^2)^{1/2} \right] r dr - \beta^2 x^2 \int_0^1 q_1(Rr) [\eta(1-r^2) - 2 \ln r] r dr \\ F_3(x) = \beta^2 x^2, \quad F_4(x) = \beta^2 x^2 [\ln(2\beta x) - (3+\eta)/2]$$

Используя (3.3), из (3.2) находим

$$w_0 = \frac{R^2}{4\varepsilon_1 D} \left[q_0 R^2 \left(\frac{2\lambda}{\delta\beta} - \varepsilon_2 \right) + \frac{4M\varepsilon_3}{1+\nu_1} + \frac{P}{\pi} \left(\frac{2}{\delta\beta} - \varepsilon_4 \right) \right] \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_i = \int_0^1 \varphi_i(t) dt \quad (i=1, \dots, 4)$$

Удовлетворяя с помощью (3.3), (3.5) условию (3.1), получаем следующее уравнение относительно β (при заданном значении R определение величины β равносильно определению R_1):

$$q_0 R^2 \Phi_1(\delta, \beta) - M \Phi_2(\delta, \beta) + P \Phi_3(\delta, \beta) = 0 \quad (3.6)$$

$$\Phi_1(\delta, \beta) = \frac{\varphi_1}{\varepsilon_1} \left(\frac{2\lambda}{\delta\beta} - \varepsilon_2 \right) + \varphi_2, \quad \Phi_2(\delta, \beta) = \frac{4}{1+\nu_1} \left(\varphi_3 - \frac{\varphi_1 \varepsilon_3}{\varepsilon_1} \right)$$

$$\Phi_3(\delta, \beta) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\varphi_1}{\varepsilon_1} \left(\frac{2}{\delta\beta} - \varepsilon_4 \right) + \varphi_4 \right], \quad \varphi_i = \varphi_i(1) \quad (i=1, \dots, 4)$$

Таким образом, для значений $\delta > \delta_*$ величина радиуса площадки контакта находится из совместного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода (3.4) и уравнения (3.6). Критическое значение δ_* находится из решения уравнений (3.4), (3.6) при $\beta=1$.

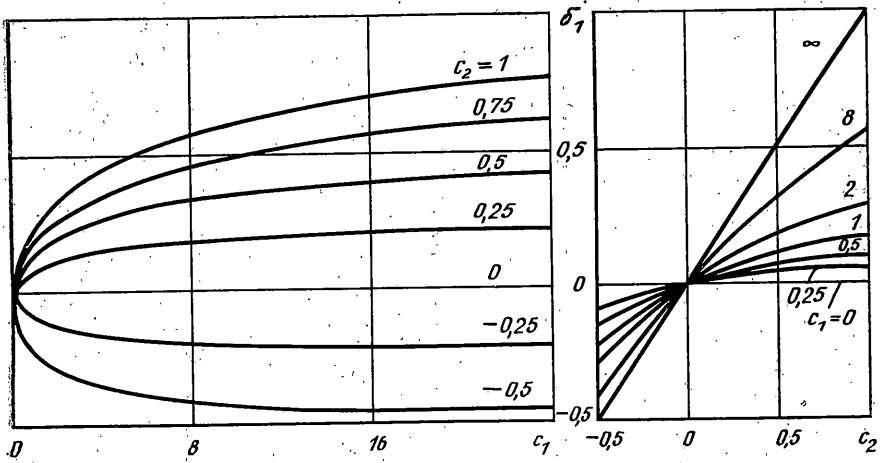
4. Частные случаи нагружения пластины. Пусть $P=0$, $M>0$, $q(r) = q_0 > 0$. Тогда уравнение для определения радиуса площадки контакта принимает вид

$$M/(q_0 R^2) = \Phi_1(\delta, \beta)/\Phi_2(\delta, \beta) \quad (4.1)$$

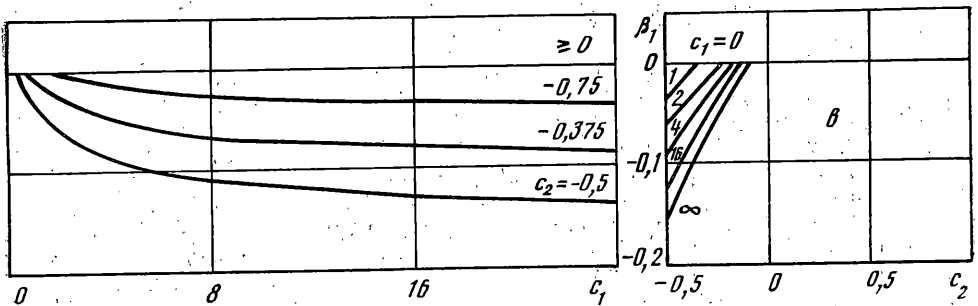
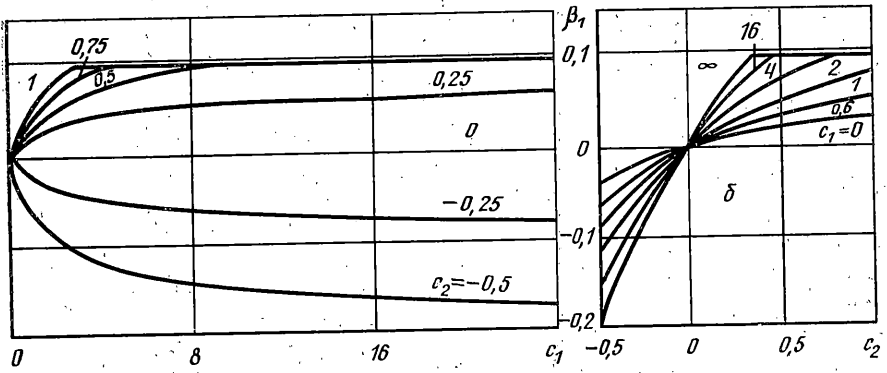
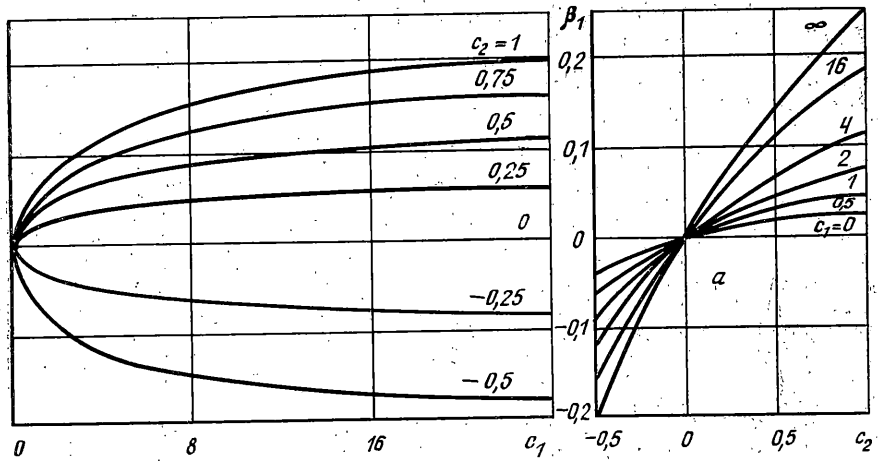
Для получения численных результатов зададим следующий закон изменения коэффициента Пуассона [14]: $\nu(z) = 1 - [a + b \exp(-2\gamma z)]^{-1}$, $\gamma \geq 0$. В случае изменения значений коэффициента Пуассона в пределах от 0 до 0,5 интервалом изменения безразмерного параметра $c_2 = b/a$ является интервал $[-0,5; 1]$, в случае же изменения значений $\nu(z)$ в пределах от -1 до 0,5 - интервал $[-0,75; 3]$. Безразмерный параметр $c_1 = \gamma R$ изменяется в интервале $[0, \infty)$.

Функцию $N(x, y)$ можно в этом случае представить в виде

$$N(x, y) = \frac{c_1 c_2 \beta}{\pi(1+c_2)} \left\{ g \left[\frac{c_1 \beta (x+y)}{1+c_2} \right] + g \left[\frac{c_1 \beta |x-y|}{1+c_2} \right] \right\} \quad (4.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где [15]: $g(z) = -\text{Ci}(z) \cos z - [\text{Si}(z) - \pi/2] \sin z$; $\text{Ci}(z)$, $\text{Si}(z)$ — соответственно интегральный косинус и синус.

Критическое значение δ_* вычислялось (с точностью до 10^{-4}) из совместного решения уравнений (3.4), (4.1) при $\beta=1$ методом последовательных приближений. Для решения интегральных уравнений (3.4) использовался метод механических квадратур [16, 17]. Задавались значения $\nu_1 = 1/6$ ($\eta = 5/7$) и $M = 1,8 q_0 R^2$. На фиг. 1 представлена зависимость безразмерной величины $\delta_1 = \delta_*/\delta_*^0 - 1$ от параметров c_1 , c_2 . Здесь δ_*^0 — критическое значение в случае однородного полупространства. Заметим, что $\delta_1 \rightarrow c_2$ при $c_1 \rightarrow \infty$. Анализ представленной зависимости показывает, что в случае задачи для полупространства с возрастающим по глубине коэффициентом Пуассона ($c_2 < 0$) значение δ_* меньше, чем в случае задачи для полупространства с постоянным коэффициентом Пуассона ν_0 и больше в случае задачи для полупространства с убывающим по глубине коэффициентом Пуассона ($c_2 > 0$). Не приводя результатов вычислений, отметим, что изменение величины $M/(q_0 R^2)$ в пределах от 0,2 до 2 приводит к незначительному изменению величины δ_1 (в пределах до 10^{-2}), т. е. изменение величины нагрузки практически не изменяет степень влияния неоднородности материала основания на величину δ_* . Иначе, зависимость, представленная на фиг. 1, сохраняется при изменении величины $M/(q_0 R^2)$ в указанном интервале.

На фиг. 2 представлены зависимости безразмерной величины $\beta_1 = R_1/R_1^0 - 1$ от параметров c_1 , c_2 . Здесь R_1^0 — величина радиуса площадки контакта в случае задачи для однородного полупространства с коэффициентом Пуассона ν_0 . Значение радиуса площадки контакта находилось (с точностью до 10^{-4}) из совместного решения уравнений (3.4), (4.1) при $\delta=1$ и $\nu_1 = 1/6$ методом последовательных приближений (за начальное приближение выбиралось значение $R_1 = R$, т. е. $\beta=1$). На фиг. 2, а представлены зависимости для $M = 1,8 q_0 R^2$. В этом случае $R_1^0 = 0,7997 R$ и $\delta_*^0 = 0,4944$, а следовательно, $\delta=1 = 2,0227 \delta_*^0$ и (как видно из фиг. 1) имеет место отрыв края пластины от основания при любых значениях c_1 , c_2 . На фиг. 2, б, в представлены зависимости для значений величины $M/(q_0 R^2)$ соответственно 1,2 ($R_1^0 = 0,9138 R$, $\delta_*^0 = 0,7476$, $\delta=1 = 1,3375 \delta_*^0$) и 0,8 ($R_1^0 = R$, $\delta_*^0 = 1,4352$, $\delta=1 = 0,8809 \delta_*^0$). В этих случаях неполный контакт имеет место ни при всех значениях параметров c_1 , c_2 (прямолинейные участки кривых соответствуют значениям c_1 , c_2 , при которых не происходит отрыва края пластины). Так для $M = 1,2 q_0 R^2$ при $c_2 \leq 0,3375$ имеет место отрыв края пластины при любых значениях c_1 и не происходит отрыва, например, для $c_2 = 1$ при $c_1 \geq 2,612$, для $c_2 = 0,75$ при $c_1 \geq 3,904$, для $c_2 = 0,5$ при $c_1 \geq 9,849$. Для $M = 0,8 q_0 R^2$ при $c_2 \geq -0,1187$ имеет место полный контакт при любых значениях c_1 (т. е. имеет место отрыв только в случае задачи для полупространства с возрастающим по глубине коэффициентом Пуассона) и имеет место отрыв края пластины, например, для $c_2 = -0,25$ при $c_1 \geq 1,852$, для $c_2 = -0,375$ при $c_1 \geq 0,725$, для $c_2 = -0,5$ при $c_1 \geq 0,375$. Из представленных результатов следует, что при наличии отрыва края пластины от основания учет возрастания (убывания) по глубине коэффициента Пуассона приводит к снижению (увеличению) расчетных значений радиуса площадки контакта в сравнении с однородным случаем.

В случае нагружения пластины сосредоточенной силой P в центре ($M=0$, $q(r)=0$) уравнение (3.6) принимает вид: $\Phi_3(\delta, \beta) = 0$. Отсюда следует, что в этом случае условия отрыва края пластины от основания (величина δ_*) и величина радиуса площадки контакта не зависят от величины силы P .

Таким образом, результаты численных расчетов свидетельствуют, что неоднородность упругих свойств (изменение коэффициента Пуассона) основания существенно влияет на условия отрыва края пластины от основания (на величину δ_*) и на величину радиуса площадки контакта. Изменение величины радиуса площадки контакта, в свою очередь, приводит к изменению расчетных параметров контактного взаимодействия пластины с основанием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. 679 с.
3. Корнев Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М.: Физматгиз, 1960. 458 с.
4. Ишкова А. Г., Корнев Б. Г. Изгиб пластинок на упругом и упруго-пластическом основании // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. М.: Наука, 1966. Вып. 3. С. 157—176.
5. Попов Г. Я. Пластины на линейно-деформируемом основании (обзор) // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № 3. С. 3—17.

6. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
7. Развитие теории контактных задач в СССР/Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
8. Статические и динамические смешанные задачи теории упругости/Под ред. И. И. Воровича. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1983. 263 с.
9. Дейглин А. И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. М.: Стройиздат, 1984. 334 с.
10. Шевляков Ю. А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред. Киев - Одесса: Вища шк., 1977. 215 с.
11. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
12. Бородачев А. Н., Дудинский В. И. Контактная задача для упругого полупространства с переменным коэффициентом Пуассона // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 86-91.
13. Sneddon I. N. Dual equation in elasticity // Приложения теории функций в механике сплошной среды. М.: Наука, 1965. Т. 1. С. 76-94.
14. Дудинский В. И. Взаимодействие штампа с упругим неоднородным полупространством при наличии сил трения // Трение и износ. 1988. Т. 9. № 1. С. 97-105.
15. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
16. Вермань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986. 543 с.
17. Atkinson K. E. A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind. Philadelphia: SIAM. 1976. 230 p.

Киев

Поступила в редакцию:
1.XI.1988.