

УДК 533.6.013.42

© 1990 г.

С. Н. БЕШЕНКОВ, Т. Д. ВОЛКОВА

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ,
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ СО СРЕДОЙ

Предлагается метод расчета вынужденных колебаний, излучения и передачи звука прямоугольной пластиной, закрепленной в бесконечном жестком экране на границе раздела акустических сред. Исследуются зависимости составляющих прогиба и звукового давления от частоты возбуждающей силы, а также их распределение по поверхности пластины. Приводятся результаты расчета звукоизоляции ограниченной и бесконечной пластин.

Пластины и оболочки, взаимодействующие со средой, являются распространенной расчетной схемой многих элементов машиностроительных конструкций. В связи с этим актуальной является задача исследования их поведения при действии заданных гармонических нагрузок и возникающей при колебаниях реакции среды. Самостоятельный интерес представляет при расчетах звуковых полей, создаваемых в среде вибрирующими конструктивными элементами. В [1, 2] рассмотрены вынужденные колебания и излучение звука экранированной упругой полосой, контактирующей с жидкостью. Результаты аналогичных исследований для круглой пластины приводились ранее¹. В [3] решена задача прохождения звуковых волн через прямоугольную пластину. Ниже предлагается единый метод расчета и анализируются вынужденные колебания, излучение и передача звука прямоугольной пластиной, закрепленной в бесконечном жестком экране на границе раздела акустических сред.

Опуская временной множитель $\exp(-i\omega t)$, уравнение изгиба пластины с учетом реакции акустических сред запишем в виде

$$D(\partial^4 w / \partial x^4 + 2\partial^2 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4) - \rho h \omega^2 w = q(x, y) + p(x, y) \quad (1)$$

где w — прогиб пластины с параметрами D , ρ , h ; $q(x, y)$ — заданная возбуждающая нагрузка; $p(x, y)$ — звуковое давление на пластину (разность давлений по обе ее стороны).

Звуковые давления в полупространствах $z > 0$ и $z < 0$ определяются через интеграл Гюйгенса

$$p_2(x, y, z) = (-\omega^2 \rho_0 / (2\pi)) \int_0^a \int_0^b w(x_1, y_1) \frac{\exp(ik_0 R)}{R} dy_1 dx_1 \quad (2)$$

в котором $R = ((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2)^{1/2}$ — расстояние от элемента $dx_1 dy_1$ до точки наблюдения; a, b — размеры пластины в плане; $k_0 = \omega/c_0$ — волновое число в среде с плотностью ρ_0 . Тогда для реакции среды получим выражение

$$p(x, y) = (p_1 - p_2)|_{z=0} = (\omega^2 \rho_0 n / (2\pi)) \int_0^a \int_0^b w(x_1, y_1) \frac{\exp(ik_0 r)}{r} dy_1 dx_1 \quad (3)$$

¹ Голованов В. А. и др. Рассеяние и излучение звука упругими оболочками в жидкости: Препринт № 261. М.: ИПМ АН СССР, 1985. 70 с.

где $n=1, 2$ при одно- и двухстороннем контакте со средой пластины; $r = ((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2)^{1/2}$ — расстояние от элемента $dx_1 dy_1$ до рассматриваемой точки на пластине.

Решение уравнения (1) будем искать в виде ряда по собственным формам колебаний в вакууме, соответствующим заданным краевым условиям

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} w_{mn}(x, y) \quad (4)$$

Аналогичными рядами представим слагаемые в правой части уравнения (1). Т. к. функция $p(x, y)$ является неизвестной, то разобьем пластину на малые прямоугольные элементы линиями $x_l = (l-1)\Delta a$, $y_j = (j-1)\Delta b$ ($l=1, 2, \dots, M+1$, $j=1, 2, \dots, N+1$). На каждом из этих элементов звуковое давление аппроксимируем билинейной функцией

$$p(x, y) = p_{ej} M_1(x) N_1(y) + p_{e+1, j} M_2(x) N_1(y) + p_{e, j+1} M_1(x) N_2(y) + p_{e+1, j+1} M_2(x) N_2(y)$$

$$M_1(x) = 1 - \frac{x - (l-1)\Delta a}{\Delta a}, \quad M_2(x) = \frac{x - (l-1)\Delta a}{\Delta a}$$

$$(l-1)\Delta a \leq x \leq l\Delta a, \quad (j-1)\Delta b \leq y \leq j\Delta b, \quad \Delta a = a/M, \quad \Delta b = b/N$$

Здесь M, N — число элементов по осям x и y ; p_{ej} — звуковые давления в узлах элементов. Формулы для базисных функций $N_i(y)$ получаются из выражений для $M_i(x)$ ($i=1, 2$) заменой x на y , l на j , Δa на Δb .

В результате с учетом свойства ортогональности собственных форм колебаний для составляющих нагрузки на пластину получаем следующее разложение

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} w_{mn}(x, y), \quad q_{mn} = H_{mn}^{-1} \int_0^a \int_0^b q(x, y) w_{mn}(x, y) dy dx \quad (5)$$

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} w_{mn}(x, y), \quad p_{mn} = \sum_{l=1}^{M+1} \sum_{j=1}^{N+1} p_{ej} z_{mnlj}$$

$$z_{mnlj} = H_{mn}^{-1} \left[\int_{(l-1)\Delta a}^{l\Delta a} \int_{(j-1)\Delta b}^{j\Delta b} M_1(x) N_1(y) w_{mn}(x, y) dy dx + \int_{(l-2)\Delta a}^{(l-1)\Delta a} \int_{(j-1)\Delta b}^{j\Delta b} M_2(x) N_1(y) w_{mn}(x, y) dy dx + \int_{(l-1)\Delta a}^{l\Delta a} \int_{(j-2)\Delta b}^{(j-1)\Delta b} M_1(x) N_2(y) w_{mn}(x, y) dy dx + \int_{(l-2)\Delta a}^{(l-1)\Delta a} \int_{(j-2)\Delta b}^{(j-1)\Delta b} M_2(x) N_2(y) w_{mn}(x, y) dy dx \right] \quad (6)$$

$$H_{mn} = \int_0^a \int_0^b w_{mn}^2(x, y) dy dx$$

При крайних значениях индексов l и j в формуле (6) отбрасываются интегралы с пределами, выходящими за область пластины. Заметим, что если собственная форма колебаний пластины имеет вид $w_{mn}(x, y) = w_m(x) w_n(y)$, то выражение для z_{mnlj} также может быть представлено в виде $z_{mnlj} = z_{ml} z_{nj}$.

Подстановка формул (4), (5) в уравнение (1) позволяет определить коэффициенты a_{mn} в разложении в ряд прогиба пластины

$$a_{mn} = 1/(\rho h) \left[q_{mn} + \sum_{l=1}^{M+1} \sum_{j=1}^{N+1} p_{lj} z_{mnlj} \right] / (\omega_{mn}^2 - \omega^2) \quad (7)$$

где ω_{mn}^2 — квадраты собственных частот колебаний пластины.

Разность звуковых давлений по обе стороны пластины в ее произвольном узле с координатами $x = (s-1)\Delta a$, $y = (t-1)\Delta b$ находим по формуле (3):

$$p_{st} = \frac{\omega^2 \rho_0 n}{2\pi \rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(q_{mn} + \sum_{l=1}^{M+1} \sum_{j=1}^{N+1} p_{lj} z_{mnlj} \right) (\omega_{mn}^2 - \omega^2)^{-1} \times \\ \times \int_0^a \int_0^b w_{mn}(x, y) \frac{\exp(ik_0 r_{st})}{r_{st}} dx dy \\ r_{st}^2 = [(s-1)\Delta a - x]^2 + [(t-1)\Delta b - y]^2$$

Полагая в последней формуле $s=1, 2, \dots, M+1$; $t=1, 2, \dots, N+1$ приходим к системе $(M+1)(N+1)$ уравнений относительно узловых значений реакции среды

$$\sum_{l=1}^{M+1} \sum_{j=1}^{N+1} a_{stlj} p_{lj} = b_{st} \quad (s=1, 2, \dots, M+1, \quad t=1, 2, \dots, N+1) \quad (8)$$

$$a_{stlj} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{mnlj}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} I_{stmn} - \delta_{stlj} \frac{2\pi \rho h}{\omega^2 \rho_0 n} \quad (9)$$

$$b_{st} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} I_{stmn}, \quad \delta_{stlj} = \begin{cases} 1 & \text{при } s=l \text{ и } t=j \\ 0 & \text{при } s \neq l \text{ и (или) } t \neq j \end{cases}$$

$$I_{stmn} = \int_0^a \int_0^b w_{mn}(x, y) \frac{\exp(ik_0 ([(s-1)\Delta a - x]^2 + [(t-1)\Delta b - y]^2)^{1/2})}{([(s-1)\Delta a - x]^2 + [(t-1)\Delta b - y]^2)^{1/2}} dx dy$$

Отделяя в (8) действительные и мнимые части, приходим к системе из $2(M+1)(N+1)$ уравнений с действительными коэффициентами. Из ее решения находим звуковые давления в точках на поверхности пластины и далее с помощью формул (4), (7) прогиба пластины.

Отметим, что прямая постановка рядов для $p(x, y)$, $q(x, y)$, $w(x, y)$ в формулы (1), (3), эквивалентная применению процедуры Галеркина, приводит к бесконечной системе уравнений с коэффициентами содержащими четырехкратные интегралы, в то время как система (8) является конечной и содержит только двойные интегралы. Кроме того при определении давления на поверхности пластины мы все равно придем (после решения указанной бесконечной системы) к необходимости вычисления таких же сумм и интегралов, что и формулах (9). Т. е. предлагаемый метод позволяет значительно упростить вычисление звукового давления на поверхности пластины.

При этом давление остается конечным и на частотах $\omega \rightarrow \omega_{mn}$, поскольку слагаемые, содержащие в знаменателе разность $\omega_{mn}^2 - \omega^2$, присутствуют как в коэффициентах системы, так и в ее правых частях.

Зная звуковое давление на поверхности пластины и ее колебательную скорость по формуле

$$w = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_0^a \int_0^b p v^* dx dy \right) = \frac{\omega}{2\rho h n} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} H_{mn}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} \sum_{l=1}^{M+1} \sum_{j=1}^{N+1} p_{lj} z_{mnlj}$$

находим акустическую мощность излучения, представляющую в прикладной акустике основной интерес.

Если колебания пластины возбуждаются падающими на нее из верхнего полупространства $z < 0$ плоскими звуковыми волнами $p_0 = \exp[ik_0(x \cos \varphi \sin \theta + y \sin \varphi \sin \theta + z \cos \theta)]$, то отношение мощности звука w_2 , прошедшего через пластину и мощности звука $w_0 = ab/2\rho_0 c_0$ в падающих волнах представляет собой величину звукоизоляции пластины $R = -10 \lg(w_2/w_0)$.

Для определения значения w_2 звуковое давление p_1 в полупространстве $z < 0$ представим в виде суммы давлений в падающей волне, волне, отраженной от абсолютно жесткого экрана, и волне, излученной пластиной. Тогда с учетом формулы (2) находим суммарную нагрузку на пластину, которую необходимо подставить в правую часть уравнения (1):

$$f(x) = 2 \exp[ik_0(x \cos \varphi \sin \theta + y \sin \varphi \sin \theta)] + \frac{\omega^2 \rho_0}{\pi} \int_0^a \int_0^b w(x_1, y_1) \frac{\exp(ik_0 r)}{r} dy_1 dx_1$$

Обозначая первое слагаемое в этом выражении через $q(x, y)$, а второе через $p(x, y)$, приходим к рассмотренной выше задаче о вынужденных колебаниях пластины, взаимодействующей со средой. Отличие состоит в том, что величины

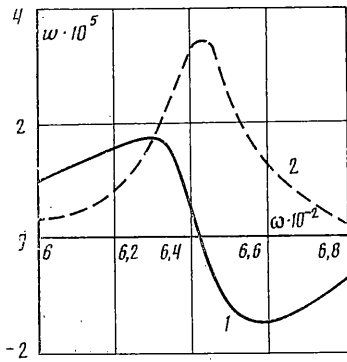
$$q_{mn} = H_{mn}^{-1} \int_0^a \int_0^b 2 \exp[ik_0(x \cos \varphi \sin \theta + y \sin \varphi \sin \theta)] w_m(x, y) dy dx$$

являются комплексными, поэтому выражение для акустической мощности w_2 примет вид

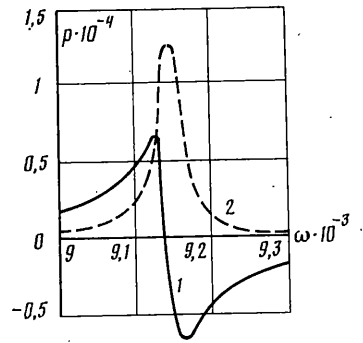
$$w_2 = \frac{\omega}{4\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(q_{mn}' \left(\sum_{l=1}^{M+1} \sum_{j=1}^{N+1} p_{lj}'' z_{mnlj} \right) - q_{mn}'' \left(\sum_{l=1}^{M+1} \sum_{j=1}^{N+1} p_{lj}' z_{mnlj} \right) \right) (\omega_{mn}^2 - \omega^2)^{-1} H_{mn}$$

Здесь одним и двумя штрихами отмечены действительные и мнимые составляющие соответствующих величин.

В численных исследованиях по изложенному алгоритму рассматривалась свободно опертая по контуру ($w_{mn} = \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$) стальная пластина с размерами $a = l = 0,5$ м; $h = 10^{-2}$ м. При вычислении интегралов I_{stmn} в формулах (9) интегрирование по элементам, не содержащим узел с координатами $x_s = (s-1)\Delta a$, $y_t = (t-1)\Delta b$ осуществлялось с использованием квадратурных формул Гаусса. На остальных элементах функция $w_{mn}(x, y)$ представлялась в виде $[w_{mn}(x, y) - w_{mn}(x_s, y_t)] + w_{mn}(x_s, y_t)$ и интеграл разбивался на два, первый из которых (регулярный) находился численно, а второй (сингулярный) аналитически с использованием локальной полярной системы координат [4]. Точность решения контролировалась путем сопоставления результатов, получаемых при последовательном увеличении числа участков разбиения пластины по осям x и y и числа членов в рядах. В рассмотренном диапазоне изменения частоты возбуждения значения указанных параметров варьировались от 6 до 15 и от 3 до 7 соответственно. С целью уменьшения числа неизвестных в системе (8) для каждого конкретного случая возбуждения учитывались соотношения симметрии и рассматривалась только часть пластины.

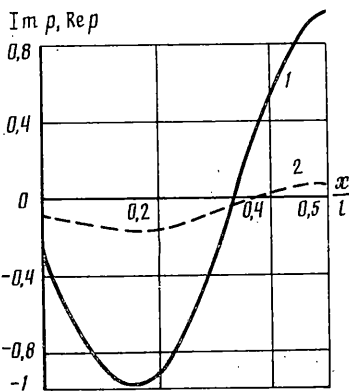


Фиг. 1

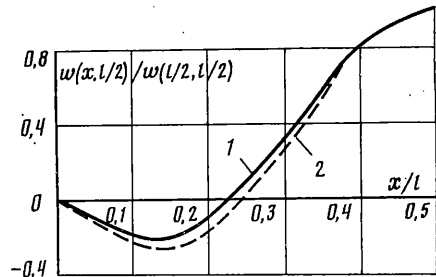


Фиг. 2

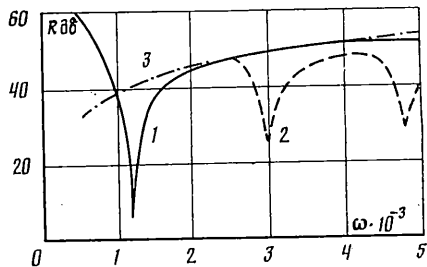
Выполненные расчеты показали, что на определенных частотах возбуждения модули и мнимые части прогиба и звукового давления на поверхности пластины достигают максимума, в то время как их действительные части меняют знак. Сказанное иллюстрируют представленные на фиг. 1 и 2 частотные зависимости действительной (сплошная кривая) и мнимой составляющих прогиба и давления в центре пластины, возбуждаемой сосредоточенной силой $F\delta(x-l/2)\delta(y-l/2)$ ($F=10\text{ Н}$) при контакте с водой одной стороной. Показанные максимумы прогиба и давления соответствуют резонансам пластины на формах колебаний с одной (фиг. 1) и тремя (фиг. 2) полуволнами в направлении каждой из осей. При колебаниях в вакууме



Фиг. 4



Фиг. 3



Фиг. 5

эти резонансы наблюдаются соответственно на частотах $\omega_{11}=1,2 \cdot 10^3\text{ с}^{-1}$ и $\omega_{33}=1,08 \cdot 10^4\text{ с}^{-1}$, т. е. наличие жидкости вызывает смещение резонансов в область более низких частот. Распределение прогиба по поверхности пластины на низшем резонансе $\omega_{11}=642\text{ с}^{-1}$ практически не отличается от соответствующей формы колебаний в вакууме. На последующих резонансах это отличие в зависимости от относительной толщины пластины может становиться довольно существенным. Для резонансной частоты $\omega_{13}=\omega_{31}=4,59 \cdot 10^3\text{ с}^{-1}$ (в вакууме $\omega_{13}=\omega_{31}=5,92 \cdot 10^3\text{ с}^{-1}$) указанное расхождение иллюстрирует фиг. 3 с графиками распределения прогибов по осям симметрии пластины при наличии (сплошная кривая) и отсутствии (штриховая) жидкости. Изменение звукового давления вдоль поверхности пластины определяется на каждой из частот ее формой, однако в отличие от прогиба, на контуре значения давления отличны от нуля. При этом, за исключением околорезонансных частот модуль действительной составляющей давления по абсолютной величине значительно превосходит мнимую часть. Распределение действительной (штриховая) и мнимой (сплошная) составляющих давления вдоль осей симметрии пластины показано для резонансной частоты ω_{33} на фиг. 4. Значения составляющих отнесены к максимальному по модулю значению мнимой части давления в центре.

Все отмеченные выше закономерности сохраняются и при наличии жидкости с двух сторон пластины, а также при ее несимметричном относительно центра возбуждении. В последнем случае дополнительно появляются резонансы с четным числом полуволн вдоль одной или обеих из координатных осей. При возбуждении пластины сосредоточенной силой $F\delta(x-l/4)\delta(y-l/4)$ амплитуды колебания на резонансных частотах ω_{11} , ω_{12} , ω_{22} относятся примерно как 1, 6, 10, т. е. при четном числе полуволн амплитуды резонансных колебаний выше.

Описанные выше результаты качественно совпадают с данными [4] для упругой полосы.

На фиг. 5 представлены рассчитанные по изложенному методу частотные зависимости звукоизоляции от воздушного шума рассмотренной выше стальной пластины, возбуждаемой плоскими звуковыми волнами, падающими на нее под углами $\varphi=45^\circ$, $\theta=0^\circ$ и $\varphi=45^\circ$, $\theta=30^\circ$ (кривые 1 и 2). Зависимость 3 представляет собой характеристику звукоизоляции бесконечной пластины при нормальном ($\theta=0^\circ$) падении волны [5]. Видно, что конечность размеров пластины приводит к появлению резонансных провалов в ее частотной характеристике звукоизоляции. Вне резонансов звукоизоляция ограниченной и бесконечной пластин приближаются друг к другу, причем влияние излученного пластиной воздушного звукового поля на ее колебания пренебрежимо мало, что позволяет значительно упростить решение рассмотренных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голованов В. А., Попов А. Л., Чернышев Г. Н. О колебаниях ограниченной пластины в жидкости. // ПММ. 1981. Т. 50. Вып. 3. С. 436–442.
2. Filippi P. Sound radiation by baffled plates and related boundary integral equations. // J. Sound and Vibration. 1985. V. 100. No. 1. P. 69–81.
3. Гурович Ю. А. О звукоизоляции прямоугольной пластины на низких частотах. // Акустический журнал. 1978. Т. 24. Вып. 4. С. 508–515.
4. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир. 1984. 494 с.
5. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение. 1972. 349 с.

Запорожье

Поступила в редакцию
20.I.1989