

УДК 533.6.013.42

© 1990 г.

Н. А. ВЕКЛИЧ, Б. М. МАЛЫШЕВ

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ В ЖИДКОМ ОБЪЕМЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

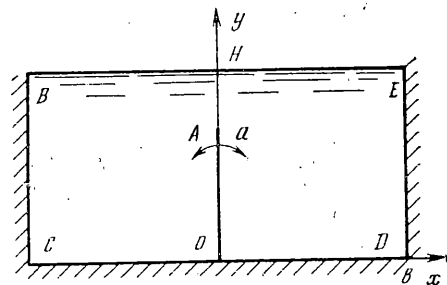
Теоретически и экспериментально исследовались колебания упругой пластины, погруженной в жидкий объем конечной прямоугольной формы.

В теоретическом решении динамическая реакция жидкости (давление) на пластину определялась с помощью линеаризованного интеграла Коши – Лагранжа. Компоненты скорости и другие элементы течения жидкости находились из вспомогательной плоской задачи о колебаниях двоякопериодической решетки пластин методом функций комплексной переменной [1, 2].

Рассмотрено влияние жидкости на свободные и вынужденные колебания пластины. С помощью предельного перехода получены как частные случаи решения ряда задач о колебаниях затопленной и подтопленной плотины (упругой пластины) и об ударе жесткой пластины по жидкому закрепленному слою [3]. Проведено сравнение с результатами для подтопленной плотины, полученными в [4, 5] методом тригонометрических рядов. Найдено оптимальное распределение толщины плотины по высоте, имеющей максимальную основную частоту свободных колебаний.

Экспериментально методом резонансных колебаний подтверждены результаты расчета зависимости частот свободных колебаний упругой (стальной) пластины в жидкости (воде) от безразмерного параметра, характеризующего геометрические и инерционные свойства пластины в жидкости. По смещению узлов колебаний пластины было также установлено качественное согласие предсказаний теории и эксперимента о существенном влиянии окружающей жидкости на моды колебаний пластины, что в некоторой степени ограничивает область применимости известной в литературе по гидроупругости гипотезы о пренебрежимо малом влиянии жидкости на моды колебаний.

1. Определим сначала динамическую реакцию жидкости. Предположим, что тонкая упругая пластина OA (фиг. 1) высоты a расположена на оси y симметрично относительно непроницаемых прямолинейных стенок BC , CD и DE , ограничивающих жидкий объем $BCDE$ прямоугольной формы (сосуд) со свободной поверхностью BE , и совершает малые поперечные колебания. Ось x направлена вправо по стенке CD . В направлении, перпендикулярном плоскости фигуры, пластина и стенки сосуда простираются до бесконечности, либо ограничены жесткими параллельными стенками, разнесенными на некоторое расстояние d . Между этими стенками и пластиной имеется малый зазор. Тогда при изгибе пластины по цилиндрической поверхности движение жидкости будет плоскопараллельным.



Фиг. 1

При определении этого движения примем основное допущение о пренебрежимо малом влиянии на него сил тяжести, вязкости и поверхностного натяжения. Считаем, что жидкость не отрывается от пластины и не кавитирует за время, в течение которого определяется динамическое воздействие ее на пластину.

Полагая, что движение жидкости началось из состояния покоя в момент времени $t=0$ и является потенциальным, для компонент скорости $u=u(x, y, t)$ и $v=v(x, y, t)$ будем иметь обычные выражения $u=\partial\varphi/\partial x$ и $v=\partial\varphi/\partial y$, где $\varphi=\varphi(x, y, t)$ — потенциал течения. Он удовлетворяет уравнению Лапласа в прямоугольной области $0 < y < H$, $|x| < b$ с разрезом $0 \leq y \leq a$ по оси y , где расположена тонкая пластина. Здесь H — высота жидкого объема, $2b$ — его ширина. Если обозначить через $w(y, t)$ и $\partial w(y, t)/\partial t$ прогиб и скорость пластины, то для потенциала φ получим следующую задачу в обычной линейной постановке (всюду ниже вводим безразмерные координаты $x^*=x/a$, $y^*=y/a$, причем звездочки у x^* и y^* опускаем):

$$\begin{aligned} \Delta^2 \varphi / \partial x^2 + \Delta^2 \varphi / \partial y^2 &= 0 \\ \varphi(x, 1/\gamma, t) &= 0, \quad \partial \varphi(x, 0, t) / \partial y = 0, \quad |x| \leq 1/(\gamma \delta) \\ \partial \varphi(\pm 1/\gamma \delta, y, t) / \partial x &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1/\gamma, \quad \gamma = a/H, \quad \delta = H/b \\ \partial \varphi(\pm 0, y, t) / \partial x &= a \partial w(y, t) / \partial t, \quad 0 \leq y \leq 1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Символ ± 0 в граничных условиях означает правый и левый берега разреза соответственно.

Динамическое давление в жидкости $p(x, y, t)$ выражаем через потенциал φ с помощью линейризованного интеграла Коши — Лагранжа: $p(x, y, t) = -\rho \partial \varphi(x, y, t) / \partial t$, где ρ — плотность жидкости.

Движение жидкости, показанное на фиг. 1, рассмотрено достаточно подробно в [2]. Там же приведены формулы для комплексной функции скоростей. Выделяя в них действительную часть и интегрируя, преобразуем их в решение задачи (1.1) для потенциала $\varphi(x, y, t)$. Одновременно отметим, что $\varphi(x, y, t)$ является нечетной функцией координаты x , принимающей значения противоположных знаков на правом (+0) и левом (-0) берегах разреза и равной нулю на оси y вне разреза $\varphi(+0, y, t) = -\varphi(-0, y, t)$, $0 \leq y \leq 1$; $\varphi(0, y, t) = 0$, $1 \leq y \leq 1/\gamma$. Дадим также явный вид потенциала $\varphi(+0, y, t)$ на правом берегу разреза, поскольку через него выражается давление $p(+0, y, t) = p_0(y, t)$ в жидкости на пластину с правой стороны

$$\varphi(+0, y, t) = a \int_0^y v(+0, y, t) dy \quad (1.2)$$

$$v(+0, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t} [g_1(\xi, y) + g_1(-\xi, y)] d\xi$$

$$p_0(y, t) = -\frac{\rho a}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial^2 w(\xi, t)}{\partial t^2} K(\xi, y) d\xi, \quad K(\xi, y) = \int_0^y [g_1(\xi, y) + g_1(-\xi, y)] dy$$

$$g_1(\xi, y) = \frac{\gamma}{8} \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(\gamma)} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \chi(\gamma r_1 - (-1)^m \gamma) \left[\frac{g_2(\xi)}{g_2(y)} \right]^{1-2m}$$

$$g_2(y) = +(\vartheta_1(0,5\gamma(1+y)) / \vartheta_1(0,5\gamma(1-y)))^{1/2}, \quad r_1 = \frac{\xi-y}{4}$$

$$\chi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\vartheta_m(x)}{\vartheta_m(\gamma r_1)}$$

Функция $v(+0, y, t)$ в (1.2) означает вертикальную составляющую скорости жидкости на правом берегу разреза OA , фиг. 1. Эта функция $\vartheta_m(x)$ определяются быстро сходящимися рядами с параметром $q =$

$=\exp(-\pi/\delta)$ [2]. Определенный интеграл, через который выражается ядро $K(\xi, y)$, в общем случае находится численно.

Рассмотрим подробнее некоторые частные случаи движения жидкости, соответствующие фиг. 1. Перейдем в (1.2) к пределу $a \rightarrow H$ ($\gamma \rightarrow 1$), то есть будем считать, что пластина подтоплена. Раскрывая неопределенность в $g_1(\xi, y)$ по правилу Лопиталля, получим при $a=H$:

$$g_1(\xi, y) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 (-1)^{1+n} \frac{\vartheta_m'(r_1)}{\vartheta_m(r_1)} \quad (1.3)$$

$$n = \text{Ent}(m/2), \quad q = \exp(-\pi b/a)$$

где как обычно $\text{Ent}(x)$ — целая часть x . Для давления $p_0(y, t)$, потенциала $\varphi(+0, y, t)$ и скорости $v(+0, y, t)$ первые четыре равенства (1.2) остаются неизменными. В сочетании с (1.3) их можно применять для расчета скорости, потенциала и давления и в том случае, когда жидкость расположена по одну сторону пластины. Причем для жесткой пластины, имеющей постоянную скорость $\partial w/\partial t = v_0$, выкладки значительно упрощаются, так как интеграл, определяющий $v(+0, y, t)$, берется аналитически. Это приводит к результатам [3] для закрепленного слоя.

Более общий случай упругой подтопленной пластины будем интерпретировать как упругую плотину, подпирающую жидкость в конечном или полубесконечном бассейне. Учитывая (1.3), для бассейна конечной ширины будем иметь

$$p_0(y, t) = -\frac{\rho a}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial^2 w(\xi, t)}{\partial t^2} K_0(\xi, y) d\xi \quad (1.4)$$

$$K_0(\xi, y) = \ln \prod_{m=1}^2 \frac{\vartheta_0(r_m) \vartheta_1(|r_m|)}{\vartheta_2(r_m) \vartheta_3(r_m)}, \quad r_{1,2} = 1/4(\xi \mp y) \quad (1.5)$$

Для полубесконечного бассейна $b \rightarrow \infty$, параметр тэта-функций $q \rightarrow 0$, и ядро $K_0(\xi, y)$ выражается через элементарные функции

$$K_0(\xi, y) = \ln(\text{tg}(\pi|r_1|) \text{tg}(\pi r_2)) \quad (1.6)$$

Конечные формулы (1.4)–(1.6) более удобны для решения задач гидроупругости по сравнению с тригонометрическими рядами, применявшимися в аналогичных случаях многими авторами [4, 5]. К тому же упомянутые ряды допускали аналитическое суммирование, которое приводит к (1.4)–(1.6).

2. Рассмотрим теперь уравнение малых колебаний подтопленной плотины переменной (по высоте) толщины $h \cdot h_0(y)$, где $h_0(y)$ — безразмерная, а h — размерная характерная толщина плотины

$$\begin{aligned} \frac{D_0}{a^4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h_0^3(y) \frac{\partial^2 w(y, t)}{\partial y^2} \right) + \rho_1 h h_0(y) \frac{\partial^2 w(y, t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{\rho a}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial^2 w(\xi, t)}{\partial t^2} K_0(\xi, y) d\xi, \quad D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Характерная изгибная жесткость D_0 выражена через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , ρ_1 — плотность материала плотины. Жидкость расположена по одну сторону плотины, причем ее смоченная грань считается прямолинейной. В зависимости от ширины бассейна, ядро $K_0(\xi, y)$ берем в виде (1.5) или (1.6).

Колебания плотины при произвольных начальных и граничных условиях могут быть представлены как обычно в виде суперпозиции гармонических колебаний по нормальным модам $Y(y)$ с частотами ω , которые

удовлетворяют интегродифференциальному уравнению. Оно имеет следующий вид

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d^2}{dy^2} \left[h_0^3(y) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \right] - h_0(y) Y(y) + \beta \int_0^1 Y(\xi) K_0(\xi, y) d\xi = 0 \quad (2.2)$$

$$\beta = \rho a / (\pi \rho_1 h), \quad \Omega = \rho_1 h a^4 \omega^2 / D_0 \quad (2.3)$$

При наличии жидкости с двух сторон параметр β надо удвоить. Для нормальных мод $Y(y)$ можно принять следующие граничные условия (нижний край зашцеилен, верхний свободен):

$$Y(0) = Y'(0) = Y''(1) = Y'''(1) = 0 \quad (2.4)$$

Уравнение (2.2) имеет симметричное ядро с логарифмической особенностью на диагонали $\xi = y$ квадрата $0 < \xi, y < 1$. Оно допускает множество нетривиальных решений $Y_1(y), Y_2(y), \dots$ с соответствующими собственными числами $\Omega_1, \Omega_2, \dots$. Нормальные моды $Y_k(y)$ удовлетворяют условию ортогональности $(Y_k, Y_m) = 0$ при $k \neq m$, где

$$(Y_k, Y_m) = \int_0^1 Y_k(y) \left[h_0(y) Y_m(y) - \beta \int_0^1 Y_m(\xi) K_0(\xi, y) d\xi \right] dy \quad (2.5)$$

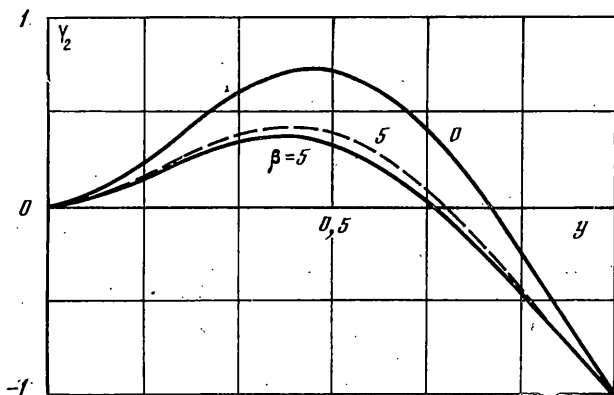
Нормальные моды $Y_k(y)$ и собственные числа Ω_k находились на ЭВМ путем замены уравнений (2.2), (2.4) системой однородных алгебраических уравнений. С этой целью отрезок $0 \leq y \leq 1$ разбивался равномерно на N частей (практически бралось $N=100$). Производные определялись по разностям значений нормальных мод в точках интерполяции, а интеграл заменялся квадратурной суммой с помощью интерполяции функций параболами по трем ближайшим точкам. Условие нетривиальной совместности однородной алгебраической системы уравнений находилось по изменению знака определителя этой системы, зависившего от Ω .

Описанный метод позволял непосредственно находить с достаточной точностью первые десять нормальных мод и собственные чисел. Так, для плотины постоянной толщины (консольная пластина) при $\beta=0$ в результате вычислений получены собственные числа (в скобках указаны их точные значения): $\Omega_1=12,36(12,36)$, $\Omega_2=485,1(485,8)$, $\Omega_3=3799,7(3807,0)$. Для консольной пластины с сечением в виде прямоугольного треугольника имели $\Omega_1=28,26(28,25)$.

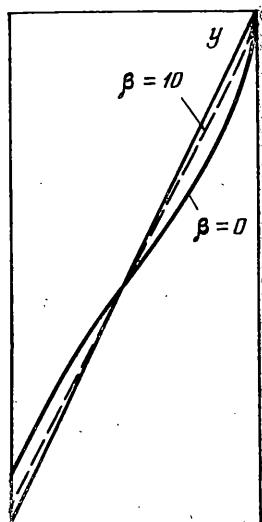
В порядке контроля точности вычислений по предлагаемой методике, для этой же консольной пластины треугольного сечения при $\beta=0$ строились первые три нормальные моды и проверялось условие их ортогональности в смысле скалярного произведения (2.5). Оказалось, что моды практически ортогональны, причем они вполне удовлетворительно согласуются с вычислениями по точной формуле [6] (несколько лучше, чем результаты [4]).

На фиг. 2 сплошными линиями приведены вторые нормальные моды (с одним узлом) плотины постоянной толщины $h_0(y)=1$ при отсутствии жидкости ($\beta=0$) и при наличии жидкости ($\beta=5$), заполняющей полубесконечный бассейн $b=\infty$. Поскольку нормальные моды определяются с точностью до постоянного множителя, прогибы на свободном конце взяты равными. Сравнение кривых показывает, что нормальные моды заметно отличаются: узел у плотины располагается дальше от свободного конца и т. п.

Оценим влияние неподвижной стенки бассейна конечных размеров на колебания плотины постоянной толщины. Ниже представлены результаты численного расчета для отношений собственных частот ω_β/ω_0 в жидкости ($\beta=5$) и пустоте ($\beta=0$) для первых четырех нормальных мод коле-



Фиг. 2



Фиг. 3

баний при трех различных положениях неподвижной стенки ($b/a=0,5$, $b/a=2,0$, $b/a=\infty$).

Моды	0,5	2,0	∞
1	0,411	0,454	0,464
2	0,438	0,470	0,471
3	0,547	0,556	0,556
4	0,619	0,624	0,625

Результаты вычислений показывают, что жидкость почти одинаково влияет на отношения собственных частот для первой и второй мод колебаний. С увеличением порядкового номера нормальных мод влияние жидкости уменьшается, так как при этом уменьшается масса воды, приводимая в заметное движение (жидкость вблизи изогнутой пластины перемещается в основном с гребней на впадины). Неподвижная стенка оказывает существенное влияние на колебания пластины, когда она расположена близко. При $b/a > 2$ влиянием неподвижной стенки на колебания пластины в ряде приближенных расчетов можно пренебречь.

Приведем типичное решение задачи о плотине в случае «землетрясения». Пусть в начальный момент времени плотина и жидкость находились в покое. Движение системы плотина — жидкость происходит вследствие того, что основание плотины начало двигаться по наперед заданному закону $w(0, t) = w_0(t)$.

Прогиб плотины $w(y, t)$ ищем в виде ряда по нормальным модам $Y_k(y)$:

$$w(y, t) = w_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) T_k(t) \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в уравнение (2.1) и учитывая условие ортогональности мод, получаем

$$d^2 T_k / dt^2 + \omega_k^2 T_k = -q_k d^2 w_0 / dt^2 \quad (2.7)$$

где ω_k — собственная частота k -ой моды колебаний, связанная с собственным числом Ω_k формулой (2.3), а q_k — коэффициенты разложения единицы в ряд по $Y_k(y)$, причем $q_k = (Y_k, 1) / (Y_k, Y_k)$, где скалярное произведение берется в смысле (2.5). Решая уравнение (2.7) с учетом нулевых начальных условий для прогиба и скорости плотины, окончательно получаем

$$w(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k Y_k(y) \omega_k \int_0^t w_0(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau \quad (2.8)$$

Для изгибающего момента $M(y, t)$ в произвольном сечении плотины имеем формулу

$$M(y, t) = \frac{D_0}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k q_k M_k(y) \omega_k \int_0^t w_0(\tau) \sin \omega_k(t-\tau) d\tau \quad (2.9)$$

Функцию $M_k(y)$ можно рассматривать как элементарный изгибающий момент, соответствующий k -ой нормальной моде изгиба, причем

$$M_k(y) = \int_1^y (y-\xi) F_k(\xi) d\xi, \quad F_k(y) = h_0(y) Y_k(y) - \beta \int_0^1 Y_k(\xi) K_0(\xi, y) d\xi \quad (2.10)$$

Формула (2.10) удобна для проведения вычислений, так как не требует численного дифференцирования мод при нахождении изгибающего момента $M(y, t)$. При практических расчетах прогибов и моментов в рядах (2.8)–(2.9) оставляем первые 10 членов.

Общее решение задачи (2.8)–(2.10) может быть использовано для частных случаев гармонических колебаний основания плотины по закону $w_0(t) = w_0 \sin \omega_* t$, или для «сейсмического удара» $w_0(t) = w_0'' t^2/2$ при $0 < t < t_0$ и $w_0(t) = w_0'' t_0^2/2$ при $t \geq t_0$, где w_0'' – заданное постоянное ускорение основания, действующее в течение времени t_0 . Интегралы в (2.8) и (2.9) берутся при этом элементарно, но, для краткости, соответствующих значений прогиба $w(y, t)$ и момента $M(y, t)$ не приводим. Отметим только, что в случае гармонических колебаний с частотой ω_* , совпадающей с одной из собственных частот плотины (с учетом влияния жидкости), амплитуда соответствующей гармоники в (2.8) будет расти пропорционально времени.

3. В связи с сейсмостойкостью плотин возникает типичная задача оптимизации – обеспечить при заданном расходе материала максимальную жесткость плотины в динамическом отношении. Поскольку наибольшую опасность представляют колебания плотины с основной частотой (при первой моде), то задачу оптимизации можно сформулировать следующим образом. При заданном расходе материала и высоте плотины требуется определить форму ее сечения, при которой плотина имела бы максимальную основную собственную частоту.

В задаче оптимизации, безразмерная толщина $h_0(y)$, определяющая форму плотины, должна удовлетворять изопериметрическому условию

$$\int_0^1 h_0(y) dy = 1 \quad (3.1)$$

Попытаемся среди функций $h_0(y)$, удовлетворяющих условию (3.1), найти такую, для которой первое собственное число Ω_1 задачи (2.2), (2.4) (а следовательно и основная частота колебаний плотины ω_1) были бы наибольшими при фиксированных значениях площади поперечного сечения $S = ah$, параметра β и высоты a .

Аналогичная задача решена в работе [7] для шарнирно опертой на краях пластины, окруженной безграничной жидкостью. Полученному в [7] уравнению Эйлера придадим более удобный для рассматриваемой задачи оптимизации толщины плотины вид

$$h_0(y) = \left(\frac{3[h_0^3(y) d^2 Y(y)/dy^2]^2}{\Omega[\lambda + Y^2(y)]} \right)^{1/4} \quad (3.2)$$

где λ – множитель Лагранжа.

Уравнений (2.2), (2.4), (3.1)–(3.2) достаточно для определения неизвестных параметров Ω , λ и функций $h_0(y)$, $Y(y)$.

Решаем эти нелинейные уравнения методом последовательных приближений. С этой целью задаемся первоначальной функцией $h_0(y) = h_{01}(y)$, удовлетворяющей условию (3.1), и решаем задачу (2.2)–(2.4)

относительно $Y(y)$ и Ω при выбранном распределении толщины $h_{01}(y)$. Найденные значения $Y(y)$, Ω и $h_{01}(y)$ подставляем в правую часть уравнения (3.2), и подбираем методом деления отрезка пополам такое значение множителя Лагранжа λ , чтобы вновь полученное распределение толщины удовлетворяло условию (3.1). Далее процесс вычислений повторяем с новым распределением толщины, пока толщина $h_0(y)$ и число Ω перестанут существенно изменяться при переходе к новому шагу.

При практическом решении уравнений (3.1)–(3.2) относительно λ числитель под радикалом удобно вычислять с помощью интегрирования

$$h_0^3 \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = \Omega \int_0^y (y-\xi) \left[h_0(\xi) Y(\xi) - \beta \int_0^1 Y(y) K_0(\xi, y) dy \right] d\xi$$

Такая подстановка не требует применения формул численного дифференцирования мод, приводящего к погрешностям. Описанный алгоритм оптимизации имеет определенное преимущество по сравнению с методом локальных вариаций [7].

В результате реализации численного алгоритма на ЭВМ была определена оптимальная форма профиля плотины при $\beta=0$ и при $\beta=10$, которые представлены на фиг. 3. В качестве исходного был взят профиль треугольного сечения, у которого основная собственная частота (при $\beta=0$) почти в 3,024 раза выше, чем у плотины постоянной толщины (это принципиальное допущение об исходной толщине уменьшало число итераций на единицу). Основная же частота плотины с оптимальным профилем получилась в 3,95 раза выше, чем для плотины постоянной толщины (увеличение собственной частоты консольной балки оптимального профиля в 4,25 раза, данное в [8], представляется несколько завышенным). Отметим, что после третьего приближения частота плотины практически не изменялась, хотя профиль на тонком свободном конце продолжал уточняться.

Оптимальный профиль при $\beta=10$ (на фиг. 3 штриховой кривой) мало отличается от треугольного профиля. Основная частота у плотины с оптимальным профилем по сравнению с плотиной постоянной толщины повысилась в 1,97 раза. По мере уменьшения параметра β оптимальный профиль будет все дальше отходить от треугольного, приближаясь к оптимальному профилю при $\beta=0$.

4. Перейдем в (1.2) к пределу (последовательно) при $b \rightarrow \infty$ и $H \rightarrow \infty$, т. е. рассмотрим плотину, затопленную в безграничной жидкости. В результате для давления $p_0(y, t)$ получим формулу (1.4) с ядром $K_0(\xi, y)$ следующего вида

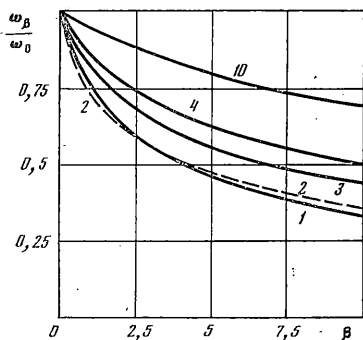
$$K_0(\xi, y) = \ln \left(\frac{|\xi - y^2|}{(r - \xi y)(r + \xi y)} \right), \quad (4.1)$$

$$r = 1 + ((1 - \xi^2)(1 - y^2))^{1/2}$$

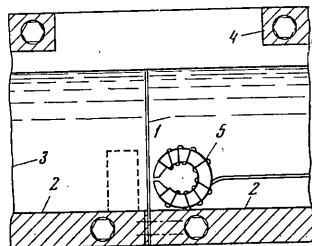
которое совпадает с [7]. Заметим при этом, что точно такое же выражение для давления $p_0(y, t)$ на поверхности пластины, совершающей симметричные колебания и окруженной безграничной жидкостью, дает известная теория тонкого крыла, если воспользоваться функцией скоростей [1(1.9), с. 52]. Более того, если считать, что жидкость расположена только по одну сторону от пластины (например, при $x > 0$), то формулы (1.4) и (4.1) сохраняются.

Уравнение колебаний плотины постоянной толщины $h_0(y) = 1$, окруженной жидкостью с двух сторон, лишь несущественно отличается от уравнений (2.1)–(2.4). Надо лишь вместо β подставить параметр $\beta_1 = 2\beta$. Но все особенности построения и исследования решений останутся сходными с п. 2.

Не останавливаясь на целом ряде задач для затопленной плотины (или, что то же самое, пластины на свободной поверхности жидкости), ограничимся оценкой влияния жидкости на нормальные моды колебаний, определявшиеся из интегродифференциального уравнения (2.2) с ядром (4.1).



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 2 пунктиром с точностью до постоянного множителя приведена форма изгиба затопленной плотины, соответствующая второй нормальной моде при $\beta_1=5$. Амплитуда на свободном конце такая же, как и для консольной пластины в пустоте. Из сравнения графиков видно, что в случае подтопленной плотины (сплошная кривая, $\beta=5$) узел смещается немного больше, чем для затопленной плотины (или для консольной пластины на поверхности жидкости).

5. Приведем результаты экспериментальной проверки теории гидроупругости в случае плотины, подпирающей воду в полубесконечном бассейне. Результаты вычислений для отношений собственных частот 1–4 и 10 нормальных мод колебаний плотины с жидкостью ω_β к собственным частотам соответствующих мод в воздухе ω_0 представлены в виде графиков на фиг. 4.

Экспериментально изучались колебания вертикальной упругой стенки (пластины), взаимодействующей с двух сторон с водой, находящейся между двумя жесткими параллельными стенками, расстояние между которыми было немного больше ширины пластины. Схема постановки опыта представлена на фиг. 5.

Пластина 1 с размерами $150 \times 30 \times 1$ мм вырезалась из стальной полосы (линейки). Длинные боковые стороны пластины шлифовались. Один конец пластины прикреплялся винтами к торцу стального бруска 2 с размерами $30 \times 30 \times 250$ мм, так что пластина имела высоту 120 мм. С другой стороны заделки устанавливался такой же брусок 2. К брускам прикреплялись толстые (16 мм) пластины 3 из оргстекла, которые сверху соединялись короткими брусками 4 такого же сечения. Таким образом, между двумя параллельными жесткими стенками консоль (пластина) могла свободно колебаться. Зазор между пластиной и стенками был менее 0,1 мм.

У нижней части консоли, на высоте около 25 мм, на расстоянии от пластины менее 1 мм находились полюса электромагнита 5, изготовленного из ферритового кольца ($D=44$ мм, $d=17$ мм, толщина 8 мм, обмотка — провод ПЭВ 0,2 мм, 2000 витков). Электромагнит питался от звукового генератора через полупроводниковый диод.

Изменяя частоту звукового генератора, добивались резонансных колебаний консоли. Резонанс устанавливался по максимуму амплитуды верхнего конца консоли, которые воспринимались фотоэлектрическим датчиком и осциллографом. Резонанс можно устанавливать также по максимуму силы звука, издаваемого консолью, а при испытании консоли в воде по капиллярным волнам на поверхности жидкости, хотя такая методика и менее объективна. Частота звукового генератора при резонансе измерялась частотомером. Так поступали при измерении собственных частот консоли при испытаниях как в воздухе, так и в воде.

Сначала консоль испытывалась в воздухе, а затем в бак (53×53 см), где находилась консоль вместе с оснасткой, наливалась вода на уровне верхнего торца консоли (без учета мениска).

Электромагнит несколько стесняет движение жидкости. Чтобы проверить влияние электромагнита на собственные частоты колебаний пластины в воде, проводился контрольный опыт. У основания пластины с противоположной стороны от электромагнита на расстоянии 10 мм вертикально устанавливался стальной брусок $20 \times 25 \times 50$ мм (на фиг. 5 он изображен пунктирными линиями). Измерения собственных частот показали, что наличие бруска заметного влияния на величины собственных частот пластины не оказывает.

Определялись также собственные частоты для первых трех нормальных мод колебаний укороченной консоли ($a=100$ мм). Параметр $\beta_1=2\pi a/\pi r/h$, характеризующий влияние жидкости на колебания консоли, имел значения: при $a=120$ мм, $\beta_1=10,2$, при $a=100$ мм, $\beta_1=8,5$. При вычислении β_1 множитель 2 обусловлен действием жидкости на пластину с двух сторон.

Результаты испытаний двух пластин приведены ниже, где указаны в герцах собственные частоты ω_0 первых трех нормальных мод колебаний пластин в воздухе ($\beta=0$) и в воде (ω_β). Для сравнения эксперимента с предсказаниями теории при-

ведены экспериментальные (третья строка) и теоретические (четвертая строка) данные отношений частот ω_B/ω_0 для соответствующих нормальных мод колебаний.

Моды	1	2	3	1	2	3
ω_0	51,8	329	936	75,4	483	1375
ω_B	17,3	119	409	28,0	183	650
ω_B/ω_0	0,334	0,362	0,437	0,371	0,379	0,473
ω_B/ω_0	0,337	0,357	0,432	0,360	0,375	0,460

Сравнение теоретических и экспериментальных данных показывает, что предсказания теории для собственных частот колебаний пластины в жидкости вполне удовлетворительно согласуются с экспериментом, несколько лучше, чем в [5, 9].

Проводилась также качественная проверка положений узла второй нормальной моды колебаний. Для этого во время резонансных колебаний Г-образный стержень с острием приводился в соприкосновение с консолью. При перемещении острия в вертикальном направлении определялось такое его положение, при котором прекращалось дребезжание и устанавливались обычные резонансные колебания, которые были бы до прикосновения стержня. Измерения положения узла при колебании консоли в воздухе и в воде показали, что узел при колебаниях в воде расположен ниже, чем при колебаниях в воздухе. Этот результат также согласуется с теорией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
2. *Веклич Н. А., Малышев Б. М.* Плоская задача об ударе пластины по жидкой полосе прямоугольного поперечного сечения // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 511–516.
3. *Веклич Н. А., Малышев Б. М.* Плоская задача об ударе по жидкой полосе // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 99–121.
4. *Шульман С. Г.* Расчеты сейсмостойкости гидросооружений с учетом влияния водной среды. М.: Энергия, 1976. 336 с.
5. *Буйвол В. Н.* Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. Киев: Наук. думка, 1975. 189 с.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961. 703 с.
7. *Банничук Н. В., Миронов А. А.* Оптимизация частот колебаний упругой пластинки в идеальной жидкости // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 5. С. 889–899.
8. *Karhaloo B., Niordson F.* Optimum design of vibrating cantilevers // J. Optimiz. Theory and Appl. 1973. V. 11. № 6. P. 638–654.
9. *Спирин Г. М., Коваленко Н. Н.* Экспериментальное исследование колебания пластины в жидкости при прохождении через резонанс (плоская задача) // Гидромеханика. Киев: Наук. думка, 1976. Вып. 33. С. 104–107.

Москва

Поступила в редакцию
29.XI.1988