

УДК 533.6.013.42

© 1990 г.

Ш. М. ТАХИРОВ

ДВИЖЕНИЕ ЖЕСТКОЙ ПОЛОСЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ГРАНИЦЕ
РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЬ — УПРУГОЕ ТЕЛО,
ПРИ ДИФРАКЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрена плоская задача о движении жесткой массивной полосы, лежащей на границе раздела жидкость — упругое тело, под действием нормально падающей на нее продольной волны. Получено уравнение движения полосы с учетом первично-дифрагированных волн. Для падающей волны типа ступеньки напряжения определен закон движения. Аналогичная задача о дифракции волны на неподвижной гладкой полуплоскости, лежащей на границе раздела жидкость — упругое тело, рассматривалась в [1], где определены перемещения границы контакта вне полуплоскости. Задача о движении пластины, лежащей на упругом полупространстве, решена в [2].

1. Математическая формулировка задачи. Считается что полупространство $y > 0$ занято жидкостью с безразмерными: плотностью k и скоростью звука $1/\gamma_2$, а полупространство $y < 0$ упругой средой плотности 1, со скоростями продольной и поперечной волн 1 и $1/\gamma_1$, соответственно. Ширина полосы в безразмерных переменных равна двум. Ось Ox направлена вдоль границы раздела, а начало координат совпадает с одним из ребер полосы. Движение жидкости рассматривается в акустическом приближении. Волны, вызванные нормальным падением на полосу продольной волны и ее движением, изображены на фиг. 1.

Предполагается, что векторы перемещений частиц упругой среды $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u, v, 0)$ и жидкости $\mathbf{U} = \mathbf{U}(U, V, 0)$ удовлетворяют условиям обобщенной теоремы Гельмгольца [3], тогда $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot}(0, 0, \psi)$, $\mathbf{U} = \text{grad } \Phi$. Введенные здесь потенциалы продольной и поперечной волн φ и ψ , а также потенциал смещения частиц жидкости Φ , удовлетворяют волновым уравнениям

$$\Delta \varphi = \varphi_{tt}, \Delta \psi = \gamma_1^2 \psi_{tt} \quad (y < 0) \tag{1.1}$$

$$\Delta \Phi = \gamma_2^2 \Phi_{tt} \quad (y > 0)$$

и граничным условиям ($y = 0$):

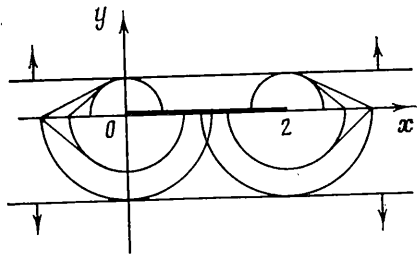
$$\sigma_{xy} = 0, \sigma_{yy} = \sigma, V = v \quad (x < 0, x > 2) \tag{1.2}$$

$$\sigma_{xy} = 0, v = v_n, V = v_n \quad (0 < x < 2)$$

Здесь v_n — перемещение полосы вдоль оси y ; эта функция является искомой. Причем, входящие в граничные условия компоненты напряжений имеют следующую зависимость от потенциалов:

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 \sigma_{xy} &= 2\varphi_{xy} + \psi_{yy} - \psi_{xx}, \gamma_1^2 \sigma_{xx} = \gamma_1^2 \varphi_{tt} - 2(\varphi_{yy} - \psi_{xy}) \\ \gamma_1^2 \sigma_{yy} &= \gamma_1^2 \varphi_{tt} - 2(\varphi_{xx} + \psi_{xy}), \sigma = k\Phi_{tt} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Падающая волна задается потенциалом $\varphi_0 = \varphi_0(t - y)$.



Фиг. 1

Для обеспечения единственности решения задачи искомые функции должны быть такими, чтобы выполнялись условия на ребрах полосы (C_1, C_2 — постоянные вектора):

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{O}(r^\epsilon); \quad \mathbf{U} = \mathbf{C}_2 + \mathbf{O}(r^\delta), \quad r \rightarrow 0 \quad (\epsilon, \delta > 0) \quad (1.4)$$

Потенциалы разыскиваются в следующем виде

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi^r + (k - \gamma_2)\varphi_0(t+y)/(k + \gamma_2) + \varphi_0(t-y) \\ \psi &= \psi^r, \quad \Phi = \Phi^r + 2\varphi_0(t - \gamma_2 y)/(k + \gamma_2) \end{aligned}$$

Здесь, члены, содержащие функцию $\varphi_0(t)$ соответствуют отраженным и преломленным потенциалам, которые являются полным решением задачи при отсутствии полосы.

Для потенциалов с индексом r (опуская далее этот индекс) из (1.2) получим граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= 0, \quad \sigma_{yy} = \sigma, \quad v = V \quad (x < 0, \quad x > 2) \\ \sigma_{xy} &= 0, \quad v = f(t), \quad V = f(t) \quad (0 < x < 2) \\ f(t) &= v_n(t) + 2\gamma_2 \varphi_0'(t)/(k + \gamma_2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнения (1.1) и условия (1.4) останутся без изменений, только начальные условия для функции φ, ψ, Φ будут нулевыми.

В качестве вспомогательной решается задача с граничными условиями (1.5), в которых $f(t)$ заменена на функцию Хевисайда $H(t)$, т. е. определяется результирующая сила, действующая на неподвижную полосу, при дифракции на ней волны

$$\varphi_0 = (k + \gamma_2)tH(t)/(2\gamma_2) \quad (1.6)$$

Рассматривая движение полосы до момента образования вторично-дифрагированных волн (т. е. для $t < 2$), можно решать задачу о неподвижной полуплоскости и определить результирующие напряжения, действующие на нее. Путем интегрирования полученных напряжений по половине ширины полосы (для напряжений, вызванных плоской волной) и от точки источника волны до фронта волны (для напряжений, вызванных цилиндрическими волнами), получим половину результирующей силы.

В задаче о напряжениях, возникающих на неподвижной полуплоскости, при падении на нее волны (1.6) искомые функции должны удовлетворять тем же уравнениям (1.1) и условиям (1.4), а также нулевым начальным условиям и граничным условиям ($y=0$):

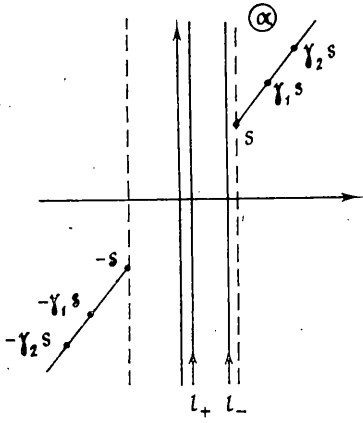
$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= 0, \quad \sigma_{yy} = \sigma, \quad v = V \quad (x < 0) \\ \sigma_{xy} &= 0, \quad v = H(t), \quad V = H(t) \quad (x > 0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Вычисление силы, действующей на полосу. Сформулированная задача решается методом Винера — Хопфа [4] с применением интегральных преобразований Лапласа по t (параметр преобразования s) и двустороннего преобразования Лапласа по x (параметр α):

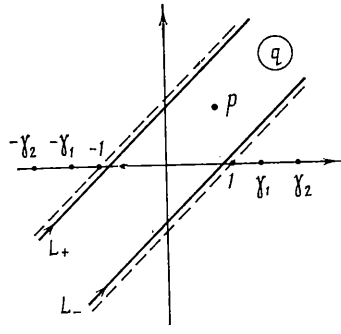
$$\bar{\Psi}(x, y; s) = \int_0^{\infty} \Psi(x, y, t) e^{-st} dt, \quad \text{Re } s > 0 \quad (2.1)$$

$$\bar{\Psi}_{\pm}^*(y; \alpha, s) = \pm \int_0^{\pm\infty} \bar{\Psi}(x, y; s) e^{-\alpha x} dx, \quad \bar{\Psi}^* = \bar{\Psi}_+^* + \bar{\Psi}_-^*$$

$$(\Psi = \varphi, \psi, \Phi, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, \sigma_{xx}, \sigma, u, v, U, V)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

При этом интегралы $\bar{\Psi}_+^*$, $\bar{\Psi}_-^*$, $\bar{\Psi}^*$ сходятся и являются аналитическими функциями α в областях $\text{Re } \alpha > 0$, $\text{Re } s > \text{Re } \alpha$ и $0 < \text{Re } \alpha < \text{Re } s$, соответственно.

Применение указанных интегральных преобразований к (1.1) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям, убывающие на бесконечности решения которых имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^* &= A_1 \exp(\beta_1 y), \quad \bar{\Psi}^* = A_2 \exp(\beta_2 y) \quad (y < 0) \\ \bar{\Phi}^* &= A_3 \exp(-\beta_3 y) \quad (y > 0) \\ \beta_i &= (\gamma_{i-1}^2 s^2 - \alpha^2)^{1/2} \quad (i=1, 2, 3), \quad (\gamma_0=1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Аргументами введенных здесь функций A_1 , A_2 , A_3 являются параметры преобразований α и s . Здесь для выделения ветвей радикалов β_i в плоскости α проведены разрезы от точек $\alpha = \pm s$, $\alpha = \pm \gamma_1 s$, $\alpha = \pm \gamma_2 s$ до бесконечности вдоль лучей $\arg \alpha = \arg s$ и $\arg \alpha = \arg s + \pi$ (фиг. 2), и считается, что при $\alpha = 0$ выполняются равенства $\beta_i = \gamma_{i-1} s$ ($i=1, 2, 3$) (при действительном и положительном s). Тогда имеют место неравенства $\text{Re } \beta_i > 0$, $i=1, 2, 3$ ($|\text{Re } \alpha| < \text{Re } s$). Картина, изображенная на фиг. 2, соответствует случаю $\gamma_1 > \gamma_2$; аналогичную картину можно построить и для случая $\gamma_2 > \gamma_1$.

Подставляя полученные решения в граничные условия (1.7), предварительно применив к ним интегральные преобразования, и исключая из системы полученных уравнений A_i , получим уравнение типа Винера — Хопфа:

$$-\Delta \bar{\sigma}_{yy+}^* (1-q^2)^{1/2} \gamma_1^4 / (sK(q)) = \bar{v}_-^* (-0) + \bar{v}_+^* (-0) \quad (2.3)$$

$$\Delta \bar{\sigma}_{yy+}^* \equiv \bar{\sigma}_+^* (+0) - \bar{\sigma}_-^* (-0), \quad q = \alpha/s$$

$$K(q) \equiv (\gamma_1^2 - 2q^2)^2 + 4q^2 (1-q^2)^{1/2} (\gamma_1^2 - q^2)^{1/2} + k \gamma_1^4 (1-q^2)^{1/2} (\gamma_2^2 - q^2)^{-1/2}. \quad (2.4)$$

В [5] доказано, что функция $K(q)$ являющаяся аналогом функции Релея для кусочно-непрерывных сред, имеет только два действительных корня. Причем, в силу четности $q = \pm \theta$, где θ — является обратной величиной безразмерной скорости волны Стоунли вдоль поверхности раздела жидкость — упругое тело.

При $q \rightarrow \infty$ асимптотика (2.4) совпадает с асимптотикой функции Релея $R(q)$: $K(q) \sim R(q) \sim -2q^2 (1-\gamma_1^2) + O(1)$, $q \rightarrow \infty$. Тогда, выражение $I(q) = K(q) [2(\gamma_1^2 - 1)(q^2 - \theta^2)]^{-1}$ при $q \rightarrow \infty$ стремится к единице и в комплексной плоскости q не имеет полюсов. Следовательно, к выражению $J = \ln I(q)$ можно применить формулу Коши, и представить функцию аналитическую в полосе $|\text{Re } \alpha| < \text{Re } s$ в виде суммы двух функций анали-

тичных в полуплоскостях: $\text{Re } \alpha < \text{Re } s(J_-)$ и $\text{Re } \alpha > -\text{Re } s(J_+)$ (линии интегрирования L_+ и L_- показаны на фиг. 3):

$$J = J_+ + J_- = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{\ln I(p)}{p-q} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{\ln I(p)}{p-q} dp$$

Деформированием контура интегрирования эти интегралы могут быть сведены к интегралам по верхнему и нужному берегам разрезов действительной оси:

$$-\pi J_{\pm} = \begin{cases} \int_1^{\gamma_2} \Lambda_1(p) dp / (p \pm q) + \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} \Lambda_2(p) dp / (p \pm q), & \gamma_2' < \gamma_1 \\ \int_1^{\gamma_1} \Lambda_1(p) dp / (p \pm q) + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Lambda_2(p) dp / (p \pm q), & \gamma_2 > \gamma_1 \end{cases}$$

$$\Lambda_1 = \text{arc tg}((A+B)/D), \quad \Lambda_2 = \text{arc tg}(A/(B+D))$$

$$\Lambda_4 = \text{arc tg}(B/(D-A)), \quad A = 4p^2(p^2-1)^{1/2} |\gamma_1^2 - p^2|^{1/2}$$

$$B = k\gamma_1^4 (p^2-1)^{1/2} |\gamma_2^2 - p^2|^{-1/2}, \quad D = (\gamma_1^2 - 2p^2)^2$$

Следовательно, (2.4) может быть представлена в виде

$$K(q) = -2(\gamma_1^2 - 1)K_+(q)K_-(q)(1-q^2)^{1/2}$$

$$K_{\pm}(q) = (\theta \pm q) \exp(J_{\pm})(1 \pm q)^{-1/2}$$

Используя это выражение, уравнение (2.3) можно переписать в виде

$$-\gamma_1^4 \Delta \bar{\sigma}_{vv+}^* [2(1-\gamma_1^2)K_+(q)]^{-1} = sK_-(q)(\bar{v}_-^*(-0) + \bar{v}_+^*(-0))$$

Факторизуем выражение $N = \bar{v}_+^* K_-$ (аналитичное в полосе $0 < \text{Re } \alpha < \text{Re } s$), т. е. представим его в виде суммы $N = N_+ + N_-$, где N_+ — аналитическая функция в полуплоскости $\text{Re } \alpha > 0$, а N_- — аналитическая в левой полуплоскости $\text{Re } \alpha < \text{Re } s$.

Проводя рассуждения аналогичные предыдущим (при этом используется формула Коши и интегрирование происходит по линиям L_+ и L_- — см. фиг. 2), легко вычислить N_+ и N_- . Например $N_+ = K_-(0)/(\alpha s)$.

Окончательно факторизованное уравнение (2.3) имеет вид

$$\gamma_1^4 \Delta \bar{\sigma}_{vv+}^* [2(1-\gamma_1^2)sK_+(q)]^{-1} + N_+ = -\bar{v}_-^* K_- - N_- \quad (2.5)$$

Из условий на ребре (1.4) и определений функций K_+ , K_- , N_+ , N_- следует, что при $\alpha \rightarrow \infty$ левая и правая части (2.5) стремятся к нулю по крайней мере как $\alpha^{-1/2}$.

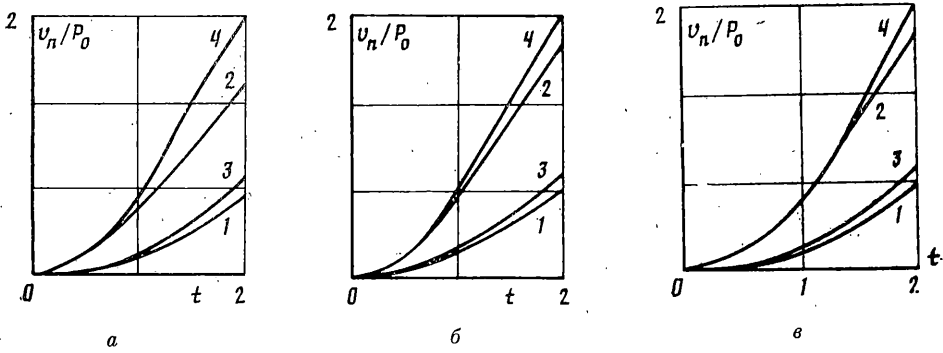
Уравнение (2.5) справедливо в полосе $0 < \text{Re } \alpha < \text{Re } s$ — общей области аналитичности правой и левой частей. Следовательно, они являются аналитическими продолжениями одной и той же функции в соответствующие полуплоскости. Эта функция — аналитическая во всей плоскости комплексной переменной α — является целой функцией, и из того, что при $\alpha \rightarrow \infty$ она стремится к нулю из теоремы Лиувилля следует тождественное ее равенство нулю. Таким образом: $\gamma_1^4 \Delta \bar{\sigma}_{vv+}^* [2(1-\gamma_1^2)sK_+]^{-1} + N_+ = 0$ или

$$\Delta \bar{\sigma}_{vv+}^* = -2(1-\gamma_1^2)K_+(q)K_-(0)/(\gamma_1^4 \alpha).$$

Используя определения функций K_+ , K_- , последнее выражение можно переписать в виде

$$\Delta \bar{\sigma}_{vv+}^* = \Delta \bar{\sigma}_{vv1}^* + \Delta \bar{\sigma}_{vv2}^*, \quad \Delta \bar{\sigma}_{vv1}^* = -(k + \gamma_2)/(\alpha \gamma_2)$$

$$\Delta \bar{\sigma}_{vv2}^* = -(k + \gamma_2)[K_+(q)/K_-(0) - 1]/(\alpha \gamma_2)$$



Фиг. 4

Первая часть скачка напряжений легко обращается:

$$\Delta\sigma_{yy1} = -(k + \gamma_2) \delta(t) / \gamma_2 \quad (2.6)$$

При вычислении $\Delta\sigma_{yy2}$ воспользуемся свойством преобразования Лапласа

$$\Delta\bar{\sigma}_{yy2}^* = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \int_0^{\infty} e^{-st} \Delta\sigma_{yy2}(x, 0, t) dt$$

В пределе при $\alpha \rightarrow 0$ это выражение дает изображение Лапласа по t результирующей силы $R_2(t)$, возникающей от второй составляющей перепада напряжений. Следовательно

$$\bar{R}_2(s) = -Cs(k + \gamma_2) / (2\gamma_2), \quad C = 2K_+'(0) / K_-(0) \quad (2.7)$$

Легко видеть, что (2.6) соответствует перепаду напряжений, вызванному плоской волной, поэтому, чтобы получить результирующую силу надо это выражение проинтегрировать от 0 до 1: $R_1(t) = -(k + \gamma_2) \delta(t) / \gamma_2$. Обратное преобразование (2.7) по s даст результат: $R_2(t) = -(k + \gamma_2) CH(t) / (2\gamma_2)$.

Сумма R_1 и R_2 дает половину результирующей силы, возникающей на неподвижной полосе конечной ширины: $R_h(t) = 2(R_1 + R_2) = -(k + \gamma_2) \times \times [2\delta(t) + CH(t)] / \gamma_2$.

Используя интеграл Дюамеля $R(t) = \int_0^t f'(t - \tau) R_h(\tau) d\tau$, получим результирующую силу, действующую на подвижную полосу конечной ширины для произвольной падающей волны:

$$-R(t) = (2v_n' + Cv_n)(k + \gamma_2) / \gamma_2 + 4\varphi_0'' + 2C\varphi_0'$$

3. Закон движения полосы. С учетом последнего выражения уравнение движения полосы $[m / (\rho l^2)] v_n'' = R(t)$ (где m , ρ , l — размерные величины, равные погонной массе полосы, плотности упругой среды и половине ширины полосы, соответственно) можно переписать в виде

$$v_n'' + 2a\varepsilon v_n' + a\varepsilon C v_n = -\varepsilon\varphi_0'' - \varepsilon C\varphi_0' / 2 \quad (3.1)$$

$$a = (k + \gamma_2) / (4\gamma_2), \quad \varepsilon = 4\rho l^2 / m$$

Уравнение (3.1) решается при начальных условиях $v_n'(0) = 0$, $v_n(0) = 0$.

Для падающей волны $\varphi_0 = -P_0 t^2 H(t) / 2$, соответствующей ступеньке напряжения P_0 , решение (3.1) легко выписывается:

$$v_n = P_0 [t - (a\varepsilon\beta)^{-1} e^{-a\varepsilon t} \text{sh}(a\varepsilon\beta t)] / (2a) \quad (3.2)$$

$$\beta = [1 - C / (a\varepsilon)]^{1/2}, \quad C = 2/\theta - 1 + J_+'(0)$$

На фиг. 4 приведены графики зависимости перемещения полосы от времени по формуле (3.2) для различных вариантов сред: (а) лед-вода (кривые 1, 2), лед-воздух (3, 4); (б) сланец-вода (1, 2), сланец-воздух (3, 4); (в) мрамор-вода (1, 2), мрамор-воздух (3, 4). Четные номера кривых соответствуют случаю $\epsilon=2$, нечетные случаю $\epsilon=0,5$.

Для этих упругих сред (используя решение (3.2) показано, что учет воздуха над упругим полупространством очень мало влияет на движение полосы по сравнению со случаем его отсутствия (отклонение не превышает 5%).

В заключение автор выражает признательность М. Ш. Исраилову за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Freund L. B., Achenbach J. D. Diffraction of a plane pulse by a semi-infinite barrier at a fluid-solid interface // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1967. V. 34. № 3. P. 571-579.
2. Флигман Л. М. О движении под действием сейсмической волны жесткой массивной полосы, лежащей на упругом полупространстве // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 1043-1058.
3. Chou P. C., Kiesel H. A Note on Helmholtz's theorem for piecewise differentiable functions in infinite domains // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1970. V. 37. № 1. P. 195-196.
4. Нобл Б. Применение метода Винера - Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 280 с.
5. Roever W. L., Vining T. F., Strick E. Propagation of elastic wave motion from an impulsive source along a fluid-solid interface: I-III. The pseudo-rayleigh wave // Phil. Trans. Royal. Soc. London, ser. A. 1959. V. 251. № 1000. P. 455-523.

Ташкент

Поступила в редакцию
26.V.1988