

УДК 533.6.013.42

© 1990 г.

В. В. ДЫХТА, Я. И. КУНЕЦ, А. П. ПОДДУБНЯК

## ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ИМПУЛЬСОВ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ С ОТВЕРСТИЕМ

Рассматривается задача осесимметричного рассеяния акустических волн давления упругим сферическим резонатором с круговым отверстием. Движение оболочки описывается по теории типа Кирхгофа — Лява. Предполагается, что край отверстия жестко закреплен или свободно колеблется в жидкости. С помощью интегрального преобразования Фурье по времени, метода ортогональных полиномов Лежандра и теории парных сумматорных уравнений задача сведена к квазирегулярной системе линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка относительно спектральных плотностей рассеянных волн, решение которой получено численным путем методом редукции. Проанализированы особенности амплитуды рассеяния, характеристик направленности и обратно отраженных эхо-сигналов в зависимости от геометрических и физико-механических параметров резонатора при жестком закреплении края отверстия.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Задача излучения и рассеяния волн сферическим резонатором с отверстием изучалась в электромагнитном и акустическом случаях преимущественно в стационарной постановке. При этом большое внимание уделялось методам построения и обоснования аналитических решений в виде суперпозиции стоячих волн [1–5], а также анализу интегральных и резонансных характеристик переизлученных волновых полей [1, 3, 4, 7–9]. Однако, материальные свойства резонаторов и их влияние на дифракционные процессы не учитывались. Ниже анализируются особенности гидроакустического рассеяния звука сферическим резонатором как в гармоническом, так и в нестационарном режимах в предположении, что рассеиватель представляет собой тонкую упругую оболочку.

Пусть в безграничной акустической среде со скоростью звука  $c$  и плотностью  $\rho$  находится тонкая упругая сферическая оболочка толщиной  $2h$  с круговым отверстием, занимающая область  $1-\delta \leq r \leq 1+\delta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ , где  $r, \theta$  — безразмерные сферические координаты с началом отсчета в центре резонатора, отнесенные к радиусу  $a$  срединной поверхности оболочки,  $\theta_0$  — угол раскрытия отверстия,  $\delta = h/a$ . На оболочку набегают звуковой импульс  $p^{(0)}(r, \theta, \tau) = p_* l_{10}^{-1} f(\tau - l_{10})$ , генерируемый точечным источником, сосредоточенным на оси симметрии резонатора при  $r = l_0, \theta = \pi$ , где  $f(\tau) = 0, \tau \leq 0, p_*$  — постоянная, нормирующая акустическое давление,  $l_{10} = (l_0^2 + r^2 + 2l_0 r \cos \theta)^{1/2}, \tau = ct/a, t$  — время.

Давления в рассеянной звуковой волне внутри резонатора  $p^{(1)} (r \leq 1)$  и во внешней среде  $p^{(2)} (r \geq 1)$ , удовлетворяют волновому уравнению. Динамические процессы в упругой оболочке с модулем Юнга  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и плотностью  $\rho_1$  описываются с помощью тангенциальных и нормальных перемещений  $u_0, w_0$  срединной линии оболочки, определяемых из уравнений Кирхгофа — Лява [10, 11, 12]:

$$M_{11}u_0 + M_{12}w_0 = 0, \quad M_{21}u_0 + M_{22}w_0 + Q_0 = 0 \quad (1.1)$$

$$M_{11} = (1 + \varepsilon)M_2 - \partial^2 / \partial \tau_{10}^2, \quad M_{21} = -(1 + \nu) (\partial / \partial \theta + \text{ctg} \theta) + \varepsilon M_1$$

$$M_{12} = (1 + \nu - \varepsilon M_2) \partial / \partial \theta, \quad M_{22} = -2(1 + \nu) - \varepsilon M_1 \partial / \partial \theta - \partial^2 / \partial \tau_{10}^2$$

$$M_1 = \partial^3 / \partial \theta^3 + 2 \text{ctg} \theta \partial^2 / \partial \theta^2 - (1 + \nu + \text{ctg}^2 \theta) \partial / \partial \theta + (2 - \nu + \text{ctg}^2 \theta) \text{ctg} \theta$$

$$M_2 = \partial^2 / \partial \theta^2 + \operatorname{ctg} \theta \partial / \partial \theta - \operatorname{ctg}^2 \theta - \nu, \quad Q_0 = a\alpha(p^{(1)} - p^{(2)} - p^{(0)})$$

$$\tau_{10} = \beta\tau, \quad \beta = c_1/c, \quad \alpha = (2\delta\rho_1 c_1^2)^{-1}, \quad c_1 = [E\rho_1^{-1}(1-\nu^2)^{-1}]^{1/2}, \quad \varepsilon = \delta^2/3$$

Искомые характеристики должны удовлетворять принципу причинности, условиям ограниченности потока мощности в особых точках (край оболочки) и непрерывности на поверхности раздела подобластей  $r=1$ :

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} = -\frac{a}{\rho c^2} \frac{\partial}{\partial r} p^{(1)} = -\frac{a}{\rho c^2} \frac{\partial}{\partial r} (p^{(2)} + p^{(0)}) \quad (0 \leq \theta < \pi - \theta_0) \quad (1.2)$$

$$p^{(1)} = p^{(2)} + p^{(0)}, \quad \frac{\partial}{\partial r} p^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r} (p^{(2)} + p^{(0)}) \quad (\pi - \theta_0 < \theta \leq \pi)$$

К этим соотношениям следует добавить краевые условия на контуре отверстия, которые в случае жесткого закрепления имеют вид

$$u_0 = w_0 = \partial w_0 / \partial \theta = 0, \quad \theta = \pi - \theta_0 \quad (1.3)$$

а при свободном контуре оболочки в жидкости записываются в форме ( $\theta = \pi - \theta_0$ ):

$$Q = 0, \quad p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(0)} = T_1 / (a^2 \delta) \quad (1.4)$$

$$-\frac{a}{2\rho c^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(0)}) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2}$$

где  $T_1$  и  $Q$  — соответствующие тангенциальные и перерезывающие усилия [10].

Для решения задачи используем метод интегрального преобразования Фурье по времени. Тогда фурье-плотности для акустических давлений падающего и рассеянного полей представим в виде разложений по парциальным волнам

$$p^{(0)}(r, \theta, \omega) = p_* \sum_{l=0}^{\infty} g_l(\omega) j_l(\omega r) P_l(\cos \theta), \quad (1.5)$$

$$p^{(1)}(r, \theta, \omega) = p_* \sum_{l=0}^{\infty} e_l^{(1)}(\omega) j_l(\omega r) P_l(\cos \theta)$$

$$p^{(2)}(r, \theta, \omega) = p_* \sum_{l=0}^{\infty} e_l^{(2)}(\omega) h_l^{(1)}(\omega r) P_l(\cos \theta)$$

$$g_l(\omega) = i\omega l_0 f(\omega) (-1)^l (2l+1) h_l^{(1)}(\omega l_0)$$

Здесь  $\omega$  — параметр преобразования Фурье (безразмерная частота),  $j_l(x)$ ,  $h_l^{(1)}(x)$  — сферические функции Бесселя первого и третьего рода,  $P_l(x)$  — полином Лежандра,  $f(\omega)$  — фурье-трансформанта импульса  $f(\tau)$ ,  $e_l^{(1,2)}(\omega)$  — спектральные плотности разложений фурье-преобразований  $p^{(1,2)}(r, \theta, \omega)$ , подлежащие определению.

Из условий непрерывности производных по радиальной переменной от давлений на поверхности сферы  $r=1$  (1.2) получаем

$$e_l^{(1)}(\omega) - g_l(\omega) = e_l^{(2)}(\omega) h_l^{(1)'}(\omega) / j_l'(\omega) \quad (1.6)$$

Преобразования Фурье перемещений срединной поверхности оболочки также представим в виде разложений по полиномам Лежандра

$$u_0(\theta, \omega) = u_1^*(\theta, \omega) + u_1(\theta, \omega), \quad w_0(\theta, \omega) = w_1^*(\theta, \omega) + w_1(\theta, \omega) \quad (1.7)$$

$$u_1^*(\theta, \omega) = a \sum_{l=0}^{\infty} u_l(\omega) \frac{d}{d\theta} P_l(\cos \theta), \quad w_1^*(\theta, \omega) = a \sum_{l=0}^{\infty} w_l(\omega) P_l(\cos \theta)$$

$$\begin{aligned}
u_l(\omega) &= p_* \alpha i c_{12l} e_l^{(2)}(\omega) / (\omega^2 \Delta_l j_l'(\omega)), \\
w_l(\omega) &= -p_* \alpha i c_{11l} e_l^{(2)}(\omega) / (\omega^2 \Delta_l j_l'(\omega)) \\
\Delta_l &= c_{11l} c_{22l} - c_{12l} c_{21l}, \quad c_{11l} = (1 + \varepsilon)(1 - \nu - L) + \omega_0^2 \\
c_{12l} &= 1 + \nu + \varepsilon(L - 1 + \nu), \quad c_{21l} = (1 + \nu)L + \varepsilon L(L - 1 + \nu) \\
c_{22l} &= -2(1 + \nu) - \varepsilon L(L - 1 + \nu) + \omega_0^2, \quad \omega_0 = \omega / \beta, \quad L = l(l + 1)
\end{aligned}$$

где  $u_l^*(\theta, \omega)$ ,  $w_l^*(\theta, \omega)$  — решения, удовлетворяющие уравнениям (1.1) на промежутке  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Решения  $u_l$ ,  $w_l$  однородной системы (1.1), полученные при  $Q_0 = 0$ , введены для компенсации невязки, которую вносят функции  $u_l^*$ ,  $w_l^*$  в условия закрепления оболочки (1.3) или (1.4), и представляются в виде [13, 14]:

$$\begin{aligned}
u_l(\theta, \omega) &= a \sum_{n=1}^3 u_{ln}(\omega) \frac{d}{d\theta} P_{ln}(\cos \theta), \quad w_l(\theta, \omega) = a \sum_{n=1}^3 w_{ln}(\omega) P_{ln}(\cos \theta) \\
w_{ln}(\omega) &= -u_{ln}(\omega) c_{11\lambda} / c_{12\lambda}, \quad \lambda = l_n
\end{aligned}
\tag{1.8}$$

Индексы  $l_n$  сферической функции Лежандра  $P_{ln}(x)$  определяются из кубического уравнения

$$\begin{aligned}
a_3 L_n^3 + a_2 L_n^2 + a_1 L_n + a_0 &= 0 \\
L_n &= l_n(l_n + 1), \quad a_3 = \varepsilon, \quad a_2 = -\varepsilon(4 + \omega_0^2) \\
a_1 &= 1 - \nu^2 - \omega_0^2 + (4 - \nu \omega_0^2) \varepsilon \\
a_0 &= 2\nu^2 - 2 - \omega_0^2(1 + 3\nu) + \omega_0^4 + \varepsilon(1 - \nu)(\omega_0^2 - 2 - 2\nu)
\end{aligned}
\tag{1.9}$$

детальное исследование которого при  $\varepsilon \ll 1$  дано в [13].

Относительно возможности представления решений  $u_0$  и  $w_0$  в виде (1.7) и гладкости функций  $u_l^*$  и  $w_l^*$  отметим следующее. Поскольку решение задачи определяется в классе функций, обеспечивающем выполнение условий принципа причинности и ограниченности потока мощности на крае оболочки, то, используя методику и результаты из [3, 15], найдем, что  $Q_0$  (см. (1.1)) является непрерывной функцией на всем отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$ , причем ряд  $\sum [e_l^{(2)}(\omega) / j_l'(\omega)]^2 < \infty$ . Кроме того, с учетом асимптотического поведения коэффициентов  $u_l$ ,  $w_l$  при  $l \rightarrow \infty$ , теорем, связывающих гладкость функции со скоростью убывания ее коэффициентов Фурье [16] и теорем о дифференцируемости функциональных рядов [17], несложно показать, что  $u_l^*(\theta, \omega)$ ,  $w_l^*(\theta, \omega)$  непрерывны и имеют непрерывные производные вплоть до второго и третьего порядков соответственно. Таким образом, с помощью  $u_0$  и  $w_0$ , принятых в форме (1.7), можно удовлетворить систему дифференциальных уравнений (1.1) и условия (1.3) или (1.4).

Исходя из уравнений колебания оболочек (1.1), на основании соотношений (1.5)–(1.8) получим парные сумматорные уравнения для определения неизвестных коэффициентов разложений

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty} \left\{ e_l^{(2)}(\omega) \left[ h_l^{(1)'}(\omega) + \frac{\alpha i \rho c^2 c_{11l}}{\omega \Delta_l j_l'(\omega)} \right] + g_l(\omega) j_l'(\omega) \right\} P_{ln}(\cos \theta) - \\
- \omega \rho c^2 \sum_{n=1}^3 w_{ln}(\omega) P_{ln}(\cos \theta) = 0 \quad (0 \leq \theta < \pi - \theta_0) \\
\sum_{l=0}^{\infty} \frac{e_l^{(2)}(\omega)}{j_l'(\omega)} P_{ln}(\cos \theta) = 0 \quad (\pi - \theta_0 < \theta \leq \pi)
\end{aligned}
\tag{1.10}$$

Применив к этим уравнениям метод полуобращения [2, 3, 9], получим систему линейных алгебраических уравнений бесконечного

порядка

$$\pi x_l + \sum_{m=0}^{\infty} a_{lm} x_m + \sum_{n=1}^3 a_{ln} w_{ln} = \pi b_l \quad (l=0, 1, 2, \dots) \quad (1.11)$$

$$x_l = b_l + e_l^{(2)}(\omega) / j_l'(\omega), \quad b_l = F_l / \mu_l \quad (1.12)$$

$$F_l = 4(-1)^{l+1} l_0 \omega^4 f(\omega) h_l^{(4)}(\omega l_0) j_l'(\omega)$$

$$\mu_l = 1 + \frac{4i\omega^3}{2l+1} j_l'(\omega) h_l^{(4)'}(\omega) - \frac{4\alpha\rho c^2 \omega^2 c_{11l}}{(2l+1)\Delta_l}$$

$$a_{lm} = -\mu_m \alpha_{lm}, \quad \theta_1 = \pi - \theta_0$$

$$\alpha_{lm} = \frac{\sin[\theta_1(l-m)]}{l-m} - \frac{\sin[\theta_1(l+m+1)]}{l+m+1}, \quad l \neq m$$

$$\alpha_{lm} = \theta_1 - (2l+1)^{-1} \sin[\theta_1(2l+1)] \quad (l=m)$$

$$a_{ln}^{-1} = \frac{8i\rho c^2 \omega^4}{2ln+1} \int_0^{\theta_1} \sin\left[\left(ln + \frac{1}{2}\right)\theta\right] \sin\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta$$

Система (1.11) замыкается тремя уравнениями, полученными из условий закрепления края оболочки (1.3) или (1.4). Подставляя в (1.3) выражения для  $p^{(j)}$ ,  $u_0$ ,  $w_0$  (1.5), (1.7) с учетом (1.12) в случае жесткого закрепления найдем

$$\sum_{m=1}^3 d_{jm}^{-1} w_{jm} + \sum_{l=0}^{\infty} d_{jl}^{-2} x_l = \sum_{l=0}^{\infty} d_{jl}^{-3} b_l \quad (j=1, 2, 3) \quad (1.13)$$

$$d_{jl}^{-2} = d_{jl}^{-3} = \gamma_l^j dP_l(\cos \theta_1) / d\theta_1 \quad (j=1, 2) \quad (1.14)$$

$$d_{3l}^{-2} = d_{3l}^{-3} = \gamma_l^3 P_l(\cos \theta_1), \quad d_{2m}^{-1} = \gamma_m^3 d_{1m}^{-1} = \gamma_m^3 dP_\lambda(\cos \theta_1) / d\theta_1$$

$$d_{m3}^{-1} = P_\lambda(\cos \theta_1), \quad \lambda = l_m$$

$$\gamma_l^j = (-1)^j \alpha i \omega^{-2} c_{1jl} \Delta_l^{-1} \quad (j=1, 2), \quad \gamma_m^3 = -c_{12\lambda} / c_{11\lambda}$$

Если же край оболочки колеблется в жидкости свободно, то из (1.4) также приходим к соотношениям (1.13), но при этом коэффициенты определяются по формулам

$$d_{1m}^{-1} = [\lambda(\lambda+1) + \nu - 1] (\gamma_m^3 - 1) dP_\lambda(\cos \theta_1) / d\theta_1 \quad (1.15)$$

$$d_{1l}^{-2} = d_{1l}^{-3} = [l(l+1) + \nu - 1] (\gamma_l^2 - \gamma_l^1) dP_l(\cos \theta_1) / d\theta_1$$

$$d_{2m}^{-1} = 2\gamma_m^3 dP_\lambda(\cos \theta_1) / d\theta_1, \quad d_{2l}^{-2} = d_{2l}^{-3} - g_l(\omega) j_l(\omega) \times$$

$$\times b_l^{-1} dP_l(\cos \theta_1) / d\theta_1 = \{2\gamma_l^2 - [h_l^{(4)}(\omega) j_l(\omega)]' \omega^{-2} \beta^{-1}\} dP_l(\cos \theta_1) / d\theta_1$$

$$d_{3m}^{-1} = \gamma_m^3 (\nu - 1) \operatorname{ctg} \theta_1 dP_\lambda(\cos \theta_1) / d\theta_1 - [\gamma_m^3 \lambda(\lambda+1) - 1 - \nu] P_\lambda(\cos \theta_1)$$

$$\lambda = l_m, \quad d_{3l}^{-2} = d_{3l}^{-3} - (1 - \nu^2) E^{-1} g_l(\omega) j_l(\omega) P_l(\cos \theta_1) / b_l =$$

$$= \gamma_l^2 (\nu - 1) \operatorname{ctg} \theta_1 dP_l(\cos \theta_1) / d\theta_1 -$$

$$- \{ \gamma_l^2 l(l+1) - \gamma_l^1 (1 + \nu) + 1/2 (1 - \nu^2) E^{-1} [h_l^{(4)}(\omega) j_l(\omega)]' \} P_l(\cos \theta_1)$$

а  $\gamma_l^j$  ( $j=1, 2$ ),  $\gamma_m^3$  по-прежнему выражаются соотношениями (1.14).

Система линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка (1.11), (1.13) при обоих случаях закрепления края оболочки является квазиволномерегулярной и полностью определяет неизвестные коэффициенты  $w_{lm}$  ( $m=1, 2, 3$ ),  $x_l$  ( $l=0, 1, \dots$ ). Покажем ее квазиволномерегулярность, например, при жестком закреплении. Учитывая результаты [9] из (1.12), (1.14) получаем следующие оценки:

$$\mu_m = O(m^{-1}), \quad \gamma_m^j = O(m^{-4}) \quad (j=1, 2; m \rightarrow \infty) \quad (1.16)$$

Исходя также из асимптотических разложений для функций Лежандра, сферических функций Ханкеля и Бесселя при больших индексах, несложно показать, что

$$a_{ln} \rightarrow 0, \quad b_l \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty, \quad \sum_{l=0}^{\infty} |d_{jl}| < \infty \quad (j=1, 2, 3)$$

Далее, из (1.16) следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{lm}| \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty)$$

Таким образом, из приведенных выше соотношений можно сделать вывод, что система (1.11), (1.13) квазивполнерегулярна [18]. Аналогичное доказательство можно привести и в случае свободного контакта края оболочки и жидкости.

**2. Предельный переход к замкнутой сферической оболочке.** Из уравнений (1.11), (1.13) можно получить соотношения для определения эхо-сигнала от замкнутой сферической оболочки, жестко закрепленной в полюсе  $\theta = \pi$ .

При  $\theta_0 \rightarrow 0$  функции Лежандра обладают следующей асимптотикой [19]:

$$P_{\mu}(-\cos \theta_0) \sim \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{1 - \cos \theta_0}{2} \right) - k_0(\mu) \right] + O(\theta_0^2 \ln \theta_0) \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{d\theta_0} P_{\mu}(-\cos \theta_0) \sim \frac{4 \sin(\pi\mu)}{\pi\theta_0} + O(\theta_0 \ln \theta_0)$$

$$k_0 = -\psi(-\mu) - \psi(1+\mu) - 2C$$

где  $\psi(\mu)$  — пси-функция Эйлера,  $C$  — постоянная Эйлера. Учитывая (2.1) и переходя в (1.13) к пределу  $\theta_0 \rightarrow 0$ , получим

$$\sum_{m=1}^3 w_{2m} = 0, \quad \sum_{m=1}^3 \gamma_m^3 w_{2m} = 0, \quad w_{2m} = \sin(\pi l_m) w_{1m} \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^3 k_0(l_m) w_{2m} - \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \gamma_l^l x_l = - \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \gamma_l^l b_l$$

Из (1.11) при  $\theta_0 = 0$  получаем

$$x_l = \frac{1}{\pi(\mu_l - 1)} \left[ \sum_{m=1}^3 a_{lm}^l w_{1m} - b_l \right] \quad (2.3)$$

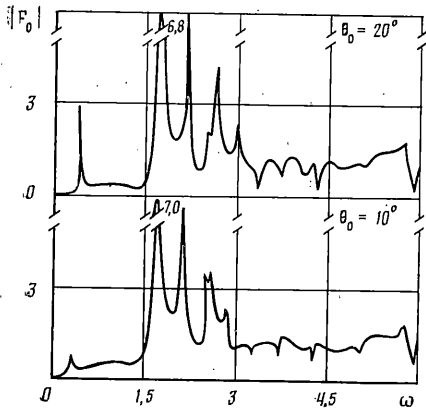
Исходя из (2.2), (2.3) найдем систему линейных алгебраических уравнений для определения  $w_{2m}$  ( $m=1, 2, 3$ ):

$$\sum_{m=1}^3 \beta_{jm} w_{2m} = f_j \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.4)$$

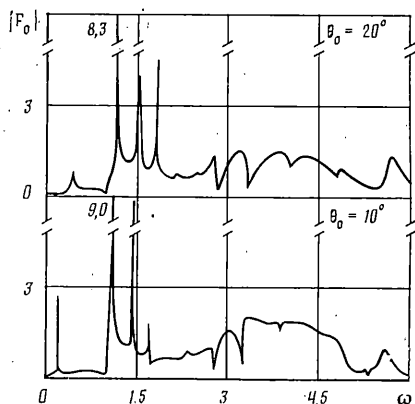
$$\beta_{1m} = -\frac{1}{\pi} k_0(l_m) + \frac{1}{\pi \sin(\pi l_m)} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \gamma_l^l a_{lm}^l \frac{1}{\mu_l - 1}$$

$$\beta_{2m} = \gamma_m^3, \quad \beta_{3m} = 1, \quad f_2 = f_3 = 0$$

$$f_1 = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \gamma_l^l \frac{1}{\mu_l - 1} F_l$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Зная  $w_{2m}$ ,  $w_{1m}$  по формулам (2.3) определяем неизвестные коэффициенты разложения  $x_i$ . Характерной особенностью соотношения (2.3) является наличие суммы, которая в случае замкнутой незакрепленной оболочки [20] отсутствует.

**3. Анализ спектральных и импульсных характеристик эхо-сигнала.** Численное решение квазиволномерегулярной системы линейных алгебраических уравнений (1.11), (1.13) получено методом редукции [18]. Подбор порядка редуцируемой системы  $N$  осуществляется путем численного эксперимента. Установлено, что для всех рассматриваемых углов раскрытия отверстия ( $0^\circ \leq \theta_0 \leq 135^\circ$ ) количество уравнений можно выбрать следующим образом:  $N=9$  при  $0 < \omega \leq 2$ ,  $N=E(2\omega)+3$  при  $2 < \omega \leq 10$ ,  $N=-E(1,5\omega)+3$  при  $10 < \omega \leq 35$ , где  $E(x)$  — целая часть  $x$ . При этом погрешность расчетов не превышает 10%.

На фиг. 1, 2 приведены модули амплитуд рассеяния  $F_0(\omega, \theta) = 2rp^{(2)}(r, \theta, \omega) \cdot \exp(2-r-l_0)/p_*$ ,  $r \gg 1$ ,  $l_0 \gg 1$ , вычисленные в локационном направлении ( $\theta = \pi$ ) [12]:

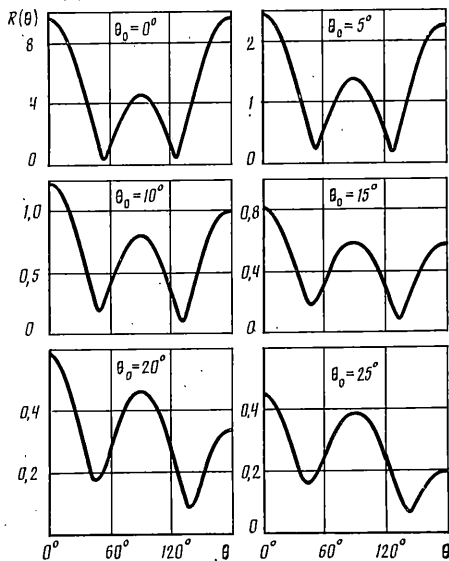
$$F_0(\omega, \theta) = \frac{2}{\omega} \sum_{l=0}^{\infty} e_l^{(2)}(\omega) i^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$$

для стальной и дюралюминиевой оболочек ( $E=2,12 \times 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu=0,29$ ,  $\rho_1=7700$  кг/м<sup>3</sup>;  $E=6,76 \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu=0,36$ ,  $\rho_1=2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\delta=0,025$ ) соответственно, окруженных водой ( $\rho=1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c=1410$  м/с). Предполагается, что на оболочку воздействует слабая ударная волна  $f(\tau) = \exp(-\alpha_0 \tau) H(\tau)$  от источника, находящегося от центра оболочки на расстоянии  $l_0=10$ , где  $H(\tau)$  — функция Хевисайда,  $\alpha_0$  — параметр, характеризующий скорость угасания падающего импульса.

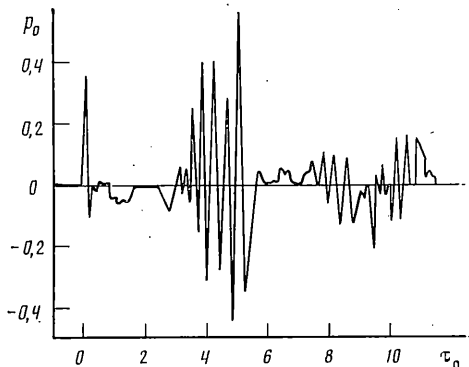
Результаты, представленные на фиг. 1, 2, показывают, что наличие отверстия значительно усложняет спектр рассеянного поля за счет дифракции волн на отверстии и переотражения сигналов внутри оболочки. При небольших отверстиях появляются дополнительные высокодобротные резонансы амплитуды рассеяния в диапазоне низких частот. Из графиков следует, что изменения в размере раскрытия резонатора проявляются в большей степени на амплитуде спектральных линий, чем на их сдвиге в частотной полосе.

На фиг. 3 представлены характеристики направленности рассеянного стационарного поля акустического давления  $R(\theta) = |F_0(\omega, \theta)|$  от дюралюминиевой оболочки той же толщины с различными раскрытиями отверстия. Безразмерная частота  $\omega = 1,0708$ , при которой проведены вычисления, соответствует размещению низшего резонанса частотной зависимости модуля функции  $F_0$  для замкнутой, заземленной в полюсе  $\theta = \pi$  оболочки. Во всех случаях края оболочки жестко заземлены. Характеристики направленности иллюстрируют резкий спад амплитуды и изменение перераспределения акустического давления в пространстве, связанное с увеличением размера отверстия резонатора, т. е. со сдвигом спектральной линии, соответствующей в данном случае колебаниям оболочки безмоментной моды ( $2\omega\delta=0,05$ ) [20].

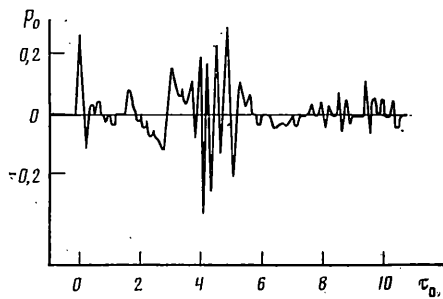
На фиг. 4, 5 изображены нестационарные эхо-сигналы, отраженные от стальной и дюралюминиевой оболочек, соответственно, с приведенными выше параметрами. Предполагается, что точка наблюдения находится на оси симметрии рассеивателя  $r \gg l_0=10$ ,  $\theta=180^\circ$ . Постоянная угасания первичного сигнала (3.2)  $\alpha_0=10$ . Угол раскрытия обоих резонаторов  $\theta_0=10^\circ$ . Начало отсчета эхо-сигнала совпадает с моментом касания падающей волны полюса оболочки ( $\tau_0 = \tau - r - l_0 + 2$ ).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Вычисления проводятся, следуя методике, изложенной в [12] по формуле

$$p_0(\tau_0) = 2rp^{(2)}(r, \theta, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_*} [Q_1(\omega) \cos(\omega\tau_0) - Q_2(\omega) \sin(\omega\tau_0)] d\omega$$

$$Q_1(\omega) = \text{Re}[f(\omega)F_0(\omega, \theta)], \quad Q_2(\omega) = \text{Im}[f(\omega)F_0(\omega, \theta)], \quad r \gg 1$$

Путем численного эксперимента можно показать, что для  $\alpha_0 \geq 10$  достаточно принять  $\omega_* = 35$ .

Анализ эхо-импульсов по времени задержки показывает, что волновой пакет образуется вследствие суперпозиции импульса (с обратной фазой), зеркально отраженного от тыльной поверхности внутри резонатора, и импульсов, переизлученных поверхностными волнами (безмоментного типа) оболочки. Кроме того, весомый вклад вносят слабо затухающие волны, переотраженные на стенках внутри резонатора. Наиболее интенсивный эхо-импульс дополняется предвестником, переизлученным на защемленном крае отверстия. Следует отметить, что отклик от стального резонатора более интенсивный, чем от дюралюминиевого.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радин А. М., Резуненко В. А., Шестопалов В. П. Излучение волн сферой с круговым отверстием // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1977. Т. 17. № 2. С. 394–406.
2. Радин А. М., Шестопалов В. П. Дифракция волн на сфере с отверстиями // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. № 4. С. 838–841.
3. Радин А. М., Шестопалов В. П. Дифракция плоской волны на сфере с круговым отверстием // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 5. С. 1232–1243.
4. Collins W. D. Some scalar diffraction problems for a spherical cap // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1962. V. 10. No. 3. P. 249–266.
5. Jain D. L., Kanwal R. P. Acoustic diffraction by a rigid annular spherical cap // Pap. ASME. 1971. No. APM-CCC, 9 p.
6. Miles J. W. Scattering by a spherical cap // J. Acoust. Soc. Amer., 1971. V. 50. No. 3. P. 892–903.
7. Павлов Б. С., Фаддеев М. Д. О рассеянии на полой резонаторе с малым отверстием // (Записки научн. семин. ЛОМИ: Исследования по линейным операторам и теории функций. XII. 1983. Т. 126). С. 159–169.
8. Дыхта В. В. Дифракция акустических волн на жесткой сферической оболочке с круговым отверстием и идеальной поверхностью // Физико-механические про-

- цессы при высоковольтном разряде в жидкости. Киев: Наук. думка, 1980. С. 134–143.
9. *Виноградов С. С., Шестопапов В. П.* Строгая теория рассеяния волн на сфере с отверстием (резонатор Гельмгольца) // IX Всесоюз. акуст. конференция. 1977. Секц. А. М.: 1977. С. 79–81.
  10. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
  11. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
  12. *Низул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э.* Эхо-сигналы от упругих объектов. Т. 2. Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР, 1974. 345 с.
  13. *Базилевский С. В.* Асимптотические приближения для решений уравнений колебаний сферической оболочки // Изв. АН АрмССР. Механика. 1980. Т. 33. № 6. С. 54–64.
  14. *Лизарев А. Д., Ростанина Н. Б.* Колебания металлополимерных и однородных сферических оболочек. Минск: Наука и техника, 1984. 192 с.
  15. *Хёна Х., Мауз А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
  16. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958. 507 с.
  17. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. I. М.: Выш. шк., 1973. 614 с.
  18. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 695 с.
  19. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1973. 294 с.
  20. *Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Стулов А. С.* Дифракция акустических импульсов на упругих телах. М.: Наука, 1979.

Николаев, Львов

Поступила в редакцию  
7.IX.1988