МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1990

УДК 533.6.013.42

В. Г. БОГОМОЛОВ, В. Б. ПОРУЧИКОВ

ДИНАМИКА УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ

Исследованиям по гидроупругости, начатым в 50-е годы, посвящены многочисленные работы. Список публикаций по этой тематике содержится в [1–4]. В последние два десятилетия с помощью численных расчетов решений ряда задач гидроупругости, основанных на использовании модели Кирхгофа – Лява при описании оболочек и акустического приближения для жидкости, было обнаружено [5–7] существование слабо затухающих колебаний тонких сферических и цилиндрических оболочек в жидкости. Аналитические исследования, подтвердившие существование таких колебаний для моделей оболочек в рамках гипотез Кирхгофа – Лява, проводились в [4, 8–10] и других [1].

В настоящей работе получено и исследовано точное аналитическое решение задачи о взаимодействии тонкой сферической оболочки, описываемой уравнениями типа Тимошенко, с окружающей её акустической жидкостью. В рамках этой модели доказано существование слабо затухающих колебаний оболочки в жидкости.

1. Постановка задачи. В рамках оболочечных уравнений типа Тимошенко [2], учитывающих инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига, в линейном приближении осесимметричное движение в акустической жидкости тонкой упругой сферической оболочки, подверженной воздействию нестационарной падающей волны избыточного давления $p_i'=p_i'(r', \theta, t)$ и поверхностной нагрузки с интенсивностью $q'=q'(\theta, t)$, описывается в безразмерных переменных в подвижной системе координат следующей системой уравнений, граничных и начальных условий

$$[\nabla^2-(\nu+\mathrm{ctg}^2\theta)-\varkappa-(1+\varepsilon)\gamma\partial^2/\partial\tau^2]V+ \\ +[\varkappa-2\varepsilon\gamma\partial^2/\partial\tau^2]\Psi-[(1+\nu+\varkappa)\partial/\partial\theta]W=0 \tag{1.1}$$

$$[\varkappa-2\varepsilon\gamma\partial^2/\partial\tau^2]V+[\varepsilon(\nabla^2-\mathrm{ctg}^2\theta-\nu-\gamma\partial^2/\partial\tau^2)- \\ -\varkappa]\Psi+\varkappa\partial/\partial\theta W=0 \tag{1.2}$$

$$[(1+\nu+\varkappa)(\partial/\partial\theta+\mathrm{ctg}\,\theta)]V-[\varkappa(\partial/\partial\theta+\mathrm{ctg}\,\theta)]\Psi+ \\ +[\varkappa\nabla^2-2(1+\nu)-(1+\varepsilon)\gamma\partial^2/\partial\tau^2]W=-\gamma_0 p \tag{1.3}$$

$$2\gamma(1+\varepsilon)\xi^{\cdot\cdot}=\gamma_0\int_0^\pi p\cos\theta\sin\theta\,d\theta \qquad (p=(p_i+p_d+p_R)_{r=1}+q) \tag{1.4}$$

$$\Psi=V=\partial W/\partial\theta=0 \quad (\theta=0,\ \pi) \tag{1.5}$$

$$\xi=V=\Psi W=0,\ d\xi/d\tau=dV/d\tau=d\Psi/d\tau=dW/d\tau=0 \quad (\tau=0) \tag{1.6}$$

Уравнения (1.1)–(1.3) были получены из известных уравнений (1.22) [2], добавлением к левым частям (1.22) инерционных членов, которые в наших обозначениях вошли в уравнения (1.1), (1.2) и (1.3) соответственно в виде слагаемых

$$-(1+\varepsilon)\gamma\sin\theta\xi^{\cdot\cdot},\ -2\varepsilon\gamma\sin\theta\xi^{\cdot\cdot},\ -(1+\varepsilon)\gamma\cos\theta\xi^{\cdot\cdot}$$

[1] *Васильев Д. Г., Симонов И. В.* Асимптотические оценки комплексных частот колебаний оболочки в жидкости: Препринт № 186. М.: ИПМ АН СССР, 1981. 68 с.

В (1.4) масса оболочки была вычислена с точностью до ε включительно, т. е. равна $4\pi a^2 h(1+\varepsilon)\rho_1$. Величины p_d и p_R в (1.3) и (1.4) определяются из решений систем

$$\Delta p_d = \partial^2 p_d / \partial\tau^2 \quad (r>1) \tag{1.7}$$

$$\partial p_d / \partial r = -\partial p_i / \partial r \quad (r=1) \tag{1.8}$$

$$p_d = \partial p_d / \partial \tau = 0 \quad (\tau=0) \tag{1.9}$$

$$\Delta p_R = \partial^2 p_R / \partial\tau^2 \quad (r>1) \tag{1.10}$$

$$\partial p_R / \partial r = \gamma_1 \partial^2 W / \partial\tau^2 \quad (r=1) \tag{1.11}$$

$$p_R = \partial p_R / \partial \tau = 0 \quad (\tau=0) \tag{1.12}$$

причем решения систем (1.1)—(1.6) и (1.10)—(1.12) взаимно связаны, так как в них входит величина W.

В системах (1.1)—(1.12) обозначено $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial\theta^2 + \operatorname{ctg}\theta\, \partial/\partial\theta$

$$\Delta \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]$$

— оператор Лапласа в сферических координатах r, θ (осесимметричный случай), где $r=r'/a$ ($z'=r\cos\theta$, $y'=r\sin\theta\sin\varphi$, $x'=r\sin\theta\cos\varphi$)

$$\tau = ct/a, \quad V = v + \xi\sin\theta, \quad W = w + \xi\cos\theta$$

$$v = v'/a, \quad w = w'/a, \quad \xi = \xi'/a, \quad \varkappa = c_{20}^2/c_{10}^2$$

$$c_{10}^2 = E/[\rho_1(1-\nu^2)], \quad c_{20}^2 = E k_T/[2\rho_1(1+\nu)]$$

$$\varepsilon = h^2/(12a^2), \quad \gamma = c^2/c_{10}^2, \quad p_i = p_i'/E$$

$$p_d = p_d'/E, \quad p_R = p_R'/E, \quad \gamma_0 = (1-\nu^2)a/h$$

$$\gamma_1 = \rho c^2/E, \quad q = q'/E$$

Здесь t — время, $Ox'y'z'$ — подвижная декартова система координат, начало которой O в любой момент времени совпадает с центром масс сферической оболочки и, следовательно, в начальный момент движения (до начала воздействия волны и нагрузки) совпадает с центром сферы радиуса a; w', v' — радиальное и тангенциальное смещения срединной поверхности оболочки в подвижной системе координат ($w'>0$ по направлению к центру сферы), p_d', p_R' — соответственно, дифракционное давление и давление излучения в жидкости, q' — поверхностная нагрузка на единицу площади, причем предполагается, что избыточная падающая волна p_i' и нагрузка q' являются осесимметричными и до момента $t=0$, величины p_i' и q' тождественно равны нулю; ξ' — смещение центра масс оболочки относительно начального положения в момент $t=0$, когда он совпадал с центром сферической оболочки, причем предполагается, что $\xi'>0$ в направлении отрицательной полуоси Oz'; ρ, ρ' — плотности жидкости и материала оболочки, a, h — радиус срединной поверхности оболочки и ее толщина, c_{10} и c_{20} — скорости распространения фронтов волн по срединной поверхности оболочки, c — скорость звука в жидкости, Ψ — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки в плоскости $r\theta$, k_T — численный коэффициент сдвига, ν, E — коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала оболочки. Кроме того, заметим, что в рассматриваемой задаче ищется только возмущенное движение оболочки и жидкости по отношению к статическому состоянию, определяемому до момента движения $t=0$ статическим постоянным давлением p_0' в окружающей оболочку жидкости.

Таким образом, решение рассматриваемой задачи для безразмерных смещений v, w и давления в жидкости полностью описывается системой (1.1)—(1.12).

2. Решение задачи. Применяя к (1.1)—(1.6) преобразование Лапласа по τ:

$$f^- = \int_0^\infty f e^{-s\tau}\, d\tau \quad (\mathrm{Re}\, s>0), \qquad f=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} f^- e^{s\tau}\, ds \quad (b>0)$$

а затем вводя новые переменные V^{-0}, Ψ^{-0}, W^{-0} по формулам

$$V^- = \partial V^{-0}/\partial\theta,\ \Psi^- = \partial\Psi^{-0}/\partial\theta,\ W^- = W^{-0} \tag{2.1}$$

и разлагая функции V^{-0}, Ψ^{-0}, W^{-0}, p_i^-, p_d^-, p_R^-, q^- в ряды по полиномам Лежандра

$$f^- = \sum_{n=0}^\infty f_n P_n(\cos\theta), \qquad f_n^- = (n+{}^1/_2)\int_0^\pi f^- P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

приводим систему (1.1—1.6) к виду

$$(\lambda+k_1)V_n^{-0} - k_2\Psi_n^{-0} + k_3 W_n^{-0} = 0 \tag{2.2}$$

$$-k_2 V_n^{-0} + (\lambda\varepsilon - k_5)\Psi_n^{-0} - \varkappa W_n^{-0} = 0 \tag{2.3}$$

$$-\lambda k_3 V_n^{-0} + \lambda\varkappa\Psi_n^{-0} - (\lambda\varkappa - k_4) W_n^{-0} = -\gamma_0 p_n^- \tag{2.4}$$

$$3\gamma(1+\varepsilon)s^2\xi^- = \gamma_0 p_1^-,\ k_1 = \varkappa + (1+\varepsilon)\gamma s^2 - 1 + \nu,\ k_2 = \varkappa - 2\varepsilon\gamma s^2 \tag{2.5}$$

$$k_3 = 1+\nu+\varkappa,\ k_4 = -2(1+\nu) - (1+\varepsilon)\gamma s^2$$

$$k_5 = \varepsilon(1-\nu) - \varepsilon\gamma s^2 - \varkappa, \qquad p_n^- = (\bar{p}_{i,n} + \bar{p}_{d,n} + \bar{p}_{R,n})_{r=1} + q_n^- \tag{2.6}$$

Решая систему (2.2)—(2.4) относительно W_n^{-0}, получаем с учетом обозначений (2.1) выражение для W_n^-:

$$W_n^- = \gamma_0(A_{1n}s^4 + B_{1n}s^2 + C_{1n})p_n^- / (D_{2n}s^6 + A_{2n}s^4 + B_{2n}s^2 + C_{2n}) \tag{2.7}$$

$$W_n^- = w_n^- + \xi^-\delta_{1n} \quad \left(\delta_{1n} = \begin{cases} 0; & n\neq 1 \\ 1; & n=1 \end{cases}\right) \tag{2.8}$$

$$A_{1n} = -k_{11}k_{51} - k_{21}^2,\ B_{1n} = \lambda(\varepsilon k_{11} - k_{51}) - k_{12}k_{51} - k_{11}k_{52} - 2k_{21}k_{22} \tag{2.9}$$

$$C_{1n} = \lambda^2\varepsilon + \lambda(\varepsilon k_{12} - k_{52}) - k_{12}k_{52} - k_{22}^2,\ D_{2n} = k_{11}A_{1n}$$

$$A_{2n} = \lambda(-\varkappa k_{11}k_{51} + \varepsilon k_{11}^2 - k_{51}k_{11} - \varkappa k_{21}^2) +$$
$$+ k_{11}k_{51}k_{42} - k_{12}k_{51}k_{11} - k_{11}^2 k_{52} - 2k_{22}k_{11}k_{21} + k_{21}^2 k_{42}$$

$$B_{2n} = \lambda^2(\varepsilon\varkappa k_{11} - \varkappa k_{51} + \varepsilon k_{11}) + \lambda(\varepsilon k_{12}k_{11} - \varkappa k_{12}k_{51} - \varkappa k_{11}k_{52} - \varepsilon k_{11}k_{42} - k_{52}k_{11} +$$
$$+ k_{51}k_{42} + 2\varkappa k_3 k_{21} + k_3^2 k_{51} - \varkappa^2 k_{11} - 2\varkappa k_{21}k_{22}) + k_{12}k_{51}k_{42} - k_{12}k_{11}k_{52} + k_{11}k_{52}k_{42} +$$
$$+ 2k_{22}k_{21}k_{42} - k_{22}^2 k_{11}$$

$$C_{2n} = \lambda^3\varepsilon\varkappa + \lambda^2(\varepsilon\varkappa k_{12} - \varkappa k_{52} - \varepsilon k_{42} - \varepsilon k_3^2 - \varkappa^2) + \lambda(k_{52}k_{42} - \varkappa k_{12}k_{52} - \varepsilon k_{12}k_{42} +$$
$$+ 2\varkappa k_{22}k_3 + k_3^2 k_{52} - \varkappa^2 k_{12} - \varkappa k_{22}^2) + k_{12}k_{52}k_{42} + k_{22}^2 k_{42}$$

$$k_{11} = (1+\varepsilon)\gamma,\ k_{12} = \varkappa - 1 + \nu,\ k_{21} = -2\varepsilon\gamma$$

$$k_{22} = \varkappa,\ k_3 = 1+\nu+\varkappa,\ k_{54} = -\varepsilon\gamma$$

$$k_{52} = \varepsilon(1-\nu) - \varkappa,\ k_{42} = -2(1+\nu) \tag{2.10}$$

Для определения величин $\bar{p}_{d,n}$ и $\bar{p}_{R,n}$, входящих в p_n^- в формуле (2.7) найдем решение систем (1.7)—(1.9) и (1.10)—(1.12), применяя к ним преобразование Лапласа по τ и разлагая изображение в ряды по полиномам

Лежандра. В результате получаем

$$\bar{p}_{d,n}(r)=-\left(\frac{\partial p_{in}}{\partial r}\right)_{r=1}\frac{K_{n+1/2}(sr)/r^{1/2}}{s^{3/2}(K_{n+1/2}(s)/s^{1/2})_s'}$$

$$\bar{p}_{R,n}(r)=\frac{\gamma_1 s^{1/2}W_n^- K_{n+1/2}(sr)/r^{1/2}}{(K_{n+1/2}(s)/s^{1/2})_s'}$$

где $K_{n+1/2}(s)$ — функция Макдональда от аргумента s порядка $n+1/2$. Тогда с учетом обозначений (2.6) находим

$$p_n^-=(\bar{p}_{i,n}+\bar{p}_{d,n}+\bar{p}_{R,n})_{r=1}+q_n^-=(\bar{p}_{i,n})_{r=1}-(\partial\bar{p}_{i,n}/\partial r)_{r=1}\Phi_n/s+\gamma_1 s\Phi_n W_n^-+q_n^-$$

$$\Phi_n\equiv\Phi_n(s)=[K_{n+1/2}/s^{1/2}]/[K_{n+1/2}/s^{1/2})_s'] \tag{2.11}$$

Из (2.7) и (2.11) получаем

$$W_n^-=\frac{(A_{1n}s^4+B_{1n}s^2+C_{1n})\gamma_0[(p_{in}^-)_{r=1}-(\partial p_{in}^-/\partial r)_{r=1}\Phi_n/s+q_n^-]}{D_{2n}s^6+A_{2n}s^4+B_{2n}s^2+C_{2n}-\gamma_1\gamma_0 s\Phi_n(A_{1n}s^4+B_{1n}s^2+C_{1n})} \tag{2.12}$$

Из (2.5) и (2.12) находим

$$\xi^-=\frac{\gamma_0}{3(1+\varepsilon)\gamma s^2}\left[(\bar{p}_{i,1})_{r=1}-\left(\frac{\partial\bar{p}_{i,1}}{\partial r}\right)_{r=1}\frac{\Phi_1}{s}+q_1^-\right]+m\frac{\Phi_1}{s}W_1^-,$$

$$m=\gamma_0\gamma_1/[3\gamma(1+\varepsilon)] \tag{2.13}$$

где m — отношение массы жидкости в объеме сферической оболочки радиуса a к массе самой оболочки. Из (2.11), (2.12) и (2.13) с учетом (2.8) окончательно получаем следующие выражения для изображений смещения центра масс ξ^-, коэффициентов разложений радиального смещения w_n^- и результирующей нагрузки на оболочку p_n^-

$$\xi^-=\gamma_0 L_1[3(1+\varepsilon)\gamma s^2(1-\gamma_1\gamma_0 s\Phi_1 M_1)]^{-1} \tag{2.14}$$

$$w_n^-=W_n^--\xi^-\delta_{1n}=\frac{\gamma_0 L_n M_n}{1-\gamma_1\gamma_0 s\Phi_n M_n}\left[1-\frac{\delta_{1n}}{2\gamma(1+\varepsilon)s^2M_1}\right] \tag{2.15}$$

$$p_n^-=L_n(1-\gamma_1\gamma_0 s\Phi_n M_n)^{-1} \tag{2.16}$$

$$L_n=(\bar{p}_{i,n})_{r=1}-(\partial\bar{p}_{i,n}/\partial r)_{r=1}\Phi_n/s+q_n^- \tag{2.17}$$

$$M_n=(A_{1n}s^4+B_{1n}s^2+C_{1n})/(D_{2n}s^6+A_{2n}s^4+B_{2n}s^2+C_{2n}). \tag{2.18}$$

Для изображения безразмерной силы $p^-(F=F'/(\pi a^2E)$, где F' — величина размерной силы) находим

$$F=2\int_0^\pi[(p_i^-+p_d^-+p_R^-)_{r=1}+q^-]\cos\theta\sin\theta\,d\theta=4\gamma(1+\varepsilon)s^2\xi^-/\gamma_0 \tag{2.19}$$

В частном предельном случае безразмерной оболочки ($\varkappa\to0$, $\varepsilon\to0$) получаем из (2.14)—(2.18) результаты, совпадающие с предельными результатами из аналогичных формул [10] (если в формулах [10], выведенных на основе оболочечных уравнений Кирхгофа — Лява, перейти к пределу при $\varepsilon\to0$).

3. Исследование функций ξ^-, w_n^-, p_n^-. Для того чтобы получить функцию нормального прогиба w_n, результирующую нагрузку на оболочку p_n, а также величины $\xi(\tau)$ и $F(\tau)$ следует применить к выражениям (2.14), (2.15), (2.16) и (2.19) обратное преобразование Лапласа по s. При вычислении возникающих при этом интегралов по переменной s нужно знать особые точки их подынтегральных выражений

$$M_n[1-\gamma_0\gamma_1 s\Phi_n M_n]^{-1},\quad[1-\gamma_1\gamma_0 s\Phi_n M_n]^{-1} \tag{3.1}$$

зависящих от параметров оболочки и жидкости, номера гармоники n и не зависящих от вида нагрузки. Функция Φ_n является дробно-рациональной. Поэтому выражения (3.1) также являются дробно-рациональными. Следовательно, необходимо знать только их полюса, т. е. нули функции φ_n ($n\geqslant 0$):

$$\varphi_n(s)=D_{2n}s^6+A_{2n}s^4+B_{2n}s^2+C_{2n}-\gamma_0\gamma_1 s\Phi_n(A_{1n}s^4+B_{1n}s^2+C_{1n}) \tag{3.2}$$

Можно заметить, что числитель дробно-рациональной функции φ_n является многочленом степени $(n+7)$, с действительными коэффициентами и, следовательно, он имеет $(n+7)$ действительных и (или) комплексно-сопряженных нулей. Таким образом, поведение искомых функций w_n, p_n, ξ, F зависит от поведения нулей φ_n, расположение которых зависит от номера гармоники n и параметров оболочки и жидкости. С помощью принципа аргумента [11] можно показать, что при произвольных целых $n\geqslant 1$ функция φ_n не имеет нулей в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s>0$.

Рассмотрим частные случаи $n=0$ и $n=1$. Пользуясь тем, что в общем случае для произвольного $n\geqslant 0$ имеет место равенство

$$D_{2n}s^6+A_{2n}s^4+B_{2n}s^2+C_{2n}=(k_{11}s^2+\lambda\varkappa-k_{42})(A_{1n}s^4+B_{1n}s^2+C_{1n})-\lambda^2(\varkappa^2+\varepsilon k_3^2)+$$
$$+s^2(2\varkappa k_{21}k_3+k_3^2k_{51}-\varkappa^2k_{11})\lambda+\lambda(2\varkappa k_{22}k_3+k_3^2k_{52}-\varkappa^2k_{12}) \tag{3.3}$$

Получаем для $n=0$:

$$M_0=1/(k_{11}s^2-k_{42}),\quad \Phi_0=-s/(s+1)$$

$$[1-\gamma_0\gamma_1 s\Phi_0M_0]^{-1}=(s+1)(k_{11}s^2-k_{42})[(k_{11}s^2-k_{42})(s+1)+\gamma_0\gamma_1 s^2]^{-1} \tag{3.4}$$

$$M_0[1-\gamma_0\gamma_1 s\Phi_0M_0]^{-1}=(s+1)[(k_{11}s^2-k_{42})(s+1)+\gamma_0\gamma_1 s^2]^{-1} \tag{3.5}$$

Знаменатель $\Delta^*=(k_{11}s^2-k_{42})(s+1)+\gamma_0\gamma_1 s^2$ в (3.4) и (3.5) является многочленом третьей степени с действительными коэффициентами. Согласно (2.10) выполняются неравенства $k_{11}>0$, $k_{42}<0$. Поэтому действительные корни уравнения $\Delta^*=0$ (один из которых обязательно существует) могут лежать только на полуоси $s<-1$. Таким образом, имеется по крайней мере один отрицательный корень $s_1<-1$. Если имеется пара комплексно-сопряженных корней $s_{2,3}=a\pm bi$, то из условий на коэффициенты многочлена Δ^*: $s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1=-k_{42}/k_{11}$, $s_1s_2s_3=k_{42}/k_{11}$ и неравенства $s_1<-1$ находим $2as_1=-(k_{42}/k_{11})(1+1/s_1)>0$, т. е. $a<0$. Таким образом, все три полюса выражений (3.4), (3.5) лежат в области $\operatorname{Re} s<0$. Из (2.15) и (2.16) получаем при $s\to 0$:

$$w_0^-\sim-\gamma_0L_0/k_{42}=-\frac{\gamma_0}{k_{42}}\left[(\bar{p}_{i,0})_{r=1}+\left(\frac{\partial\bar{p}_{i,0}}{\partial r}\right)_{r=1}\frac{1}{s+1}+q_0^-\right] \tag{3.6}$$

$$p_0^-\sim L_0=\left[(\bar{p}_{i,0})_{r=1}+\left(\frac{\partial\bar{p}_{i,0}}{\partial r}\right)_{r=1}\frac{1}{s+1}+q_0^-\right] \tag{3.7}$$

В частности, для случая падения плоской ступенчатой волны избыточного давления, определяемого формулой ($H(\tau)$ — функция Хевисайда)

$$p_i=(\Delta p/E)H(\tau+r\cos\theta-1),\quad q\equiv 0 \tag{3.8}$$

находим

$$L_n=\left[(\bar{p}_{i,n})_{r=1}+\left(\frac{\partial\bar{p}_{i,n}}{\partial r}\right)_{r=1}\frac{1}{s+1}\right]=-\frac{(2\pi)^{1/2}(n+1/2)}{s^3}\frac{e^{-s}\,\Delta p/E}{(K_{n+1/2}(s)/s^{1/2})_s'} \tag{3.9}$$

$$L_0\sim\Delta p/(sE),\quad s\to 0$$

Отсюда и из (3.6) и (3.7) будем иметь

$$w_0^-\sim\Delta p\gamma_0/[2(1+\nu)Es],\quad s\to 0$$

$$p_0^-\sim\Delta p/(Es),\ s\to 0$$

В результате получаем для оригиналов следующие предельные результаты

$$w_0 \sim \Delta p(1-\nu)a/(2hE), \quad \tau\to\infty \tag{3.10}$$

$$p_0 \sim \Delta p/E, \quad \tau\to\infty \tag{3.11}$$

Результаты (3.10) и (3.11) совпадают с соответствующими результатами [10], где для оболочек использовалась модель Кирхгофа – Лява.

В случае $n=1$ можно заметить, что $B_{21}=3\gamma C_{11}(1+\varepsilon)$ и $C_{21}=0$, откуда вытекает, что $s=0$, будучи двукратным нулем функции φ_1 из (3.2), не является при $n=1$ полюсом выражений – сомножителей к L_n в (2.15) и (2.16). В результате при $s\to 0$ получаем из (2.14) – (2.19):

$$\begin{aligned} &\xi^- = \frac{\gamma_0 L_1}{3(1+\varepsilon)\gamma(1+m/2)s^2}[1+O(s^2)] \\ &F^- = 4L_1 m(1+m/2)^{-1}[1+O(s^2)] \end{aligned} \tag{3.12}$$

В частности, для плоской падающей волны (3.8) при $s\to 0$ находим $w_1^-\to 0$, $p_1^-\to 0$, $L_1\sim(^3/_2)(1-s+O(s^2))\Delta p/E$ и, следовательно,

$$\xi^- = \frac{3m}{2\gamma_1(1+m/2)}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+O(1)\right)\Delta p/E, \quad s\to 0$$

$$F^- = O(1), \quad s\to 0$$

Отсюда получаем следующие предельные выражения для оригиналов:

$$\xi = \frac{3m}{\gamma_1(2+m)}[\tau-1+O(1)]\Delta p/E, \quad \tau\to\infty$$

$$F\to 0, \quad \tau\to\infty$$

Таким образом, предельное смещение центра масс ξ не зависит от упругих свойств оболочки (ибо $\Delta p/(E\gamma_1)=\Delta p/(\rho c^2)$). Этот результат подтверждает доказательство, полученное ранее в общем виде для упругого тела в [12]. Заметим далее, что поскольку при $n\geqslant 2$ и $s\to 0$: $M_n\to C_{1n}/C_{2n}\neq 0$, то при $s\to 0$: $w_n^-\sim L_n O(1)$ и $p_n^-\sim L_n O(1)$, откуда в частности для плоской волны (3.8) с учетом (3.9) находим в случае $n\geqslant 2$ при $\tau\to\infty$: $w_n\to 0$, $p_n\to 0$.

Как следует из [10] и полученных асимптотических формул (3.6), (3.7), (3.12) предельные при $\tau\to\infty$ результаты для общего вида падающей волны и произвольной нагрузки (устанавливающиеся при больших временах), будут одни и те же как для модели Кирхгофа – Лява так и для модели типа Тимошенко.

Ниже мы исследуем поведение нулей функции φ_n из (3.2) в зависимости от номера гармоники n, когда $n\to\infty$, что даст возможность выяснить характер затухания гармоники w_n и p_n при $\tau\to\infty$, когда n велико. Для этого сначала изучим асимптотику при $n\to\infty$ корней алгебраического уравнения

$$\varphi_n^\circ(s) = D_{2n}s^6 + A_{2n}s^4 + B_{2n}s^2 + C_{2n} = 0 \tag{3.13}$$

в которое переходит частное уравнение $\varphi_n=0$ в случае, когда оболочка находится в вакууме ($\gamma_1\to 0$).

4. Асимптотика корней уравнения $\varphi_n^\circ=0$ при $n\to\infty$. Уравнение (3.13) с учетом (3.3) можно переписать в виде:

$$\left(k_{11}\alpha+\varkappa-\frac{k_{42}}{\lambda}\right)\left(A_{1n}\alpha^2+\frac{B_{1n}}{\lambda}\alpha+\frac{C_{1n}}{\lambda^2}\right)+\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2}{\lambda^2}+\frac{\alpha b_1}{\lambda}=0 \tag{4.1}$$

Согласно (2.9) коэффициенты A_{1n}, B_{1n}, C_{1n} можно записать в виде

$$\begin{aligned} &A_{1n}=-k_{11}k_{51}-k_{21}^2, \; C_{1n}/\lambda^2=\varepsilon+C_{1n}^1/\lambda+C_{1n}^2/\lambda^2 \\ &B_{1n}/\lambda=b_{1n}^0+b_{1n}^1/\lambda, \; a_1=-(\varkappa^2+\varepsilon k_3^2) \\ &a_2=2\varkappa k_3k_{22}+k_3^2k_{52}-\varkappa^2k_{12}, \; b_1=2\varkappa k_{21}k_3+k_3^2k_{51}-\varkappa^2k_{11}, \; \lambda=n(n+1) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$b_{1n}{}^0=\varepsilon k_{11}-k_{51},\ b_{1n}{}^1=-(k_{12}k_{51}+k_{11}k_{52}+2k_{21}k_{22})$$

$$C_{1n}{}^1=\varepsilon k_{12}-k_{52},\ C_{1n}{}^2=-k_{12}k_{52}-k_{22}{}^2,\ \alpha=s^2/\lambda$$

Ввиду громоздкости формул точного решения кубического уравнения (4.1) имеет смысл для получения асимптотик корней (4.1) при $\lambda\to\infty$ искать их непосредственно в виде разложений

$$\alpha_j=\alpha_j{}^0+\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_j{}^k}{\lambda^k}\qquad (j=1\div 3)\tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, находим для α_j $(j=1\div 3)$ следующие выражения, пригодные при $\lambda\gg 1$, $\varepsilon\ll 1$:

$$\alpha_1=-1/\gamma+O(1/\lambda),\qquad \alpha_2=\begin{cases}-1/\gamma+O(1/\lambda) & (\lambda\varepsilon\gg 1)\\ -(1+(\varkappa/\lambda\varepsilon))/\gamma+O(1/\lambda) & (\lambda\varepsilon\ll 1)\end{cases}$$

$$\alpha_3=\begin{cases}-\varkappa/\gamma+O(1/\lambda) & (\lambda\varepsilon\gg 1)\\ -\dfrac{\varkappa+(1-\nu^2)/\lambda}{[1+\varkappa/(\lambda\varepsilon)]\gamma}+O(1/\lambda) & (\lambda\varepsilon\ll 1)\end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что $\lambda^{1/2}=\mu[1+O(1/\mu^2)]\approx\mu=n+{}^1/_2$ окончательно находим при $\mu^2\gg 1$:

$$\begin{gathered}z^0_{1(2)}=\frac{s^0_{1(2)}}{\mu}=\frac{-}{(+)}\frac{i}{\gamma^{1/2}}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\\ z^0_{3(4)}=\frac{s^0_{3(4)}}{\mu}=\begin{cases}\dfrac{-}{(+)}\dfrac{i}{\gamma^{1/2}}+O\left(\dfrac{1}{\mu^2}\right) & (\mu^2\varepsilon\gg 1)\\ \dfrac{-}{(+)}i\left[\left(1+\dfrac{\varkappa}{\mu^2\varepsilon}\right)\Big/\gamma\right]^{1/2}+O\left(\dfrac{1}{\mu^2}\right) & (\mu^2\varepsilon\ll 1)\end{cases}\end{gathered}\tag{4.4}$$

$$z^0_{5(6)}=\frac{s^0_{5(6)}}{\mu}=\begin{cases}\dfrac{-}{(+)}i(\varkappa/\gamma)^{1/2}+O(1/\mu^2)\ (\mu^2\varepsilon\gg 1)\\ \dfrac{-}{(+)}i\gamma^{-1/2}\left[\left(\varkappa+\dfrac{1-\nu^2}{\mu^2}\right)\Big/\left(1+\dfrac{\varkappa}{\mu^2\varepsilon}\right)\right]^{1/2}+O(1/\mu^2)\quad (\mu^2\varepsilon\ll 1)\end{cases}$$

Для большинства материалов $\varkappa/\gamma>1$. Кроме того, $\gamma^{-1}>1$. Поэтому при $\mu^2\gg 1$ для $z_k{}^0$ из (4.3) (кроме $z^0_{5,6}$ при $\mu^2\varepsilon\ll 1$) имеет место неравенство $|z_k{}^0|>1$. Для $z^0_{5,6}$ при $\mu^2\varepsilon\ll 1$ из (4.4) находим $|z^0_{5,6}|<1$. Из анализа уравнения (4.1) и асимптотических формул (4.4) следует, что корни (4.4) являются чисто мнимыми и попарно комплексно-сопряженными.

5. Асимптотика корней трансцендентного уравнения $\varphi_n=0$ при $n\to\infty$. Для нахождения асимптотик корней s_k трансцендентного уравнения $\varphi_n=0$ при $n\to\infty$ удобно представить это уравнение с учетом (3.2) и (4.4) в следующем виде:

$$\begin{gathered}[z^2-(z_1{}^0)^2]\,[z^2-(z_3{}^0)^2]\,[z^2-(z_5{}^0)^2]-3m\mu^{-1}(z^4+B_{1n}{}^0z^2+C_{1n}{}^0)z\Phi_n=0\\ m=\gamma_0\gamma_1/[3\gamma(1+\varepsilon)],\ \Phi_n\equiv\Phi_n(\mu z),\ z=s/\mu\end{gathered}\tag{5.1}$$

$$B_{1n}{}^0=B_{1n}/(A_{1n}\mu^2),\ C_{1n}{}^0=C_{1n}/(A_{1n}\mu^2),\ \mu=n+{}^1/_2$$

С учетом (4.2) получаем при $\mu\to\infty$:

$$B_{1n}{}^0=b_{1n}{}^0/A_{1n}+O(1/\mu^2),\ C_{1n}{}^0=\varepsilon/A_{1n}+O(1/\mu^2)$$

Для оценки $\Phi_n(\mu z)$ при $\mu\to\infty$ используем разложения Олвера [13]:

$$K_\mu(\mu z)=\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^{1/2}\frac{\exp(-\mu\xi)}{(1+z^2)^{1/4}}\left[1+\sum_{p=1}^{m}\frac{a_p(z)}{\mu^p}+O(\mu^{-m-1})\right]$$

$$\frac{dK_\mu(\mu z)}{dz}=-\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)^{1/2}\frac{(1+z^2)^{1/4}}{z\exp(\mu\xi)}\left[1+\sum_{p=1}^{m}\frac{b_p(z)}{\mu^p}+O(\mu^{-m-1})\right]$$

$$\xi=\ln z\exp\sqrt{1+z^2}/(1+\sqrt{1+z^2}) \qquad (5.2)$$

где $\operatorname{Im}\xi=0$ при $z>0$, а сами асимптотические разложения (5.2) являются равномерными по z в области $\operatorname{Re}z>0$, а также в некоторой окрестности мнимой оси $\operatorname{Re}z<0$ за исключением окрестностей точек $z=\exp(\pm i\pi/2)$. В результате находим при $\mu\to\infty$

$$\Phi_n=-z[1+O(1/\mu)]/(1+z^2)^{1/2} \qquad (5.3)$$

Учитывая, что при $\mu\to\infty$ (вне точек $z=\pm i$) функция (5.3) ограничена, а второй член левой части (5.1) имеет малый параметр $1/\mu$, будем искать корни z_j уравнения (5.1) при $\mu\to\infty$ в виде

$$z_j=z_j^0+f_j,\ f_j=o(1),\ (j=1\div 6) \qquad (5.4)$$

Тогда, подставляя в (5.1) вместо z выражение (5.4) последовательно при $j=1$, 3, 5, находим при $\mu\gg1$:

$$f_j=-3m[(z_j^0)^4+B_{1n}^0(z_j^0)^2+C_{1n}^0](z_j^0)/\{2\mu(1+(z_j^0)^2)^{1/2}[(z_j^0)^2-$$
$$-(z_k^0)^2][(z_j^0)^2-(z_m^0)^2]\} \qquad (5.5)$$

$$k,j,m=1,3,5\ (k\neq j,\ k\neq m,\ m\neq j)$$

$$f_2=f_1^*,\ f_4=f_3^*,\ f_6=f_5^*$$

(Здесь f^* — величина, комплексно-сопряженная с f).

Учитывая выбранную ветвь радикала $(1+z^2)^{1/2}((1+z^2)^{1/2}=1$, при $z=0)$, а также тот факт, что выполняются неравенства $(\varkappa/\gamma)^{1/2}=c_{20}/c>1$, $(1/\gamma)^{1/2}=c_{10}/c>1$ получаем, что f_j $(j=1\div6)$ из (5.5) являются отрицательными величинами, убывающими по модулю при $\mu\to\infty$ как $1/\mu$. Заметим, что остальные $n+1$ корней уравнения (5.1) имеют при $\mu\to\infty$ асимптотики $|\operatorname{Re}z_j|>C\mu^{-2/3}$, $j=7,8\ldots n+7$ (эту оценку можно строго доказать с помощью теоремы Руше с использованием асимптотических разложений Олвера [13] равномерных в области $\operatorname{Im}z\leqslant0$, включая и точку $z=e^{-i\pi/2}$). С другой стороны, т. к. $|z^0_{5,6}|<1$ при $\varepsilon\ll1$ и $j=5$, 6 в конечном диапазоне значений μ: $1\ll\mu$, $\mu^2\ll1/\varepsilon$ выражения f_5 и f_6 оказываются чисто мнимыми и для правильной оценки поведения действительных частей z_5 и z_6 при больших μ в этом диапазоне используем вместо (5.3) более тонкую асимптотическую оценку [13] $(\mu\to\infty)$:

$$\Phi_n(-ix\mu)\sim x[i-(x\exp\sqrt{1-x^2}/(1+\sqrt{1-x^2}))^{2\mu}]/(1+x^2)^{1/2} \qquad (5.6)$$

Здесь $0<x<1$ и, следовательно, $\operatorname{Re}\Phi_n$ убывает при $\mu\to\infty$ как показательная функция.

Чтобы построить приближенное выражение как для действительной, так и мнимой частей корня z_5 (и $z_6=z_5^*$) при больших $\mu(1\ll\mu,\ \mu^2\ll1/\varepsilon)$, следует искать его в виде $z_5=-ix-\delta$ предполагая, что $0<\delta\ll x<1$. Тогда, подставляя в (5.1) вместо z выражение $-ix-\delta$, разлагая все функции в (5.1) в ряды по степеням малой величины δ и используя для $\Phi_n(-ix\mu)$ и ее производных представление (5.6), получаем для действительной и мнимой частей уравнения (5.1) два уравнения. Решая эти уравнения относительно x и δ при больших μ (но $\mu^2\varepsilon\ll1$) в первом приближении находим следующее выражение для z_5:

$$z_5=\frac{s_5}{\mu}=-x\left[i+\frac{3m(x^4-x^2B_{1n}{}^0+C_{1n}{}^0)}{2\mu[-(z_1{}^0)^2-x^2][-(z_3{}^0)^2-x^2]\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{x\exp\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^{2\mu}\right]$$

$$x=z_5{}^0i-\frac{3m[(z_5{}^0)^4+(z_5{}^0)^2B_{1n}{}^0+C_{1n}{}^0]z_5{}^0i}{2\mu\sqrt{1+(z_5{}^0)^2}[(z_5{}^0)^2-(z_3{}^0)^2][(z_5{}^0)^2-(z_1{}^0)^2]} \tag{5.7}$$

где корни $z_1{}^0$, $z_3{}^0$, $z_5{}^0$ согласно (4.4) принимают соответственно значения

$$-\frac{i}{\gamma^{1/2}},\quad -i\left[\left(1+\frac{\varkappa}{\mu^2\varepsilon}\right)\Big/\gamma\right]^{1/2},\quad -i\left[\left(\varkappa+\frac{1-\nu^2}{\mu^2}\right)\gamma^{-1}\Big/\left(1+\frac{\varkappa}{\mu^2\varepsilon}\right)\right]^{1/2}$$

Как следует из (5.7), величина $\operatorname{Re} z_2(\operatorname{Re} z_5)$ в рассматриваемом диапазоне больших $\mu(1\ll\mu,\ \mu^2\ll1/\varepsilon)$ убывает с ростом μ, как показательная функция.

Этот результат совпадает с ранее найденным для модели Кирхгофа — Лява в [10] и доказывает в случае модели Тимошенко существование при $1\ll\mu$, $\mu^2\ll1/\varepsilon$ слабо затухающих колебаний тонкой сферической оболочки в жидкости, ранее обнаруженных в теоретических исследованиях для модели Кирхгофа — Лява.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Нестационарная гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1974. 208 с.
2. *Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Стулов А. С.* Дифракция акустических импульсов на упругих телах. М.: Наука, 1979. 239 с.
3. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д.* Методы расчета оболочек. Т. 5. Киев: Наук. думка, 1982. 399 с.
4. *Авербух А. З., Вецман Р. И., Генкин М. Д.* Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987. 158 с.
5. *Huang H.* An exact analysis of the transient interaction of acoustic plane waves with a cylendrical elastic shell // Trans. ASME. Ser. E. 1970. V. 37. № 4. P. 1091–1099.
6. *Лоу Ю. К., Клоснер Дж. М.* Неустановившееся движение погруженной в жидкость сферической оболочки при возбуждении сосредоточенной силой // Тр. амер. о-ва инж.-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1973. № 4. С. 255–262.
7. *Akkas N., Engin A. E.* Transient response of a spherical shell in an acoustic medium — comparison of exact and approximate solutions // J. Sound and Vibrat. 1980. V. 73. № 3. P. 447–460.
8. *Попов А. Л., Чернышев Г. Н.* О резонансных частотах оболочек, колеблющихся в бесконечной жидкости // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 869–876.
9. *Поручиков В. Б., Степанов А. В.* О существовании слабо затухающих колебаний тонкой сферической оболочки в жидкости // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 6. С. 1335–1340.
10. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
11. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
12. *Olver F. W. J.* Asymptotics and spherical functions. N. Y. L.: Acad. press, 1974. 584 p.

Москва

Поступила в редакцию 23.III.1989