МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1990

УДК 533.6.013.42
© 1990 г.

К. С. МАТВИЙЧУК

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПАНЕЛЕЙ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

Настоящая работа посвящена изучению технической устойчивости [1–18] параметрически возбуждаемых двумерных панелей, взаимодействующих со сверхзвуковым потоком [19–21]. Нагрузка, приложенная к панели вдоль ее краев, зависит от времени. Получены достаточные условия технической устойчивости на конечном и бесконечном промежутках времени, асимптотической технической устойчивости рассматриваемой системы на основе метода сравнения [6, 18] в сочетании со вторым методом Ляпунова [22–24]. Определение соответствующих дифференциальных неравенств связано с экстремальными свойствами отношений Релея для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве [25–27]. Область технической устойчивости зависит от решений соответствующей задачи о собственных значениях [19] и малого параметра, входящего в условия положительной определенности функционала Ляпунова [15]. Рассматриваемый динамический процесс изучен в линейной и нелинейной постановке [19, 20]. Соответствующая скалярная задача Коши сравнения зависит от исходных параметров процесса.

Достаточные условия устойчивости по Ляпунову аналогичной системы найдены в [19]. Результаты настоящей работы существенно отличаются от свойств устойчивости в смысле Ляпунова, указанных в [19], не только тем, что условия технической устойчивости рассматриваемой системы изучаются на любом конечном и наперед заданном промежутке времени, но и тем, что ограничения на начальные состояния системы не зависят от условий мажорации последующих состояний системы в течение заданного промежутка времени. Предложенный в настоящей работе подход, основанный на методе сравнения в сочетании со вторым методом Ляпунова, может быть применен для исследования технической устойчивости в более сложных задачах о панельном флаттере, например, в случае искривленных панелей с различными способами граничных закреплений, цилиндрических, конических или усеченных конических панелей, а также в задачах о колебаниях панелей, обусловленных либо аэродинамическим шумом, либо бафтингом. При этом отсутствие условий отрицательной определенности полной производной функционала Ляпунова в силу исходной краевой задачи в этом подходе в отличие от условий в смысле Ляпунова расширяет возможности для условий на параметры исходной системы.

1. Формулировка условий исходной задачи. В линейном подходе динамическое состояние панели, находящейся в сверхзвуковом потоке и подвергающейся действию динамической нагрузки, приложенной вдоль ее краев, описывается следующей краевой задачей [19–21]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\eta\frac{\partial w}{\partial x}+\beta\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{1.1}$$

$$w(t,x)\big|_{t=t_0}=w_0(x),\qquad \frac{\partial w(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=t_0}=v_0(x) \tag{1.2}$$

$$w(t,0)=w(t,1)=0,\qquad \frac{\partial^2 w(t,0)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w(t,1)}{\partial x^2}=0 \tag{1.3}$$

где $w_0(x)$, $v_0(x)$ — четырежды непрерывно дифференцируемые функции по $x\in X=[0,1]$. Сила $f(t)$ — регулярная функция по безразмерному времени t. Здесь введены обозначения:

$$f(t)=\frac{F(t)a_0^2}{D};\qquad \eta=\frac{\rho c_\infty^2 a_0^3 M}{D},\qquad \beta=\frac{\rho c_\infty a_0^2}{(mD)^{1/2}} \tag{1.4}$$

$F(t)$ — приложенное усилие, отнесенное к единице ширины панели, a_0 — длина хорды панели; $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ — изгибная жесткость, E — модуль Юнга, h — толщина панели, ν — коэффициент Пуассона, M — число Маха, c_∞ — скорость звука в невозмущенном газе, m — масса единицы площади панели; ρ — плотность невозмущенного газа. Граничные условия (1.3) соответствуют предположению, что края панели свободно оперты. Предполагаем, что задача (1.1)—(1.3) имеет однозначное решение $u(t,x)$ с необходимыми свойствами.

Ставится задача: исследовать техническую устойчивость [15—18] динамического поведения двумерной панели в сверхзвуковом потоке при свободном опирании. Осуществим это с помощью решений краевой задачи (1.1)—(1.3).

Обозначим конечный интервал времени $T=[t_0, L\mu^{-1}]$, $t_0\geqslant 0$, μ — малый положительный параметр: $0<\mu<\mu_0\leqslant 1$, постоянная $L>0$ в общем случае зависит от параметров системы. Рассмотрим [19, 25] вещественное гильбертово пространство H векторов $u=\{u_1(t,x), u_2(t,x)\}$ с непрерывными функциями $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ при $t\in T$, $x\in X$, для которых скалярное произведение каждой пары [14, 15, 17, 19] имеет представление

$$(u,v)=\int_X\sum_{i=1}^{2}u_i(t,x)v_i(t,x)\,dx;\qquad u,v\in H \tag{1.5}$$

Задачу (1.1)—(1.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=L(t)u(t,x),\qquad u(t,x)=\begin{vmatrix} w(t,x)\\ v(t,x)\end{vmatrix},\qquad v\equiv\frac{\partial w}{\partial t} \tag{1.6}$$

$$u(t,x)\,|_{t=t_0}=v_0(x);\qquad u_0(x)=\begin{vmatrix} w_0(x)\\ v_0(x)\end{vmatrix} \tag{1.7}$$

$$u(t,0)=u(t,1),\quad \partial^2u(t,0)/\partial x^2=\partial^2u(t,1)/\partial x^2=0 \tag{1.8}$$

Оператор $L(t)$ имеет представление

$$L(t)=\begin{vmatrix} & 0 & & 1\\ -\frac{\partial^4}{\partial x^4} & -f(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\eta\frac{\partial}{\partial x} & -\beta\end{vmatrix} \tag{1.9}$$

и есть оператор в H, действующий в области $W(T\times X)$, т. е. $L(t)$: $W\to H$. Область W оператора (1.9) есть множество двухкомпонентных векторов $u=\{u_1(t,x), u_2(t,x)\}\in H$, компоненты которых имеют по x четвертого порядка включительно частные производные, принадлежащие гильбертову пространству $L^2(X)$ при каждом $t\in T$ и удовлетворяют граничным условиям (1.8). Тогда решение $u(t,x)$ задачи (1.6)—(1.8) при всех $t\in T$ определяет траекторию в W.

Рассмотрим меру $\rho(u,0)$ в $W\subset H$ [19]:

$$\rho(u,0)=(u,\check{M}u)^{1/2} \tag{1.10}$$

где оператор $M^\smile$ равен

$$M^\smile=\begin{vmatrix}\partial^4/\partial x^4-\partial^2/\partial x^2+1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} \tag{1.11}$$

2. Условия на функционал Ляпунова. Рассмотрим функционал

$$V[u,t]=(u,B(t)u) \tag{2.1}$$

где оператор $B(t)$ определен в виде следующей матрицы

$$B(t)=\begin{vmatrix}\partial^4/\partial x^4+\gamma(t)\,\partial^2/\partial x^2+\delta_+ & \beta/2\\ \beta/2 & 1\end{vmatrix}$$

$$\delta_\pm=\alpha_1\pm\beta^2/4$$

где $\gamma(t)$ — некоторый коэффициент, непрерывно дифференцируемый по времени $t\in T$, α_1 — некоторый постоянный параметр. Оператор $B(t)$ представляет самосопряженный оператор в смысле следующего свойства

$$(v, B(t)w)=(w, B(t)v), \quad v, w\in W \tag{2.2}$$

Рассмотрим [15] скалярное произведение $(u, [B(t)-\mu M^{\vee}]u)$ при $\mu>0$, $u\in H$:

$$(u, [B(t)-\mu M^{\vee}]u)=\int_0^1\Big[(1-\mu)u_1\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4}+(\gamma(t)+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}u_1+$$
$$+\left(\alpha_1+\frac{\beta^2}{4}-\mu\right)u_1^2+\beta u_1u_2+(1-\mu)u_2^2\Big]dx=\int_0^1\Big[(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2-$$
$$-(\gamma(t)+\mu)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\alpha_1+\frac{\beta^2}{4}-\mu\right)u_1^2+\beta u_1u_2+(1-\mu)u_2^2\Big]dx$$

Отсюда при условии $0<\mu<1$ имеем неравенство [19—24]:

$$(u, [B(t)-\mu M^{\vee}]u)\geqslant\int_0^1\{[(1-\mu)\pi^2-(\gamma(t)+\mu)](\partial u_1/\partial x)^2+$$
$$+(\alpha_1+\beta^2/4-\mu)u_1^2+\beta u_1u_2+(1-\mu)u_2^2\}dx \tag{2.3}$$

Пусть выполняется условие

$$(1-\mu)\pi^2-(\gamma(t)+\mu)>\varepsilon, \quad \varepsilon=\mathrm{const}>0 \tag{2.4}$$

Тогда из (2.3) получаем оценку

$$(u, [B(t)-\mu M^{\vee}]u)\geqslant\int_0^1[\{(1-\mu)\pi^2-(\gamma(t)+\mu)]\pi^2+$$
$$+\alpha_1+\beta^2/4-\mu\}u_1^2+\beta u_1u_2+(1-\mu)u_2^2]dx \tag{2.5}$$

Условия положительной определенности квадратичной формы в (2.5) имеют вид

$$\begin{gathered}\varepsilon\pi^2+\alpha_1+\beta^2/4-\mu>0\\ \varepsilon\pi^2+\alpha_1+\beta^2/4-\mu>{}^1/_4\beta^2/(1-\mu)\end{gathered} \tag{2.6}$$

Так как ${}^1/_4\beta^2/(1-\mu)>0$, то система неравенств (2.6) эквивалентна одному неравенству

$$\varepsilon\pi^2+\alpha_1+\beta^2/4-\mu>{}^1/_4\beta^2/(1-\mu) \tag{2.7}$$

Таким образом, имеем следующие условия положительной определенности [15—18] функционала V относительно меры $\rho(u, 0)$:

$$\begin{gathered}0<\mu<1, \quad (1-\mu)\pi^2-(\mu+\varepsilon)>\gamma(t)\\ \alpha_1>\mu-\beta^2/4-\varepsilon\pi^2+{}^1/_4\beta^2/(1-\mu), \quad \varepsilon=\mathrm{const}>0\end{gathered} \tag{2.8}$$

Условия (2.8) выражены наперед заданными величинами, связанными с исходными параметрами системы.

3. Задача о собственных значениях для исходной системы. Для оператора (1.9) имеем сопряженный оператор $L^*(t)$ в виде следующей матрицы

$$L^*(t)=\begin{vmatrix} 0 & -\partial^4/\partial x^4-f(t)\partial^2/\partial x^2+\eta\partial/\partial x\\ 1 & -\beta\end{vmatrix} \tag{3.1}$$

Рассмотрим [15, 17—19] оператор $N(t)=L^*(t)B(t)+B(t)L(t)+B^{\cdot}(t)$, $B^{\cdot}(t)=dB/dt$, в явном виде имеющий представление

$$N(t)=\begin{vmatrix} -\beta\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}-h(t)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -g(t)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\eta\dfrac{\partial}{\partial x}+\delta_-\\ -g(t)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\eta\dfrac{\partial}{\partial x}+\delta_- & -\beta\end{vmatrix} \tag{3.2}$$

Вычисляя производную по t от обоих частей равенства (2.2) вдоль траекторий $v(t, x)$, $w(t, x)\in W$, находим $(v, N(t)w)=(w, N(t)v)$. Следовательно, оператор $N(t)$ есть самосопряженный в смысле определения (2.2).

Задача на собственные значения, соответствующая соотношениям (2.2)–(2.8), определяется операторным уравнением [19]:

$$\begin{gathered} N(t)u=\lambda B(t)u, \quad u\in W\subset H, \quad t\in T_1\supseteq T \\ u(t,0)=u(t,1)=\partial^2u(t,0)/\partial x^2=\partial^2 u(t,1)/\partial x^2=0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

При этом искомый собственный вектор $u\in W$ двухкомпонентный: $u=\{y_1, y_2\}$. Методом исключения систему (3.3) сведем к уравнению лишь для одной компоненты, например, для y_1. Действительно, со второго уравнения (3.3) найдем выражения для y_2, $\partial y_2/\partial x$, $\partial^2 y_2/\partial x^2$, после подстановки которых в первое уравнение (3.3) получаем

$$\begin{gathered} c_4(\lambda)\partial^4 y_1/\partial x^4+c_2(\lambda)\partial^2 y_1/\partial x^2+c_0(\lambda)y_1=0 \\ c_4(\lambda)=(\lambda+\beta)^2-[f(t)-\gamma(t)]^2, \quad c_2(\lambda)=(\lambda+\beta)^2\gamma(t)+ \\ +2[f(t)-\gamma(t)](\alpha_1+\beta^2/4)-(d\gamma(t)/dt)(\lambda+\beta)+\eta^2 \\ c_0(\lambda)=(\lambda+\beta)^2\alpha_1-(\alpha_1+\beta^2/4)^2 \end{gathered} \tag{3.4}$$

При условии $c_4(\lambda)\neq 0$ перепишем задачу (3.3) в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4}+k\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}+cy_1=0, \qquad k=\frac{c_2(\lambda)}{c_4(\lambda)}, \qquad c=\frac{c_0(\lambda)}{c_4(\lambda)} \\ y_1(t,0)=y_1(t,1)=0, \qquad \frac{\partial^2 y_1(t,0)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y_1(t,1)}{\partial x^2}=0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

При фиксированных значениях t уравнение (3.5) имеет постоянные коэффициенты. Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^4+kr^2+c=0 \tag{3.6}$$

имеет корни

$$\bar r_{1,2}=\pm i\left(\frac{k}{2}+\left(\frac{k^2}{4}-c\right)^{1/2}\right)^{1/2}, \qquad \bar r_{3,4}=\pm i\left(\frac{k}{2}-\left(\frac{k^2}{4}-c\right)^{1/2}\right)^{1/2} \tag{3.7}$$

Рассмотрим случай, когда коэффициент $k(t)$ является положительным при всех $t\in T$. Для этих значений k, t, используя корни (3.7), получаем две последовательности собственных функций:

1. При $c>0$ и $k^2>4c$:

$$y_1(t,x)=C_1(t)\sin r_1x+C_2(t)\cos r_1x+C_3(t)\sin r_2x+C_4(t)\cos r_2x \tag{3.8}$$

Используя граничные условия (1.3), получаем следующую систему уравнений относительно коэффициентов $C_i(t)$ $(i=1,2,3,4)$:

$$\begin{gathered} C_2(t)+C_4(t)=0, \quad C_1(t)\sin r_1+C_2(t)\cos r_1+C_3(t)\sin r_2+C_4(t)\cos r_2=0, \\ r_1^2C_1(t)+r_2^2C_3(t)=0 \\ r_1^2C_1(t)\cos r_1+r_1^2C_2(t)\sin r_1+r_2^2C_3(t)\cos r_2+r_2^2C_4(t)\sin r_2=0 \end{gathered} \tag{3.9}$$

Записывая условие существования нетривиального решения системы (3.9), находим, что r_1, r_2 удовлетворяют условию

$$\begin{gathered} (r_1^4+r_2^4-2r_1^2r_2^2)\sin r_1 \sin r_2=0 \\ r_{1,2}=(k/2\pm(k^2/4-c)^{1/2})^{1/2} \end{gathered} \tag{3.10}$$

2. При $c<0$ и $k^2>4c$:

$$y_1(t,x)=C_1(t)\sin r_1x+C_2(t)\cos r_1x+C_3(t)\,\mathrm{sh}\, r_2x+C_4(t)\,\mathrm{ch}\, r_2x \tag{3.11}$$

Для определения коэффициентов $C_i(t)$ в (3.11) имеем следующую систему уравнений

$$C_2(t)+C_4(t)=0, \quad C_1(t)\sin r_1+C_2(t)\cos r_1+C_3(t)\operatorname{sh} r_2+C_4(t)\operatorname{ch} r_2=0,$$
$$-r_1^2C_2(t)+r_2^2C_4(t)=0 \quad -r_1^2C_1(t)\sin r_1-r_1^2C_2(t)\cos r_1+r_2^2C_3(t)\operatorname{sh} r_2+ +r_2^2C_4(t)\operatorname{ch} r_2=0 \tag{3.12}$$

Отсюда следует, что r_1, r_2 должны удовлетворять равенству

$$(r_1^4+r_2^4+2r_1^2r_2^2)\sin r_1 \operatorname{sh} r_2=0 \tag{3.13}$$
$$r_{1,2}=(\pm k/2+k^4/4-c)^{1/2})^{1/2}$$

Из условий рассматриваемой задачи на собственные значения следует, что существует бесконечное дискретное множество собственных значений λ_n, при которых пары чисел (k_n, c_n), соответствующие числам λ_n, будут удовлетворять условиям (3.10) либо (3.13).

Запишем в развернутом виде выражение для $k(t)$:

$$k(t)=\{(\lambda+\beta)^2\gamma(t)+2[f(t)-\gamma(t)](\alpha_1+\beta^2/4)- -(\lambda+\beta)d\gamma(t)/dt+\eta^2\}/\{(\lambda+\beta)^2-[f(t)-\gamma(t)]^2\} \tag{3.14}$$

Отсюда имеем для определения λ_n уравнение

$$(\lambda_n+\beta)^2+\frac{\gamma^{\cdot}(t)}{k_n(t)-\gamma(t)}(\lambda_n+\beta)-\frac{2[f(t)-\gamma(t)](\alpha_1+\beta^2/4)}{k_n(t)-\gamma(t)}- -\frac{k_n(t)[f(t)-\gamma(t)]^2}{k_n(t)-\gamma(t)}-\frac{\eta^2}{k_n(t)-\gamma(t)}=0 \tag{3.15}$$

При каждом $t\in T$ для максимального собственного значения $\lambda_{\max}(t)$ получаем выражение

$$\lambda_{\max}(t)=\max_{k_n}\left\{-\beta-\frac{\gamma^{\cdot}(t)}{2[k_n-\gamma(t)]}+\left[\left(\frac{\gamma^{\cdot}(t)}{2[k_n-\gamma(t)]}\right)^2+ +\frac{2[f(t)-\gamma(t)](\alpha_1+\beta^2/4)}{k_n-\gamma(t)}+\frac{[f(t)-\gamma(t)]^2k_n}{k_n-\gamma(t)}+ +\frac{\eta^2}{k_n-\gamma(t)}\right]^{1/2}\right\} \quad (n=1,2,3,\ldots) \tag{3.16}$$

Величина (3.16) становится неограниченной, когда $k_n=\gamma(t)$ $(\gamma(t)>0)$ при некотором целом n. В этом случае из явных выражений для $k(t)$, $c(t)$ получается равенство

$$c_n(\lambda+\beta)^2+\frac{4c_n}{\gamma^2(t)}\left(\alpha_1+\frac{\beta^2}{4}\right)\left[\frac{\gamma(t)[f(t)-\gamma(t)]}{2(\alpha_1+\beta^2/4)}- -\frac{\gamma^2(t)\eta^2}{4(\alpha_1+\beta^2/4)^2}\right]=(\lambda+\beta)^2\alpha_1-\left(\alpha_1+\frac{\beta^2}{4}\right)^2 \tag{3.17}$$

из которого по необходимости получаем, что

$$\gamma^2(t)=4c_n, \quad c_n=\alpha_1 \tag{3.18}$$

если заранее задаваемая функция $\gamma(t)$ удовлетворяет квадратному уравнению

$$\gamma^2(t)[2(\alpha_1+\beta^2/4)+\eta^2]-\gamma(t)2(\alpha_1+\beta^2/4)f(t)-4(\alpha_1+\beta^2/4)^2=0 \tag{3.19}$$

Отсюда имеем, что и $k_n^2=4c_n$. Следовательно, собственное значение $\lambda_{\max}(t)$ будет неограниченным тогда, когда пара $(k_n, c_n)=(\gamma, \alpha_1)$ удовлетворяет одному из условий (3.10) или (3.13). Однако это не осуществимо, ибо, как видно из (3.18), (3.19), такая пара противоречит условиям 1 из (3.8) и, тем более, условиям 2 из (3.11). Таким образом, условия исходной задачи, в том числе условия положительной определенности (2.8) функционала (2.1) обеспечивают ограниченность собственных значений задачи (3.3). Это убеждает, что при условиях (3.19) и любом целом

n имеем $k_n \neq \gamma(t)$ для всех $t \in T$. Все k_n $(n=1, 2, \ldots)$, как следует из условий (2.8), должны удовлетворять неравенству

$$k_n > (1-\mu)\pi^2 - (\mu+\varepsilon), \quad n=1, 2, 3, \ldots \tag{3.20}$$

совместно с условиями (3.10) или (3.13) при каждом $t \in T$. Кроме того, при каждом фиксированном $t \in T$ величины k_n можно расположить в порядке их возрастания: $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$. Поэтому для каждого фиксированного момента времени t, как следует из (3.16), максимум λ достигается либо при $k=k_1$, либо при $k=k_\infty$ в зависимости от значения t. Если $k_n \to +\infty$, то λ_n стремится к пределу $\lambda_\infty = -\beta + f(t) - \gamma(t)$. Следовательно, имеет смысл величина [21, 23]:

$$\mathbf{M} = \sup_{t \in T} |\lambda_{\max}(t)| \tag{3.21}$$

зависящая от условий (3.10) или (3.13) и (3.20).

Одновременно убедились, что значение $\lambda=0$ в задаче (3.3) отсутствует. Следовательно, собственные векторы задачи (3.3) с самосопряженными операторами $N(t)$, $B(t)$ образуют полную систему в W.

4. Достаточные условия технической устойчивости исходного процесса. Для решения основной задачи применим метод сравнения [6—18, 27], используя свойства задачи на собственные значения (3.3). Обозначим фиксированное значение μ^* малого параметра μ, удовлетворяющее условиям (2.8), (3.20). На интервале $T_1 = [t_0, L\mu^{*-1}]$ рассмотрим отношение двух скалярных произведений $\lambda(t, u) = (u, N(t)u)/(u, B(t)u)$. Из теоремы Релея об экстремальных свойствах отношений $\lambda(t, u)$ следует, что

$$\lambda(t, u) \leqslant \lambda_{\max}(t), \; t \in T \subseteq T_1 \tag{4.1}$$

Вычисляя производную по времени от функционала $V[u, t]$ вдоль решения задачи (1.6)—(1.8) или, что эквивалентно, вдоль решения (1.1)—(1.3), получим неравенство

$$dV[u(t, x), t]/dt \leqslant \lambda_{\max}(t)\, V[u(t, x), t], \quad t \in T \subseteq T_1 \tag{4.2}$$

позволяющее рассмотреть соответствующую задачу Коши сравнения

$$dz/dt = \lambda_{\max}(t) z, \quad t \in T_1 \supseteq T \tag{4.3}$$

$$z(t)|_{t=t_0} = y_0 \geqslant V[u_0, t] \tag{4.4}$$

где $V[u_0, t] = (u_0(x), B(t_0)u_0(x))$, оператор $B(t_0) = B(t)|_{t=t_0}$ согласно (2.1).

Тогда при $t \in T \cap T_1$ вдоль решения $u(t, x)$ системы (1.6)—(1.8) справедлива оценка

$$V[u(t, x), t] \leqslant y_0 \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \lambda_{\max}(\tau)\, d\tau \right\} \tag{4.5}$$

Отсюда имеем для исходного процесса (1.1)—(1.3):

$$\begin{gathered} V[w(t, x), \partial w(t, x)/\partial t, t] \leqslant y_0 \exp[\mathbf{M}(L\mu_0^{-1} - t_0)] \\ \mu_0^{-1} = \min\{\mu^{-1}, \mu^{*-1}\}, \quad t \in T \cap T_1 \end{gathered} \tag{4.6}$$

Следовательно, исходная система (1.1)—(1.3) при указанных выше условиях на ее параметры технически устойчива на конечном промежутке времени $T \cap T_1$ относительно меры $\rho(u, 0)$ [15].

Задача о собственных значениях (3.5) также имеет последовательность собственных функций вида [19]:

$$y_1(t, x) = C(t) \sin(n\pi x) \tag{4.7}$$

при $n=1, 2, \ldots$, где $C(t) \neq 0$ — произвольная непрерывная функция параметра t. Используя (4.7), находим уравнение для определения $\lambda_{\max}(t)$:

$$\begin{gathered} (\lambda+\beta)^2 [\pi^4 n^4 - \pi^2 n^2 \gamma(t) + \alpha_1] + (\lambda+\beta)\pi^2 n^2 \dot{\gamma}(t) - [f(t) - \gamma(t)]^2 \pi^4 n^4 - \\ -2\pi^2 n^2 [f(t) - \gamma(t)](\alpha_1 + \beta^2/4) - (\alpha_1 + \beta^2/4)^2 - \pi^2 n^2 \eta^2 = 0 \end{gathered} \tag{4.8}$$

Максимальное собственное значение задачи (3.3) в случае (4.7) равно

$$\lambda_{\max}(t)=\max_n\left\{-\beta-\frac{\gamma^{\cdot}(t)}{2\pi^2n^2Q}+\left[\left(\frac{\gamma^{\cdot}(t)}{2\pi^2n^2Q}\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{Q}\left(\left[f(t)-\gamma(t)+\frac{4\alpha_1+\beta^2}{4\pi^2n^2}\right]^2+\frac{\eta^2}{\pi^2n^2}\right)\right]^{1/2}\right\} \tag{4.9}$$

$$Q=1-\gamma(t)/n^2\pi^2+\alpha_1/n^2\pi^2 \tag{4.10}$$

Если $\gamma(t)$ и α_1 выбраны таким образом, чтобы выполнялись условия (2.8) и условие

$$Q\neq 0 \tag{4.11}$$

тогда (4.9) является ограниченной величиной при всех $t\in T$. Очевидно, как частный случай, из выполнения условий (2.8) может следовать выполнение условия (4.11). Для случая (4.7)—(4.11) условия технической устойчивости на конечном промежутке времени $T\cap T_1$ также определяются скалярной задачей сравнения (4.1), (4.2), где $\lambda_{\max}(t)$ задается выражениями (4.9), (4.10) при условиях (2.8), (4.11).

Обозначим бесконечный промежуток времени $I=[t_0,+\infty)$, $t_0\geqslant 0$. Если функция $\lambda_{\max}(t)$ такая, что интеграл $\int_{t_0}^{t}\lambda_{\max}(\tau)\,d\tau$ является непрерывной ограниченной функцией на любом временном промежутке $T_1\subseteq I$, то исходная система (1.1)—(1.3), определенная на каждом промежутке $T_1\subseteq I$, $(T_1\supseteq T)$, технически устойчива на бесконечном промежутке времени I по мере $\rho(u,0)$. Условием, обеспечивающим техническую устойчивость исходного процесса в области I, будет выполнение неравенства

$$\int_{t_0}^{t}\lambda_{\max}(\tau)\,d\tau\leqslant M_1(t) \tag{4.12}$$

где $M_1(t)$ — наперед заданная непрерывная ограниченная функция переменного $t\in I$, зависящая от свойств задачи о собственных значениях (3.3). Очевидно, выбор функции $M_1(t)$ можно связать с заданием указанной выше функции $\gamma(t)$, постоянными α_1, ε. Например, заранее положить

$$M_1(t)=\int_{t_0}^{t}[f(\tau)-\gamma(\tau)]\,d\tau-\beta \tag{4.13}$$

Одним из возможных условий технической устойчивости исходного процесса на бесконечном промежутке времени будет также условие

$$\left.\int_{t_0}^{t}\lambda_{\max}(\tau)\,d\tau\right| \to \Phi(t_0),\qquad t\to+\infty \tag{4.14}$$

где $\Phi(t_0)$ — значение в момент t_0 первообразной $\Phi(\tau)=\int\lambda_{\max}(\tau)\,d\tau$. Это значит, учитывая равенство

$$\Phi(t)-\Phi(t_0)\,|=\left|\int_{t_0}^{t}\lambda_{\max}(\tau)\,d\tau\right|$$

что $\Phi(t)\to 0$ при $t\to+\infty$.

При этом, очевидно, на каждом конечном промежутке $T\subseteq I$, как угодно большом, будут иметь место оценки типа (4.5).

Если исходный процесс (1.1)—(1.3) технически устойчив на бесконечном промежутке времени I, т. е. выполняются условия типа (4.5) при всех $T\subseteq I$ и решение задачи сравнения (4.1), (4.2) стремится к нулю при $t\to+\infty$:

$$y_0\exp\left(\int_{t_0}^{t}\lambda_{\max}(\tau)\,d\tau\right)\to 0,\qquad t\to+\infty \tag{4.15}$$

тогда имеет место свойство асимптотической технической устойчивости по мере $\rho(u,0)$ системы (1.1)—(1.3). Условия (4.12)—(4.15) и соответствующие выводы относятся как к (3.16), так и к (4.9).

5. Условия технической устойчивости нелинейного движения панели в газовом потоке. Используя выше приведенные основные данные, рассмотрим техническую устойчивость нелинейно параметрически возбуждаемых панелей в газовом потоке. Краевая задача рассматриваемого процесса может быть приведена к виду, где основное уравнение движения имеет представление

$$\partial u(t,x)/\partial t = L(t,\mu)u(t,x) \equiv L(t)u(t,x) + \\ +\mu A(t, u_1(t,x), u_2(t,x), \ldots), \quad t\in T, \quad x\in X \tag{5.1}$$

при начальных и граничных условиях (1.7), (1.8). Нелинейную вектор-функцию A, непрерывную в заданной области изменения ее аргументов, выберем, например, в виде

$$A(t,u) = \left\| \begin{matrix} 0 \\ [1-u_1^2(t,x)]\,u_2^3(t,x) \end{matrix} \right\| \tag{5.2}$$

Одновременно рассматриваем линейную задачу (1.6)–(1.8). Считаем, что задача (5.1), (5.2), (1.7), (1.8) имеет однозначное непрерывное решение $u(t,x,\mu)$ в области $T\times X$ при $\mu\in(0,1)$, обладающее в $T\times X$ необходимыми непрерывными производными и принадлежащее вместе с этими производными вещественному гильбертовому пространству $L^2(X)$. Из предположений на исходные данные процесса следует, что $L(t,\mu)$: $W^\circ(T\times X)\to H$. Здесь W° есть множество двухкомпонентных векторов $u\in H$, компоненты которых имеют по t, x необходимые частные производные согласно (5.1), (5.2), (1.7), (1.8), принадлежащие $L^2(X)$ при $t\in T$ и удовлетворяющие граничным условиям (1.8). Также $L(t)$: $W^\circ\to H$. Решение линейной задачи (1.6)–(1.8) и нелинейной (5.1), (5.2), (1.7), (1.8) определяют траекторию в W°.

Вычислим производную по времени от функционала (2.1) вдоль решения задачи (5.1), (5.2), (1.7), (1.8):

$$dV[u(t,x,\mu),t]/dt = (u(t,x,\mu), N(t)u(t,x,\mu)) + \\ +2\mu(A(t,u(t,x,\mu)), B(t)u(t,x,\mu)) \tag{5.3}$$

Пусть выполнены условия

$$|(u(t,x,\mu), N(t)u(t,x,\mu)) - (u(t,x), N(t)u(t,x))| \leqslant C_1\hat{}p_1(t); \\ |(A(t,u(t,x,\mu)), B(t)u(t,x,\mu)) - \\ -(A(t,u(t,x)), B(t)u(t,x))| \leqslant C_2\hat{}p_2(t)\,|A(t,u(t,x)), B(t)u(t,x))| \leqslant \\ \leqslant C_3\hat{}p_3(t); \; t\in T \tag{5.4}$$

где постоянные $C_1\hat{}$, $C_2\hat{}$, $C_3\hat{}$, ограниченные неотрицательные функции $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ — наперед заданы, $u(t,x)$ — решение линейной задачи (1.6)–(1.8). Производная (5.3) имеет оценку

$$dV[u(t,x,\mu),t]/dt \leqslant \lambda_{\max}(t)V[u(t,x,\mu),t] + p(t,\mu); \; t\in T, \; \mu\in(0,1) \tag{5.5}$$

где $p(t,\mu) = C_1\hat{}p_1(t) + \mu[C_2\hat{}p_2(t) + C_3\hat{}p_3(t)]$ и $0\leqslant p(t,\mu)\leqslant C$; C — наперед заданная постоянная, зависящая от $\mu\in(0,1)$. Пусть при всех $\mu\in(0,1)$ функция $p(t,\mu)$ интегрируемая в T. Обозначим $\sigma(t,\mu) = \int_{t_0}^t p(\tau,\mu)d\tau$. Полагая $k(t,\mu) = V[u(t,x,\mu),t] - \sigma(t,\mu)$, получаем вместо (5.5) неравенство

$$dk(t,\mu)/dt \leqslant \lambda_{\max}(t)[k(t,\mu) - \sigma(t,\mu)], \; t\in T, \; \mu\in(0,1) \tag{5.6}$$

Рассмотрим скалярную задачу сравнения

$$dy/dt = \lambda_{\max}(t)[y + \sigma(t,\mu)], \; t\in T_1 \supseteq T, \; \mu\in(0,1) \tag{5.7}$$

$$y(t)|_{t=t_0} = y_0 \geqslant V[u_0(x), t_0] \tag{5.8}$$

Используя при $t \in T_1$ решение задачи (5.7), (5.8):

$$\bar{y}(t,\mu) = y_0 \exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda_{\max}(\tau)\,d\tau\right] + \int_{t_0}^{t} \left\{ p(t,\mu) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[\int_{t_0}^{\tau} \lambda_{\max}(s)\,ds\right]\right\} d\tau - \sigma(t,\mu) \qquad (5.9)$$

по теореме 9.5 о дифференциальных неравенствах из [27] находим следующую оценку

$$V[u(t,x,\mu),t] \leqslant P(t,\mu), \qquad P(t,\mu) = y_0 \exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda_{\max}(\tau)\,d\tau\right] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left\{ p(t,\mu) \exp\left[\int_{\tau_0}^{\tau} \lambda_{\max}(s)\,ds\right]\right\} d\tau, \qquad t \in T \cap T_1 \qquad (5.10)$$

Отсюда для исходного процесса (5.1), (5.2), (1.7), (1.8) имеем

$$V[w(t,x,\mu), \partial w(t,x,\mu)/\partial t, t] \leqslant K$$

$$K \equiv [y_0 + C(L\mu_0^{-1} - t_0)] \exp[\mathbf{M}(L\mu_0^{-1} - t_0)], \quad t \in T \cap T_1 \qquad (5.11)$$

Следовательно, исходная нелинейная система (5.1), (5.2), (1.7), (1.8) технически устойчива по мере $\rho(u, 0)$ на конечном промежутке времени $T \cap T_1$ при указанных выше условиях на ее параметры. Для случая (4.7)—(4.11) условие технической устойчивости для (5.1), (5.2), (1.7), (1.8) на конечном промежутке $T \cap T_1$ определяются аналогично.

Если условие (5.11) справедливо на любом временном промежутке $T_1 \subseteq I$, то нелинейная система (5.1), (5.2), (1.7), (1.8), определенная на каждом $T_1 \subseteq I$, $(T_1 \supseteq T)$, технически устойчива на бесконечном промежутке времени I по мере $\rho(u, 0)$. В частности, это будет иметь место, если функции $\lambda_{\max}(t)$, $p(t, \mu)$ таковы, что при всех $T_1 \subseteq I$, $\mu \in (0, 1)$,

$$P(t, \mu) \leqslant K. \qquad (5.12)$$

Если система (5.1), (5.2), (1.7), (1.8) технически устойчива в области I и выполняется, кроме этого, условие $P(t, \mu) \to 0$ при $t \to +\infty$, $\mu \in (0, 1)$, тогда для этого процесса имеет место свойство асимптотической технической устойчивости по мере $\rho(u, 0)$. Условия технической устойчивости нелинейного процесса существенно отличаются от аналогичных условий линейного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карачаров К. А., Пилютик А. Г.* Введение в техническую теорию устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1962. 242 с.
2. *Чжан Сы-Ин.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени // Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 230–238.
3. *Байрамов Ф. Д.* О технической устойчивости систем с распределенными параметрами при постоянно действующих возмущениях // Изв. вузов. Авиац. техника. 1974. Вып. 2. С. 5–11.
4. *Сиразетдинов Т. К.* Метод функций Ляпунова при исследовании некоторых свойств процессов с последствием // Прямой метод в теории устойчивости и его приложение. Новосибирск: Наука, 1981. С. 64–75.
5. *Кириченко Н. Ф.* Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1972. 212 с.
6. *Матвийчук К. С.* Замечания к методу сравнения для системы дифференциальных уравнений с быстро вращающейся фазой // Укр. матем. журн. 1982. Т. 34. № 4. С. 456–461.
7. *Матвийчук К. С.* Принцип сравнения для уравнений системы связанных тел с элементами демпфирования // Укр. матем. журн. 1982. Т. 34. № 5. С. 625–630.
8. *Матвийчук К. С.* К исследованию технической устойчивости систем связанных тел с элементами демпфирования // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 5. С. 100–106.
9. *Матвийчук К. С.* Об условиях существования и устойчивости решения сингулярных интегральных уравнений Кирквуда – Зальцбурга. Ч. 1, II // Теорет. и матем. физика. 1981. Т. 49. № 1. С. 63–76.
10. *Матвийчук К. С.* Об условиях существования и устойчивости решения сингулярных интегральных уравнений Кирквуда – Зальцбурга. Ч. III // Теорет. и матем. физика. 1982. Т. 51. № 1. С. 86–101.
11. *Матвийчук К. С.* О методе сравнения для дифференциальных уравнений, близких к гиперболическим // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 11. С. 2009–2011.

12. *Матвийчук К. С.* О технической устойчивости некоторых систем с распределенными параметрами // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 8. С. 97–104.
13. *Матвийчук К. С.* О технической устойчивости нелинейных динамических систем с медленными и быстрыми движениями // ДАН УССР, серия А. 1986. № 2. С. 11–15.
14. *Матвийчук К. С.* О неравенствах для решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Матем. физика и нелин. механика. 1986. Вып. 5 (39). С. 82–87.
15. *Матвийчук К. С.* Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 210–218.
16. *Матвийчук К. С.* Исследование устойчивости прямолинейных трубопроводов с транспортируемой жидкостью // Проблемы трубопроводного транспорта нефти и газа. Тез. докл. Ивано-Франковск: Недра, 1985. С. 220–221.
17. *Матвийчук К. С.* Об условиях устойчивости нелинейных параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Вычисл. и прикл. математика. 1986. Вып. 58. С. 107–112.
18. *Матвийчук К. С.* Техническая устойчивость нелинейных параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 11. С. 2001–2004.
19. *Hsu C. S., Lee T. H.* A Stability Study of Continuos Systems under Parametric Excitations Via Liapunov's Direct Method // IUTAN Symposium on Instability of Continuos Systems. West Germany, 1969. Berlin: Springer, 1971. P. 112–118.
20. *Parks P. C.* A Stability Criterion for Panel Flutter Via the Second Method of Liapunov // AIAA Journal. 1966. V. 4. No 1. P. 175–177.
21. *Leipholz H.* Stability of Elastic Systems. Alphen aan den Rijn, The Netherlands: Sijthoff et Noordhoff, 1980. 475 p.
22. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
23. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова. Киев: Наук. думка, 1981. 412 с.
24. *Мовчан А. А.* О устойчивости процессов деформирования сплошных тел // Arch. Mech. Stosowanej. 1983. V. 15. No. 5. P. 659–682.
25. *Скоробагатько В. Я.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1980. 243 с.
26. *Diaz J. B., Metcalf F. T.* A Functional Equation for Rayleigh Quotient Eigenvalues and Some Applications // J. Math. and Mech. 1968. V. 17. No. 7. P. 623–630.
27. *Szarski J.* Differential Inequalities. Warszawa: PWN, 1967. 256 p.

Киев

Поступила в редакцию
21.V.1987