

УДК 533.6.013.42

© 1990 г.

Л. И. СЛЕПЯН, С. В. СОРОКИН

**СИСТЕМА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДИНАМИКИ СОСТАВНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ,
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ЖИДКОСТЬЮ**

В [1] был сформулирован вариант метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) для расчета колебаний тонкостенных конструкций, взаимодействующих с однородной средой. В [2] этот метод развит применительно к задачам стационарной и нестационарной гидроупругости. Примеры его использования показали, что наиболее трудоемкими являются построение фундаментальных решений (функций Грина) для конструкции и вычисление их свертки с фундаментальным решением для среды. В [2] отмечена возможность существенного повышения эффективности метода за счет использования вместо «двухточечных» функций Грина рассматриваемой конструкции решений, отвечающих однородным безграничным конструкциям, из частей которых составлена данная. Эти фундаментальные решения (как и для среды) зависят от меньшего числа переменных: от вектора, проведенного из «источника» до «точки наблюдения», или лишь от расстояния между ними. Настоящая статья посвящена изложению этого варианта метода ГИУ.

1. Система граничных интегральных уравнений. Рассмотрим тонкостенную конструкцию конечных размеров, составленную из N частей. Соответствующие этим частям поверхности обозначим $S_n, n=1, 2, \dots, N$. Предположим, что каждая из них представляет собой часть неограниченной оболочки (цилиндрической, сферической) или плоской пластины. Пусть в контакте со сжимаемой жидкостью находятся участки конструкции на поверхностях $S_n, n=1, 2, \dots, M \leq N$, причем конструкция подвержена действию монохроматической нагрузки q , являющейся источником колебаний ($n=1, 2, \dots, N$).

Граничное интегральное уравнение, описывающее поведение жидкости, имеет вид [2–4]:

$$(1-C)p(X) + \int_S [F_0(X, Y)p(Y) - i\rho\omega G(|X-Y|)u(Y)] dS_Y = 0 \quad X, Y \in S \quad (1)$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения, зависимость от времени принята в виде $\exp(-i\omega t)$ и временной множитель опущен, ω — частота колебаний, ρ — плотность жидкости, X и Y — координаты точки наблюдения и источника, S — граница области V , заполненной жидкостью (область V может быть и полуограниченной), u — нормальная к S (нормаль — внешняя по отношению к V) составляющая скорости частиц жидкости, p — контактное давление, $4\pi C$ — телесный угол, занимаемый жидкостью (там, где существует касательная к S плоскость, $C=1/2$).

Функция $G(|X-Y|)$ представляет собой фундаментальное решение уравнения Гельмгольца — потенциал, отвечающий источнику единичной интенсивности в жидкости, $i\rho\omega G(|X-Y|)$ — соответствующее ему давление, $F_0(X, Y)$ — производная от G по нормали к S в точке Y :

$$F_0(X, Y) = \lambda F'(|X-Y|), \quad F'(|X-Y|) = dG(|X-Y|)/d|X-Y|$$

$$\lambda = \text{grad}_Y |X-Y| \cdot \mathbf{n}(Y) = \frac{Y-X}{|X-Y|} \cdot \mathbf{n}(Y)$$

где λ — проекция единичного вектора, направленного из X в Y на n , n — единичная внешняя нормаль к S .

Пусть движение каждой из частей конструкции описывается уравнениями (с суммированием по греческим индексам)

$$\begin{aligned} L_{n\alpha j} w_{n\alpha}(X) &= q_{nj}(X) + \delta_{3j} p(X) H(X), \quad X \in S_n, \\ H(X) &= 1 \quad (X \in S), \quad H(X) = 0 \quad (X \in S) \\ n &= 1, 2, \dots, N; \quad j, \alpha = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (2)$$

и граничными условиями (условиями сопряжения на границе смежных участков S_m и S_n), выражающими алгебраическую связь между граничными перемещениями и (или) усилиями

$$A_{\alpha j}{}^{mn} w_{m\alpha} + A_{\alpha j}{}^{nm} w_{n\alpha} + B_{\alpha j}{}^{mn} Q_{m\alpha} + B_{\alpha j}{}^{nm} Q_{n\alpha} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, 2K) \quad (3)$$

Здесь $w_{n\alpha}$ — компоненты вектора обобщенных перемещений конструкции на участке поверхности S_n , число K которых определяется математической моделью конструкции, $L_{n\alpha j}$ — дифференциальные операторы, определенные в области S_n ; $A_{\alpha j}{}^{mn}$, $B_{\alpha j}{}^{mn}$ — числовые коэффициенты. Условия (3) очевидным образом уточняются при переходе от линий сопряжения Γ_{mn} , для которых они написаны, к граничным линиям.

Для определенности нормальную к поверхности S составляющую вектора перемещения обозначим w_3 . Тогда при безотрывном движении связь между скоростью u и перемещением w_3 будет иметь вид

$$u(X) = -i\omega w_3(X) \quad (4)$$

а уравнение (1) можно записать так

$$(1-C)p(X) + \int_S [\lambda F(|X-Y|)p(Y) - \rho\omega^2 G(|X-Y|)w_3(Y)] dS_Y = 0 \quad (5)$$

Функции $w_k(Y)$, $k=1, 2, \dots, K$ должны быть представлены через заданную нагрузку q и неизвестное контактное давление при помощи зависимостей (2)–(3). Следуя [2], такое представление может быть сделано при помощи функций Грина, построенных для всей конструкции. Они зависят от двух (векторных) переменных. Последнее существенно затрудняет численное решение уравнения (5). (Заметим, что фундаментальные функции G и F зависят лишь от расстояния между источником и точкой наблюдения). Указанное затруднение преодолевается во всех тех случаях, когда отдельные участки конструкции представимы как части «однородных» систем: плоских пластин, цилиндрических и сферических оболочек. Динамику этих участков (с учетом их сопряжения) можно описать граничными интегральными уравнениями на единицу меньшей по сравнению с (5) размерности, ядра которых — функции Грина безграничных оболочек — зависят от одного векторного или скалярного аргумента.

Правую часть уравнения (5) представим суммой интегралов по указанным участкам

$$(1-C)p(X) + \sum_{n=1}^M \int_{S_n} [\lambda F(|X-Y|)p(Y) - \rho\omega^2 G(|X-Y|)w_{n3}(Y)] dS_Y = 0 \quad (7)$$

Входящая в (7) нормальная к S_n компонента перемещения конструкции определяется соотношением типа формулы Сомильяны (непосредственно следующим из теоремы Бетти):

$$\begin{aligned} w_{n3}(Y) &= \int_{\Gamma_n} [W_{n3\alpha}^0(Y-Z_\Gamma)Q_{n\alpha}(Z_\Gamma) - Q_{n3\beta\alpha}^0(Y-Z_\Gamma)v_\beta(Z_\Gamma)w_{n\alpha}(Z_\Gamma)] d\Gamma_Z + \\ &+ \int_{S_n} [q_\alpha(Z)W_{n3\alpha}^0(Y-Z) + p(Z)W_{n33}^0(Y-Z)H(Z)] dS_Z \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $w_{n\alpha}(Z_\Gamma)$, $Q_{n\alpha}(Z_\Gamma)$ — обобщенные перемещения и усилия, возникающие на контуре Γ_n рассматриваемого участка S_n , $W_{n3\alpha}^0(Y-Z_\Gamma)$ — функция Грина безграничной конструкции, соответствующей данному участку, $Q_{n3\beta\alpha}^0(Y-Z_\Gamma)$ — тензор усилий, соответствующий фундаментальному решению $W_{n3\alpha}^0$, $v_\beta(Z_\Gamma)$ — компоненты вектора единичной внешней нормали к контуру Γ_n . Подстановка зависимости (8) в (7) позволяет записать основное интегральное уравнение взаимодействия составной конструкции с жидкостью в виде:

$$\begin{aligned} (1-C)p(X) + \sum_{n=1}^M \left\{ \int_{S_n} [\lambda F(|X-Y|) - \rho\omega^2 \Phi_{n33}(X, Y)] p(Y) dS_Y - \right. \\ \left. - \rho\omega^2 \int_{\Gamma_n} [Q_{n\alpha}(Z_\Gamma) \Phi_{n3\alpha}(X, Z_\Gamma) + w_{n\alpha}(Z_\Gamma) \Psi_{n3\beta\alpha}(X, Z_\Gamma) v_\beta(Z_\Gamma)] d\Gamma_Z = \right. \\ = \rho\omega^2 \sum_{n=1}^M \int_{S_n} q_\alpha(Y) \Phi_{n3\alpha}(X, Y) dS_Y \\ \Phi_{n3\alpha}(X, Y) = \int_{S_n} G(|X-Z|) W_{n3\alpha}^0(Y-Z) dS_Z, \\ \Psi_{n3\beta\alpha}(X, Z_\Gamma) = \int_{S_n} G(|X-Y|) Q_{n3\beta\alpha}^0(Y-Z_\Gamma) dS_Y, \quad X \in S, \quad Y \in S_n, \quad Z_\Gamma \in \Gamma_n \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные значения усилий и перемещений определяются, в свою очередь, граничными интегральными уравнениями, получающимися из (8) при $n=1, 2, \dots, N$ (и аналогичными для остальных компонент вектора перемещения) в пределе при стремлении координаты Y к соответствующему контуру Γ_n :

$$\begin{aligned} w_{nj}(Y_\Gamma) = \int_{\Gamma_n} [Q_{n\alpha}(Z_\Gamma) W_{n\alpha j}^0(Y_\Gamma - Z_\Gamma) - Q_{n\beta\alpha}^0(Y_\Gamma - Z_\Gamma) v_\beta(Z_\Gamma) w_{n\alpha}(Z_\Gamma)] d\Gamma_Z + \\ + \int_{S_n} [q_\alpha(Z) W_{n\alpha j}^0(Y_\Gamma - Z) + p(Z) W_{n3j}^0(Y_\Gamma - Z) H(Z)] dS_Z \end{aligned} \quad (10)$$

Система граничных уравнений (9)–(10) замыкается условиями (3), представляющими собой контактные (для соседних участков конструкции) или граничные условия.

Приведенный здесь путь составления уравнений динамики конструкции, взаимодействующей с жидкостью, отличается от использованного в [2]. В граничное уравнение для жидкости (7) подставляется не зависимость нормальной скорости от давления, определяемая для конструкции в целом, а представления (8) для скорости на каждом из участков конструкции через давление и граничные значения усилий и перемещений. Это приводит к увеличению общего числа уравнений — дополнению основного уравнения (9) уравнениями (10). Последние, однако, на единицу меньшей размерности, чем (9), и поэтому такое увеличение несущественно. Вместе с тем указанный путь в отличие от [2] позволил представить ядра интегральных уравнений в виде сверток функций, зависящих лишь от одного векторного (или даже скалярного) аргумента (от $X-Y$ или от $|X-Y|$). Это резко снижает трудоемкость вычислений. Так, для плоской пластины и сферической оболочки в силу симметрии

$$W_{33}^0(X-Y) = f(|X-Y|) \quad (11)$$

где f — определенная функция, так же, как и $G = G(|X-Y|)$. Таким об-

разом, для участков указанных конструкций вычисление ядра Φ_{n33} основного уравнения (9) сводится к свертке функций, каждая из которых зависит лишь от одного переменного вместо четырех (для W_{33}^0) в случае первоначальной схемы из [2]. В случае круговой цилиндрической оболочки представление (11) невозможно: W_{33}^0 зависит как от $|X-Y|$, так и от ориентации вектора $X-Y$, но и в этом случае получаем зависимости лишь от двух переменных вместо четырех.

2. Соотношения третьего уровня. Выше была построена система двумерных и одномерных граничных интегральных уравнений, пригодная для случая «импедансных» условий (3) сопряжения участков конструкции (или граничных условий). Рассмотрим теперь более общий случай, когда на граничных линиях $\Gamma_{mn}(\Gamma_n)$ расположены подкрепляющие конструкцию ребра. При этом связь между граничными перемещениями и усилиями будет выражаться дифференциальными зависимостями, а именно, вместо коэффициентов $A_{\alpha j}^{mn}$, $B_{\alpha j}^{mn}$ в (3) имеем дифференциальные операторы (производные — по координате вдоль $\Gamma_{mn}(\Gamma_n)$). Положение здесь аналогично предыдущему: как и в случае жидкости (упругой среды), взаимодействующей на границе с упругой конструкцией, здесь также имеется «структурная граница». Аналогичным образом можно сформулировать и соотношения относительно искомых функций.

Пусть $W_{\alpha j}^{n\infty}(s, s')$ — фундаментальное решение для ребра (s — длина дуги в точке наблюдения, s' — в источнике). Тогда

$$w_{nj}(s) = \int_{\Gamma_n} W_{n\alpha j}^{00}(s, s') [Q_{n\alpha}(s') - Q_{m\alpha}(s') H(\Gamma_{mn})] ds' \quad (12)$$

Здесь $H(\Gamma_{mn})=1$ на линии сопряжения и $H(\Gamma_{mn})=0$ на границе и имеется в виду, что ребра непосредственно примыкают к конструкции (не содержится каких-либо промежуточных элементов, влияющих на их взаимодействие).

Подставляя (12) в (9) и (10), получаем систему уравнений относительно контактного давления p и граничных усилий $Q_{n\alpha}$.

Пусть теперь ребро однородно, т. е. прямолинейное, круговое или спиральное и, конечно, постоянного поперечного сечения. Тогда можно использовать фундаментальное решение для безграничного ребра и записать соотношение, следующее из теоремы Бетти, аналогичное по смыслу формуле (8), но меньшей размерности

$$w_{nj}(s) = \int_{\Gamma_n} [Q_{n\alpha}(s') - Q_{m\alpha}(s') H(\Gamma_{mn})] W_{n\alpha j}^{00}(s-s') ds' + Q_{n\alpha}(a) W_{n\alpha j}^{00}(s-a) - Q_{n\alpha}(b) W_{n\alpha j}^{00}(s-b) + w_{n\alpha}(b) Q_{n\alpha j}^{00}(s-b) - w_{n\alpha}(a) Q_{n\alpha j}^{00}(s-a) \quad (13)$$

где a, b — границы ребра: $a \leq s \leq b$, $Q_{n\alpha j}^{00}$ — внутренние усилия, соответствующие фундаментальному решению $W_{n\alpha j}^{00}$.

Полагая последовательно $s=a$, $s=b$, получаем из (13) уравнения, аналогичные по смыслу граничным интегральным уравнениям (10), но меньшей размерности — они становятся алгебраическими:

$$w_{nj}(a) = \int_{\Gamma_n} [Q_{n\alpha}(s') - Q_{m\alpha}(s') H(\Gamma_{mn})] W_{n\alpha j}^{00}(a-s') ds' + Q_{n\alpha}(a) W_{n\alpha j}^{00}(0) - Q_{n\alpha}(b) W_{n\alpha j}^{00}(a-b) + w_{n\alpha}(b) Q_{n\alpha j}^{00}(a-b) - w_{n\alpha}(a) Q_{n\alpha j}^{00}(0)$$

$$w_{nj}(b) = \int_{\Gamma_n} [Q_{n\alpha}(s') - Q_{m\alpha}(s') H(\Gamma_{mn})] W_{n\alpha j}^{00}(a-s') ds' + Q_{n\alpha}(a) W_{n\alpha j}^{00}(b-a) - Q_{n\alpha}(b) W_{n\alpha j}^{00}(0) + w_{n\alpha}(b) Q_{n\alpha j}^{00}(0) - w_{n\alpha}(a) Q_{n\alpha j}^{00}(b-a) \quad (14)$$

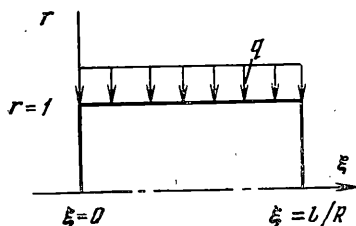
Соотношения (9), (10), (13), (14), дополненные граничными условиями (условиями сопряжения) для ребер (или система (9), (10), (12)), образуют трехуровневую иерархию граничных уравнений динамики тонкостенных составных подкрепленных конструкций, взаимодействующих с жидкостью.

Выражение ядер указанных интегральных уравнений в форме сверток фундаментальных решений для жидкости и отдельных частей конструкции дает достаточно ясное представление о роли параметров конкретной задачи и позволяет использовать асимптотические методы для ее упрощения (по поводу асимптотических методов в гидроупругости см. [6, 7]¹).

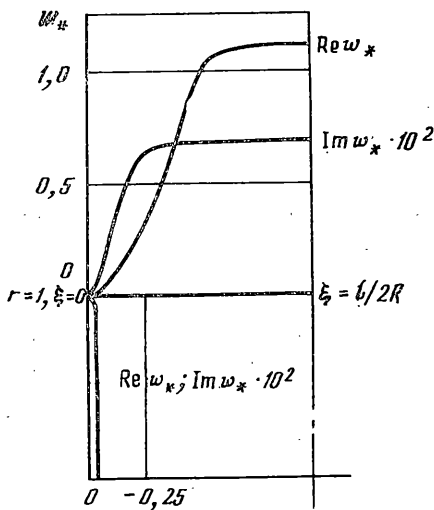
Предложенная здесь система уравнений удобна и в вычислительном отношении. В частности, вычисление ядер уравнений — сверток фундаментальных решений по участкам конструкции — проводится для каждого участка независимо от других. Таким образом, при изменении параметров конструкции на каком-либо ее участке меняется лишь часть коэффициентов матрицы общей системы — та, которая отвечает данному участку. Варьирование параметрами ребер жесткости и внутренних участков конструкции S_n ($n > M$) вообще не влияет на ядра двумерного уравнения (9).

3. Неканонический участок.

Пусть участок конструкции с границей Γ_n не может рассматриваться как часть какой-либо из упомянутых выше безгранич-



Фиг. 1



Фиг. 2

ных конструкций. Тогда представление типа (8) для этого участка невозможно. Определим (тем или иным способом) двухточечное фундаментальное решение $W_{n\alpha j}^0(X, Y)$, отвечающее свободной от усилий границе Γ_n ($\omega \neq 0$). Вместо (8) имеем:

$$w_{nj}(X) = \int_{S_n} [q_\alpha(Y) W_{n\alpha j}^0(X, Y) + p(Y) W_{n\beta j}^0(X, Y) H(Y)] dS_Y + \int_{\Gamma_n} Q_{n\alpha}(Y_\Gamma) W_{n\alpha j}^0(X, Y_\Gamma) d\Gamma_Y \quad (15)$$

Представление (15) заменяет для неканонического участка соответствующие зависимости в (8)–(10). Таким образом, возвращаемся к зависимостям из [2], но лишь для части конструкции.

4. Численный пример. Рассмотрим задачу о колебаниях в сжимаемой жидкости гладкой упругой цилиндрической оболочке конечной длины с плоскими концевыми переборками (фиг. 1), нагруженной циклосимметричным боковым давлением. Эта задача в случае, когда переборки считались абсолютно жесткими, была решена, в частности, в [2] и для нее легко получить оценку эффективности подхода, изложенного в п. 1.

¹ См. Гольденвейзер А. Л., Радовинский А. Л. Асимптотический анализ колебаний и излучение оболочки вращения в жидкости: Препринт № 275. М.: ИПМ АН СССР, 1986. 61 с.

Построение функций Грина для элементов рассматриваемой конструкции — бесконечных цилиндрической оболочки и пластины в условиях циклосимметричного нагружения — можно выполнять различными способами. Поскольку решение задачи о сосредоточенном воздействии на цилиндрическую оболочку представляет значительные трудности, для нее непосредственно будем строить фундаментальные функции, отвечающие сосредоточенным по продольной координате и циклосимметричным по окружной единичным силам и моменту. Это означает, что окружная координата отделена: $w_{11}(x, \theta) = w_{11h}(x) \cos k\theta$, $w_{12}(x, \theta) = w_{12h}(x) \sin k\theta$, $w_{13}(x, \theta) = w_{13h}(x) \cos k\theta$ и уравнения колебаний оболочки имеют вид (индекс k — число окружных волн форм колебаний здесь и далее опущен)

$$\begin{aligned} w_{11}'' - \frac{1-\nu}{2} k^2 w_{11} + \Omega^2 w_{11} + \frac{1+\nu}{2} k w_{12}' + \nu w_{13}' &= \frac{q_1(1-\nu^2)}{Eh} \\ - \frac{1+\nu}{2} k w_{11}' + \frac{1-\nu}{2} w_{12}'' - k^2 w_{12} + \Omega^2 w_{12} + \frac{(2-\nu)h^2}{12} k w_{13}'' - \\ &- (k+h^2k^2/12) w_{13} = q_2(1-\nu^2)/(Eh) \\ \nu w_{11}' - \frac{(2-\nu)h^2k}{12} w_{12}'' + \left(k + \frac{h^2k^3}{12}\right) w_{12} + \frac{h^2}{12} w_{13}^{IV} - \\ &- \frac{h^2}{12} 2k^2 w_{13}'' + \left(1+k^4 \frac{h^2}{12} - \Omega^2\right) w_{13} = \frac{q_3(1-\nu^2)}{Eh} \end{aligned} \quad (16)$$

ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, $(-)' = d(-)/d\xi$, $\xi = x/R$, $\Omega^2 = (1-\nu^2)\rho_0\omega^2 R^2 E^{-1}$, h — толщина оболочки, отнесенная к радиусу R .

Для получения полного набора функций Грина нужно рассмотреть нагружение оболочки единичными продольной, окружной и поперечной силами, а также изгибающим моментом. Без уменьшения общности будем считать, что эти нагрузки приложены в сечении $\xi = 0$.

Решение системы (16) для бесконечной области не единственно. Обычно оно доопределяется принципом излучения. В данном случае, когда решение для бесконечной области используется лишь как фундаментальное при построении решения для оболочки ограниченной длины, удовлетворение принципу излучения не обязательно. Действительно, с помощью функции Грина для бесконечной оболочки необходимо удовлетворить лишь неоднородным уравнениям в области. Удовлетворение краевым условиям достигается за счет дополнительных однородных решений, обусловленных краевыми усилиями, причем суммарное решение независимо от выбора первой его части (решения неоднородного в области) единственно. Поэтому выбор функции Грина в известной степени произволен. С точки зрения удобства вычислений на ЭВМ достаточно определить решение, удовлетворяющее принципу излучения, а затем опустить его мнимую часть. Заметим, что это всегда можно сделать, так как при вещественных коэффициентах уравнений и вещественной же правой части (где стоят δ -функции) мнимая часть решения удовлетворяет однородным уравнениям. Этим решение полностью доопределяется.

Для построения решения уравнений (16) необходимо вычислить корни дисперсионного полинома. Выражение его коэффициентов и анализ корней в зависимости от частотного параметра Ω^2 представлен, например, в [5]. Решение уравнений (16), удовлетворяющее принципу излучения, записывается в виде нормальных волн

$$W_{1j1}^0(\xi) = C_{j\alpha} a_{j\alpha} \exp q_\alpha |\xi|, \quad W_{1j2}(\xi) = \quad (17)$$

$$= C_{j\alpha} b_{j\alpha} \exp q_\alpha |\xi|, \quad W_{1j3}(\xi) = C_{j\alpha} \exp q_\alpha |\xi|$$

где $\operatorname{Re} q_\alpha \leq 0$, а коэффициенты $a_{j\alpha}$, $b_{j\alpha}$, $C_{j\alpha}$ определяются из уравнений (16). Величины $a_{j\alpha}$, $b_{j\alpha}$ показывают, какой вид: квазипродольный, крутильный или изгибный имеет волна, соответствующая корню q_α . Эти коэффициенты определяются после подстановки (17) в (16) решением

системы любых двух алгебраических уравнений при $C_{j\alpha}=1$. Четыре набора коэффициентов $C_{j\alpha}$, отвечающих разным воздействиям, определяются из условий, что при $\xi=0$ разрывны:

а) продольная сила ($Q_{1j\alpha}^0 = Q_{1j\alpha 1}^0$):

$$Q_{111}^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(W_{111}^0)' + kW_{112}^0 + W_{113}^0] = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi)$$

$$W_{112}^0 = W_{113}^0 = (Q_{114}^0) = 0$$

б) окружная сила

$$Q_{122}^0 = \frac{Eh}{2(1+\nu)} [-kW_{121}^0 + (W_{122}^0)'] = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi)$$

$$W_{121}^0 = Q_{123}^0 = (W_{123}^0)' = 0$$

в) поперечная сила

$$Q_{133}^0 = \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} [(W_{133}^0)''' + (1-2\nu)k^2(W_{133}^0)' + (1-2\nu)k(W_{132}^0)'] =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi), W_{131}^0 = Q_{132}^0 = (W_{133}^0)' = 0$$

г) изгибающий момент

$$Q_{144}^0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [-(W_{143}^0)'' + \nu k^2 W_{143}^0 + kW_{142}^0] = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi)$$

$$Q_{141}^0 = W_{142}^0 = W_{143}^0 = 0 \quad (18)$$

Подчиняя (17) условиям (18), получаем полный набор искомых функций Грина $W_{1j\alpha}$, $j, \alpha=1, \dots, 4$ (первый индекс означает, что эти функции построены для цилиндрического участка). В дальнейшем сохраняем лишь вещественные части их.

Для циклосимметрично нагруженной пластины функцию Грина удобнее построить в виде свертки нагрузки $\delta(r-r_2) \cos k\theta$ с фундаментальным решением, отвечающем действию на пластину периодической (во времени) сосредоточенной силы. Последнее фундаментальное решение соответствует задаче

$$\left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 - s^4 \right] W_2 = 0, \quad \frac{dW_2}{dr} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d^3 W_2}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W_2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW_2}{dr} = -\frac{1}{2\pi r D}, \quad r \rightarrow 0 \quad (20)$$

Здесь $s^4 = \rho_1 h_1 \omega^2 D^{-1}$, D — жесткость пластины, ρ_1 — ее плотность, h_1 — толщина. Вещественная часть решения этой задачи имеет вид:

$$W_2(r) = \frac{1}{8Ds^2} \left[Y_0(sr) + \frac{2}{\pi} K_0(sr) \right] \quad (21)$$

Заметим, что принципу излучения удовлетворяет комплексная функция

$$W_2^*(r) = \frac{1}{8Ds^2} \left[Y_0(sr) + \frac{2}{\pi} K_0(sr) - iJ_0(sr) \right]$$

Функции Грина, соответствующие сосредоточенным по радиальной и циклосимметричным по окружной координатам силе и моменту, в полярной системе координат (с центром на оси симметрии составной конст-

рукции) записываются следующим образом:

$$W_{211}^0(r_1, r_2) = \frac{r_2}{4Ds^2} \int_0^\pi \left[Y_0(sz) + \frac{2}{\pi} K_0(sz) \right] \cos k\theta d\theta,$$

$$W_{221}^0(r_1, r_2) = \frac{1}{4Ds^2} \int_0^\pi \left\{ r_2 \left[Y_1(sz) + \frac{2}{\pi} K_1(sz) \right] + Y_0(sz) + \frac{2}{\pi} K_0(sz) \right\} \cos k\theta d\theta$$

$$z = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta)^{1/2} \quad (22)$$

Проанализируем на рассматриваемом примере структуру системы разрешающих уравнений, выписанных в п. 1. В точках сопряжения участков пластин и цилиндрической оболочки $\xi=0, r=1$ и $\xi=l/R, r=1$ (фиг. 1) в дополнение к основному граничному интегральному уравнению (9), описывающему взаимодействие всей конструкции с жидкостью, сформулированы граничные уравнения для оболочки (по четыре в каждой точке) и для пластин (по два в каждой точке) вида (10). В этих уравнениях содержатся соответственно по восемь неизвестных краевых перемещений и обобщенных усилий для цилиндрического участка и по четыре для пластины (деформация пластины в своей плоскости не учитывается). Таким образом, в 12 дополнительных уравнений, описывающих взаимодействие между частями конструкции, входят 24 неизвестных. Эта система замыкается очевидными 12 условиями неразрывности перемещений и усилий в точках сопряжения. Уравнения имеют вид:

$$w_{11}=w_{21}, \quad w_{14}=w_{22}, \quad w_{12}=0, \quad w_{13}=0$$

$$Q_{11}=Q_{21}, \quad Q_{14}=Q_{22} \quad (23)$$

Дальнейшая процедура решения по существу не отличается от изложенной в [2] и состоит в кусочно-линейной аппроксимации контактного давления, в формировании и решении соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). С учетом условий (23) видим, что порядок системы равен N_1+12 , где N_1 — число узловых точек для определения давления. Использование алгоритма, в котором функции Грина строятся сразу для всей конструкции, уменьшило бы порядок СЛАУ до N_1 . При достаточно подробной дискретизации поверхности конструкции (десятками узловых точек) разница в затратах машинного времени на решение СЛАУ в этих двух вариантах несущественна. Принципиальным преимуществом предлагаемого варианта расчета является тот факт, что функции Грина конструкции зависят лишь от одного аргумента (расстояние между источником и точкой наблюдения), а не от двух, как при рассмотрении ее целиком. Таким образом, при формировании СЛАУ нет необходимости заполнять двумерный массив значений функций Грина в узловых точках, а достаточно пользоваться двумя одномерными (для цилиндрического и плоского участка). Кроме того, представление функций Грина для конструкции в аналитическом виде (17) и (21) облегчает вычисление их сверток с фундаментальным решением для жидкости и кусочно-линейной функцией p .

На фиг. 2 представлена форма вынужденных колебаний оболочки с параметрами $R/l=0,4, h/l=0,015, \nu=0,3, h_1=2h, \rho_1=\rho_0, \rho/\rho_0=0,128, c/c_0=0,307, E_0=E_1$, возбуждаемой равномерно распределенной по боковой поверхности цилиндрического участка нагрузкой с числом окружных волн $k=10$ при $\Omega^2=0,4$. Оказалось, что концевые переборки совершают колебания со значительно меньшей амплитудой, чем оболочка вследствие большой изгибной жесткости. Вместе с этим их инерционность приводит к увеличению амплитуды колебаний цилиндрической части по сравнению с расчетами [2], в которых оболочка считалась опертой на абсолютно жесткие неподвижные переборки.

Для оценки эффективности с точки зрения затрат машинного времени и памяти задача о колебаниях оболочки с неподвижными переборками была решена излагаемым здесь вариантом метода ГИУ. Отличие решения от изложенного в [2] состояло в использовании функций Грина бесконечной цилиндрической оболочки и введении дополнительных неизвестных краевых усилий. Граничные условия на кромках определяли все краевые перемещения нулевыми: $w_{11}=w_{12}=w_{13}=w_{13}'=0$. В [2] функции Грина строились численно методом ортогональной прогонки с 50 узловыми точками на боковой поверхности. Количество узлов, в которых определялась амплитуда контактного давления, в обоих расчетах принималось равным 70 (50 на цилиндре и по 10 на пластинах). При этом оказалось, что на шаге формирования СЛАУ затраты машинного времени уменьшились в 15 раз, а объем оперативной памяти — в 5 раз. Общие затраты машинного времени и оперативной памяти сократились примерно вдвое по сравнению с расчетами, сделанными в [2], а результаты оказались идентичными. Очевидно, что в случае анализа колебаний более сложных конструкций, состоящих из фрагментов цилиндров, сфер и пластин численное построение функций Грина конструкции в целом будет весьма затруднительным, в то время, как применение излагаемого варианта метода ГИУ сведется лишь к составлению дополнительных уравнений (10) на линиях сопряжения участков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слепян Л. И., Сорокин С. В. Граничные интегральные уравнения взаимодействия тонкостенных конструкций со сплошной средой // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306. № 6. С. 1332–1335.
2. Слепян Л. И., Сорокин С. В. Метод граничных интегральных уравнений в гидроупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 166–176.
3. Бенерджи П. К., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
5. Авербух А. З., Вейцман Р. И., Генкин М. Д. Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987. 158 с.
6. Васильев Д. Г., Гольденвейзер А. Л. Колебания и излучение оболочки вращения при действии кольцевой нагрузки // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 184–193.
7. Васильев Д. Г., Лидский В. Б. Вынужденные колебания тонкой упругой оболочки, взаимодействующей с жидкостью // Математические методы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1986. С. 30–36.

Ленинград

Поступила в редакцию
31.VII.1989