МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1990

УДК 531.38

С. А. ДОВБЫШ

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПЛОСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ДИНАМИКЕ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматриваются вопросы устойчивости плоских движений динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки в консервативном силовом поле, допускающем интеграл площадей и имеющем линейный или квадратичный потенциал. Доказано, что параметры задачи можно подобрать таким образом, что при изменении постоянной энергии характер вращательных плоских движений будет многократно меняться, то есть будут происходить переходы от орбитальной устойчивости к гиперболической неустойчивости и наоборот. Явление многократной смены характера решений в математическом плане имеет ту же природу, что и явление чередования зон устойчивости и неустойчивости при параметрическом резонансе (в качестве величины, характеризующей амплитуду изменения параметра, выступает постоянная энергии). Согласно гидродинамической аналогии Стеклова этот же эффект будет наблюдаться и в задаче Кирхгофа о движении тела в идеальной жидкости. Идеи и методы работы могут быть использованы для исследования периодических решений других задач, обладающих симметрией.

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой в консервативном силовом поле, допускающем интеграл площадей. Будем считать, что ось симметрии потенциала поля сил вертикальна. При нулевом значении постоянной площадей задача может иметь замечательное семейство плоских (или маятниковых) решений, зависящих от постоянной энергии,— вращения или колебания вокруг одной из главных осей инерции, занимающей неизменное горизонтальное положение (условие существования таких решений см. в [1]). Исследование плоских движений берет начало с работы [2], где установлено, что, если движущееся тяжелое твердое тело имеет ось, неподвижную в пространстве, то либо эта ось вертикальна, либо она горизонтальна и совпадает с одной из главных осей инерции, а центр масс лежит в главной плоскости инерции, сопряженной оси вращения. Второй случай отвечает рассматриваемым здесь маятниковым движениям. В [3, 4, 5] было показано, что маятниковые движения возможны только вокруг неподвижной точки, лежащей в плоскости главных центральных осей инерции тела, а соответствующие неподвижные оси всегда параллельны главным центральным осям инерции.

Вопросы, связанные с устойчивостью плоских движений тела в однородном или ньютоновском поле сил, рассматривались в ряде работ (см. [6, 1, 7,—9] и содержащуюся в [9] библиографию). Отметим, что в [9] рассматривался вопрос об орбитальной устойчивости быстрых вращений тяжелого твердого тела, получающихся из невырожденных перманентных вращений задачи Эйлера — Пуансо. С этой целью вычислялась нормальная форма Биркгофа. Ниже изучается случай динамически симметричного твердого тела и линейного или квадратичного потенциала. В этом случае при больших значениях постоянной энергии плоские вращения переходят в вырожденные периодические решения задачи Лагранжа. Соответствующий анализ асимптотики нормальной формы Биркгофа проведен в п. 5.

Итак, пусть A, A, C — главные моменты инерции тела относительно точки закрепления, потенциал силового поля есть $U=U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Здесь и далее $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — традиционные переменные Эйлера — Пуассона. Единицы измерения длины и массы выберем таким образом, чтобы $A=1$.

Уравнения задачи имеют интегралы геометрический, площадей и энергии

$$I_1=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=\gamma^2 \quad (\gamma=1)$$
$$I_2=p\gamma_1+q\gamma_2+Cr\gamma_3=c \tag{1.1}$$
$$I_3=p^2+q^2+Cr^2+2U=2h$$

Рассматриваемые плоские движения Г выделяются условиями $q=r=0$, $\gamma_1=0$, $c=0$ и являются вращениями или колебаниями вокруг одной из экваториальных главных осей инерции (принимаемой за первую ось инерции). Итак, исследуются два случая, когда описанные плоские движения существуют:

$U=y_0\gamma_2+z_0\gamma_3$ — тяжелое твердое тело. Здесь $(0,\ y_0,\ z_0)$ — проекции центра масс на оси инерции тела, умноженные на вес тела;

$U=\frac{1}{2}(L\gamma_1^2+M\gamma_2^2+N\gamma_3^2)$ — тело в поле сил с квадратичным потенциалом. В этом случае уравнения Эйлера — Пуассона совпадают с уравнениями Кирхгофа, описывающими движение по инерции в безграничном объеме идеальной жидкости твердого тела, имеющего три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии (аналогия Стеклова, см. [10].

Основной результат работы заключается в следующем параметры задачи могут быть подобраны таким образом, что при изменении постоянной энергии характер плоских вращательных движений будет многократно меняться. Доказательство опирается на ограниченные постановки задач [11], которые описаны ниже.

2. Ограниченные постановки задач. *Случай тяжелого твердого тела.* Единицы измерения длины и массы можно подобрать таким образом, чтобы $A=1$, $C=\delta_1$, $y_0=\delta_1$ (предполагается, что $y_0\neq 0$).

Удобно перейти к математически эквивалентной задаче о движении тела в переменном поле тяготения при условии, что постоянная энергии зафиксирована. Пусть μ — параметр, характеризующий величину поля тяготения (ускорение свободного падения). Уравнения Эйлера — Пуассона примут вид

$$p^{\boldsymbol{\cdot}}=(1-\delta_1)qr-\mu\delta_1\gamma_3+\mu\delta_2\gamma_2$$
$$q^{\boldsymbol{\cdot}}=(\delta_1-1)pr-\mu\delta_2\gamma_1, \quad r^{\boldsymbol{\cdot}}=\mu\gamma_1 \tag{2.1}$$
$$\gamma_1^{\boldsymbol{\cdot}}=r\gamma_2-q\gamma_3, \quad \gamma_2^{\boldsymbol{\cdot}}=p\gamma_3-r\gamma_1, \quad \gamma_3^{\boldsymbol{\cdot}}=q\gamma_1-p\gamma_2 \tag{2.2}$$

где $\delta_2=\delta_1 z_0/y_0$. При $\delta_1=\delta_2=0$ система (2.1) примет вид

$$p^{\boldsymbol{\cdot}}=qr, \quad q^{\boldsymbol{\cdot}}=-pr, \quad r^{\boldsymbol{\cdot}}=\mu\gamma_1 \tag{2.3}$$

Пусть интегралы энергии и площадей ограниченной задачи (2.2), (2.3) равны $p^2+q^2=2h=1$, $p\gamma_1+q\gamma_2=c=0$. Полагая $p=-\cos\xi$, $q=\sin\xi$, можно получить, что с точностью до сдвига по времени t решения ограниченной задачи имеют вид

$$\xi^{\boldsymbol{\cdot}}=r, \quad r^{\boldsymbol{\cdot}}=\mu\gamma_1, \quad \gamma_3=\sin t$$
$$\gamma_1=\sin\xi\cos t, \quad \gamma_2=\cos\xi\cos t$$

т. е. переменная ξ удовлетворяет системе

$$\xi^{\boldsymbol{\cdot}}=r, \quad r^{\boldsymbol{\cdot}}=\mu\cos t\sin\xi \tag{2.4}$$

Соответствующие плоские решения характеризуются условием $\xi\equiv 0 \bmod \pi$, $r\equiv 0$ и являются вращениями. Ниже рассматривается решение $\xi\equiv 0 \bmod 2\pi$. Решение $\xi\equiv\pi \bmod 2\pi$ можно не рассматривать, так как переход к нему эквивалентен обращению времени.

Тело в поле сил с квадратичным потенциалом. Зафиксировав значения параметров $A=1$ и N, заменим параметры C, L, M на δC, δL, δM, где $\delta>0$. При $\delta\to 0$ уравнения Эйлера — Пуассона переходят в уравнения ограниченной задачи. Полагая $\varphi=2\operatorname{arctg}\gamma_1/\gamma_2$, $u=\gamma_3$ для случая нулевого значения постоянной площадей $p\gamma_1+q\gamma_2=c=0$ можно записать эти уравнения в виде

$$\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}=2r, \quad 2r^{\boldsymbol{\cdot}}+\Lambda(\gamma^2-u^2)\sin\varphi=0 \tag{2.5}$$
$$u^{\boldsymbol{\cdot}2}=(2h-Nu^2)(\gamma^2-u^2)$$

где $\Lambda=(L-M)/C$, а постоянные h, γ^2 есть интегралы энергии и геометрический ограниченной задачи $p^2+q^2+N\gamma_3^2=2h$, $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=\gamma^2$.

Динамические свойства плоских решений исходной системы Эйлера — Пуассона, а также ограниченной задачи определяются не самими величинами h, γ, а лишь отношением h/γ^2. Отметим, что в задаче Кирхгофа интеграл «импульсивной силы» $\gamma>0$ может принимать любое значение.

При $\gamma=1$, $2h<N$ с точностью до сдвига по времени система (2.5) может быть представлена в виде

$$\varphi^{\cdot}=2r,\ 2r^{\cdot}+\Lambda\,\mathrm{dn}^2(N^{1/2}t,k)\sin\varphi=0 \qquad (2.6)$$

$$u=k\,\mathrm{sn}\,(N^{1/2}t,k),\ k^2=2h/N$$

Каждое плоское движение $\varphi\equiv0 \mod \pi$, $r\equiv0$ в этом случае является либрацией или колебанием. При $2h=1$, $\gamma^2<1/N$ имеют место аналогичные формулы

$$\varphi^{\cdot}=2r,\ 2r^{\cdot}+(\Lambda/N)k^2\,\mathrm{cn}^2(t,k)\sin\varphi=0 \qquad (2.7)$$

$$u=\gamma\,\mathrm{sn}(t,k),\ k^2=N\gamma^2$$

а плоские движения являются вращениями. В переходном случае $2h/\gamma^2=$ $=N$ плоские движения утрачивают периодический характер и становятся двоякоасимптотическими.

Рассматриваемое нами решение характеризуется условием $\varphi\equiv0 \mod 2\pi$. Переход к изучению решения $\varphi\equiv\pi \mod 2\pi$ эквивалентен перемене знака у величины Λ. Не ограничивая общности можно считать, что в случае вращений $p<0$.

В дальнейшем предполагается, что $\delta_{1,2}$ и δ — достаточно малые величины. Очевидно, что плоское движение Γ аналитически зависит от $\delta_{1,2}$ или δ в окрестности точки $\delta_1=\delta_2=0$ или $\delta=0$. Таким образом, рассматриваются следующие три типа плоских движений Γ: I. вращения в случае тяжелого твердого тела; II. либрации в случае квадратичного потенциала сил; III. вращения в случае квадратичного потенциала сил.

3. Выбор и анализ отображения последования. Задачу о характере периодического решения удобно свести к задаче о характере соответствующей неподвижной точки отображения последования. В фазовом пространстве $\mathbf{R}^6\{p,q,r,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$ системы Эйлера — Пуассона выберем гиперповерхность Π, заданную условиями $\gamma_3=0$, $\gamma_3^{\cdot}=q\gamma_1-p\gamma_2>0$. Пусть точка $O\in\Pi$ определяется равенствами $q=r=0$, $\gamma_1=\gamma_3=0$, $\gamma_2=\gamma>0$. Интегралы (1.1) высекают в фазовом пространстве $\mathbf{R}^6$ некоторое трехмерное многообразие M_I, где $I=(I_1,I_2,I_3)$. Нетрудно установить, что в некоторой окрестности точки O интегралы (1.1) независимы и, следовательно, по теореме о неявной функции, M_I является гладким многообразием, а в качестве координат на M_I можно выбрать γ_3, v, r, где $\gamma_1=(\gamma^2-\gamma_3^2)^{1/2}\sin v$, $\gamma_2=(\gamma^2-$ $-\gamma_3^2)^{1/2}\cos v$.

Нетрудно видеть, что в рассмотренных ранее ограниченных постановках задач (когда $\delta_1=0$, $\delta_2=0$ в случае поля силы тяготения или $\delta=0$ в случае квадратичного потенциала) переменная v совпадает, соответственно, с ξ или $\varphi/2$.

Изучаемое периодическое решение Γ трансверсально пересекает двумерную поверхность $\Pi_0=M_I\cap\Pi$ в точке O. Все близкие решения также будут трансверсально пересекать Π_0. Таким образом, можно рассмотреть отображение последования T некоторой окрестности O в Π_0 на Π_0, причем O будет неподвижной точкой. Простые вычисления показывают, что естественная инвариантная мера $dpdqdrd\gamma_1d\gamma_2d\gamma_3$ системы Эйлера — Пуассона будет индуцировать на Π_0 инвариантную меру $\omega={}^1/_2dvdr$ отображения T. Значит, отображение T будет каноническим, если считать ξ, r или φ, $w=2r$ симплектическими координатами.

Лемма. Отображение T аналитически зависит от координат v, r и параметров задачи (δ_1, δ_2, μ в случае линейного или δ, C, L, M, N, γ, $2h$ в случае квадратичного потенциала сил) и имеет неподвижную точку $(0,0)$, а при переходе к ограниченной задаче превращается в соответствующее отображение T_0. Эти же утверждения останутся в силе, если отображения T, T_0 заменить на их линеаризации S, S_0 в неподвижной точке $(v,r)=(0,0)$.

Соответственно трем типам плоских решений следует рассмотреть три частных случая.

I. Пусть $2h=1$, как и предполагалось ранее. Тогда отображения T_0 и S_0 являются, соответственно, отображениями последования для системы (2.4) и уравнения Матье

$$\xi^{\cdot}=r,\ r^{\cdot}=\mu\cos t\xi \tag{3.1}$$

II. Пусть $\gamma=1$. Отображения T_0, S_0 являются заданными на плоскости $t \bmod (4\mathbf{K}(k)/N^{1/2})=0$ отображениями последования для системы (2.6) и уравнения Ламе

$$\varphi^{\cdot}=w,\ w^{\cdot}+\Lambda\,\mathrm{dn}^2(N^{1/2}t,k)\varphi=0 \tag{3.2}$$

III. Пусть $2h=1$. Отображения T_0, S_0 являются заданными на плоскости $t \bmod 4\mathbf{K}(k)=0$ отображениями последования для системы (2.7) и уравнения Ламе

$$\varphi^{\cdot}=w,\ \ w^{\cdot}+(\Lambda/N)k^2\,\mathrm{cn}^2(t,k)\varphi=0 \tag{3.3}$$

Если $\mu=0$ в случае (I) или $\gamma^2=0$ в случае (III) (то есть потенциал $U\equiv0$), то система Эйлера — Пуассона, а, следовательно, и отображения T, S имеют невырожденный линейный первый интеграл $r\equiv\mathrm{const}$ (интеграл Лагранжа). Поэтому, след $\mathrm{tr}\,\mathbf{S}$ матрицы $\mathbf{S}$, задающей линейное отображение S, равен 2. Очевидно, что при этом в случае ограниченной задачи матрица является жордановой клеткой размера 2×2. Значит, она приводится к такому же виду, если $\delta_{1,2}$ или δ достаточно малы и $U\equiv0$.

Остановимся на случае (I). Ясно, что характеристические числа $\lambda_{\mathrm{S}}^{\pm1}$ матрицы $\mathbf{S}$, являющиеся корнями уравнения $\lambda^2-\lambda\,\mathrm{tr}\,\mathbf{S}+1=0$ $(\det\mathbf{S}=1)$ будут разлагаться в ряд по степеням $\mu^{1/2}$. На самом деле, $\mathrm{tr}\,\mathbf{S}$ будет четной функцией μ и поэтому в разложении $\lambda_{\mathrm{S}}^{\pm1}$ присутствуют лишь целые степени μ. Это можно показать из соображений симметрии. Действительно, характеристические показатели периодического плоского движения (и его нормальная форма Биркгофа, см. п. 5, 6) не зависят от направления поля силы тяжести (это замечание, упрощающее доказательства и позволяющее обойтись без вычислений, принадлежит С. В. Болотину).

В случае квадратичного потенциала заданные на Π_0 отображения T и S представимы в виде квадратов отображений T_1, S_1 так же определенных на Π_0. Действительно, система уравнений движения инвариантна относительно преобразования π: $(p,q,r,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\to(p,q,r,-\gamma_1,-\gamma_2,-\gamma_3)$ (так как эта замена сохраняет потенциал U). Пусть $\Pi_0'=\pi(\Pi_0)$, $O'=\pi(O)$ — образы поверхности Π_0 и точки O при замене π Плоское решение Г типа (II) или (III) трансверсально пересекает Π_0' в точке O'. Поэтому, определено отображение последования T_2 некоторой окрестности O в Π_0 на Π_0'. Нетрудно видеть, что можно взять $T_1=\pi\circ T_2$, а S_1 является линеаризацией T_1 в неподвижной точке O.

4. Зоны устойчивости и неустойчивости для уравнения Хилла с параметром. Осцилляционная теорема. Использование квазиклассической асимптотики. Рассмотрим уравнение Хилла

$$x^{\cdot\cdot}+f(t,\lambda)x=0 \tag{4.1}$$

где $f(t,\lambda)$ — периодическая по t функция, аналитически зависящая от параметра λ. Пусть $\Delta(\lambda)$ есть след матрицы монодромии уравнения (4.1) за период $T(\lambda)$. Нулевое решение системы (4.1) устойчиво, когда $|\Delta(\lambda)|<2$ и неустойчиво, когда $|\Delta(\lambda)|>2$. Множества значений λ, для которых $|\Delta(\lambda)|<2$ или $|\Delta(\lambda)|>2$, можно разбить, соответственно, на зоны устойчивости $\mathbf{O}_n$ и неустойчивости $\mathbf{H}_n$ $(n\geqslant0)$, удовлетворяющие следующим условиям [12]. Любое нетривиальное решение уравнения (4.1) имеет на его периоде n или $n+1$ нуль, когда $\lambda\in\mathbf{O}_n$ и $n-1$, n или $n+1$ нуль, когда $\lambda\in\mathbf{H}_n$. При каждом значении t данному решению $x(t)$ можно сопоставить точку $\mathbf{x}(t)$ на фазовой плоскости с абсциссой $Cx^{\cdot}(t)$ и ординатой $x(t)$, где $C>0$ — выбранная заранее постоянная. Пусть $\psi_\lambda(\chi)$ — функ-

ция углов поворота, то есть угол поворота вокруг начала координат точ-
ки $\mathbf{x}(t)$, соответствующей решению, для которого $\arg \mathbf{x}(0)=\chi$, при из-
менении t от нуля до $T(\lambda)$. В терминах углов поворота можно сформули-
ровать критерии (необходимые и достаточные условия) принадлежности
λ к областям $\mathbf{O}_n$, $\mathbf{H}_n$ (см. [12], с. 559), которые не зависят от выбора C.

Среди областей $\mathbf{O}_n$, $\mathbf{H}_n$ могут быть пустые. Множества $\mathbf{O}_n$, $\mathbf{H}_n$ упорядо-
чены следующим образом: между любыми двумя точками из множеств
$\mathbf{H}_n \cup \mathbf{O}_{n-1}$ и $\mathbf{H}_m \cup \mathbf{O}_m$, где $n<m$, лежат какие-либо точки из всех множеств
$\mathbf{O}_k$, $n \leqslant k<m$; если некоторые компоненты связности множеств $\mathbf{O}_{n-1}$ и $\mathbf{O}_n$
(интервалы) не имеют общих граничных точек, то между ними есть точ-
ки множества $\mathbf{H}_n$. Возможно будут существовать также множества Π_n^*
($n \geqslant 1$), состоящие из отдельных точек, если $\Delta(\lambda) \neq \pm 2$, обязательно со-
держащие общие граничные точки областей $\mathbf{O}_{n-1}$, $\mathbf{O}_n$ (если таковые име-
ются) и такие, что для $\lambda \in \Pi_n^*$ все решения уравнения (4.1) будут перио-
дическими с периодом $T(\lambda)$ (при четном n) или $2T(\lambda)$ (при нечетном n).
При этом каждое такое решение будет иметь ровно n нулей на любом
интервале длины $T(\lambda)$ и $\psi_\lambda(\chi) \equiv \pi n$. Множества $\mathbf{O}_n$, $\mathbf{H}_n$, Π_n^* корректно
определены в пространстве всех периодических функций $f(t)$. Для иссле-
дования поставленных задач, однако, удобно рассматривать однопара-
метрическое семейство функций $f(t, \lambda)$.

В ряде случаев, например, когда $f(t, \lambda)$ линейно зависит от λ (и, зна-
чит, $T(\lambda) \equiv \mathrm{const}$), качественная картина поведения функции $\Delta(\lambda)$ и
строения областей $\mathbf{O}_n$, $\mathbf{H}_n$ описывается осцилляционной теоремой [12].
Зоны неустойчивости в этом случае обычно называют лакунами.

Для системы (3.1) с учетом ее специфики осцилляционная теорема
имеет следующий вид. Существует такая счетная последовательность зна-
чений $\ldots <\lambda_{-2}^- \leqslant \lambda_{-2}^+ < \lambda_{-1}^- \leqslant \lambda_{-1}^+ < \lambda_0^- = 0 = \lambda_0^+ < \lambda_1^- \leqslant \lambda_1^+ < \ldots$, $\lambda_{-n}^- = -\lambda_n^+$,
что: 1. $\mathbf{O}_n = (\lambda_{-n-1}^+, \lambda_{-n}^-) \cup (\lambda_n^+, \lambda_{n+1}^-)$, $\mathbf{H}_n = (\lambda_{-n}^-, \lambda_{-n}^+) \cup (\lambda_n^-, \lambda_n^+)$. Если
$\Pi_n^* \neq \phi$, то $\lambda_n^- = \lambda_n^+ = \lambda$ и $\Pi_n^* = \{\lambda, -\lambda\}$; в этом случае система (3.1) имеет
два линейно независимых 4π-периодических решения. При $\lambda \neq 0$ это
невозможно согласно [13, 14] и значит $\Pi_n^* = \phi$, $\mathbf{H}_n \neq \phi$, для $n>0$. Итак,
все лакуны кроме нулевой являются интервалами, не вырождающимися
в точки.

2. Если $\lambda_n^- \neq \lambda_n^+$, то λ_n^- и λ_n^+ являются простыми нулями уравнения
$\Delta(\lambda) = 2(-1)^n$. В противном случае $\lambda_n^- = \lambda_n^+$ — кратный нуль.

3. Если λ^* — вещественная стационарная точка функции $\Delta(\lambda)$, то
$\Delta(\lambda^*)\, d^2\Delta(\lambda^*)/d\lambda^2 < 0$. В частности, для $\lambda^*=0$ имеем $d^2\Delta(0)/d\lambda^2 < 0$.

Рассмотрим уравнение

$$x^{\cdot\cdot} + l^2 f(t, \lambda)\, x = 0 \tag{4.2}$$

с большим параметром $l>0$ и всюду положительной функцией f, гладко
зависящей от аргумента t и параметра λ. Известно, что оно имеет фунда-
ментальную систему решений вида

$$x_{1,2}(t) = f^{-1/4}(t)\, \exp\{\pm i l S(t_0, t, \lambda) + O(l^{-1})\}$$

$$S(t_0, t, \lambda) = \int_{t_0}^{t} f^{1/2}(\tau, \lambda)\, d\tau \tag{4.3}$$

(квазиклассическая асимптотика [15, 16]), причем асимптотическую
формулу (4.3) можно дифференцировать по аргументу t и параметрам
λ, l с сохранением равномерной по t, λ оценки остаточного члена [15].
Пусть функция f имеет период $T(\lambda)$ и $S(\lambda) = S(0, T(\lambda), \lambda)$. Можно пока-
зать, что тогда для достаточно больших l функция углов поворота соот-
ветствующего уравнения Хилла (4.2) есть

$$\psi_{\lambda, l}(\chi) = l S(\lambda) + O(1) \tag{4.4}$$

где член $O(1)$ по модулю не превосходит $\pi + O(l^{-1})$. Более того, если
взять $C = l^{-1}$, то асимптотическую формулу (4.4) можно дифференциро-

вать по λ:

$$\partial\psi_{\lambda,l}(\chi)/\partial\lambda=ldS(\lambda)/d\lambda+O(1) \tag{4.5}$$

Пусть теперь уравнение (4.2) имеет точки поворота (то есть нули функции $f(t,\lambda)$) конечного порядка, гладко зависящие от λ, изолированные и сохраняющие свои порядки с изменением λ. На участках, где $f<0$ каждое решение уравнения (4.2) испытывает поворот на угол, не превосходящий по модулю π. Вблизи каждой точки поворота следует воспользоваться соответствующими асимптотическими разложениями, основанными на решениях эталонных уравнений $\ddot{x}+t^m x=0$ [15]. Используя асимптотику этих решений при $t\to\pm\infty$ [15], можно показать, что для достаточно больших l:

$$\psi(\chi)=lS_+(\lambda)+O(1), \qquad S_+(\lambda)=\int\limits_0^{T(\lambda)} f_+^{1/2}(\tau,\lambda)\,d\tau \tag{4.6}$$

$$f_+=\begin{cases} f, & f>0 \\ 0, & f\leqslant 0\end{cases}$$

Если всюду $f\geqslant 0$, то в случае $C=l^{-1}$ асимптотическую формулу (4.6) можно дифференцировать по λ, что приводит опять к (4.5).

Используя критерии принадлежности λ к областям $\mathbf{O}_n$, $\mathbf{H}_n$ [12] и приведенные выше факты, можно установить следующий результат. Если $S_+(\lambda)\not\equiv\mathrm{const}$, то при достаточно больших $l>0$ с изменением λ функция $l^2f(t,\lambda)$ будет проходить через сколь угодно большое число областей $\mathbf{O}_n$. Если, кроме того, всюду $f\geqslant 0$ и $dS/d\lambda\neq 0$, то $\psi_{\lambda,l}(\chi)$ (где $C=l^{-1}$) является монотонной функцией λ при каждых χ, l. Согласно [12] отсюда следует, что каждая область $\mathbf{O}_n$, $\mathbf{H}_n$ (если $\mathbf{H}_n\neq\varnothing$) состоит из одного интервала, а каждое множество $\Pi_n{}^*$ — не более, чем из одной точки, которая должна являться общей граничной точкой областей $\mathbf{O}_{n-1}$, $\mathbf{O}_n$ ($\Pi_n{}^*=\varnothing$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{H}_n\neq\varnothing$). Простое дополнительное рассуждение показывает, что нуль уравнения $\Delta(\lambda)=\pm 2$ является простым, если $\{\lambda\}\neq\Pi_n{}^*$.

Рассмотрим систему (3.3). Полагая $l^2=\Lambda/N$, $\lambda=k^2$, $f(t,\lambda)=k^2\,\mathrm{cn}\,(t,k)$ найдем, что $S(\lambda)=4k\int_0^{\mathbf{K}(k)}\mathrm{cn}(u,k)\,du=4\theta$, где $\theta=\arcsin k$ — так называемый модулярный угол [17]. Следовательно, при достаточно больших $l>0$ функция $l^2f(t,k^2)$ с изменением $0<k<1$ проходит через сколь угодно большое число различных областей устойчивости $\mathbf{O}_n$. Кроме того, при $0<k_0\leqslant k<1-k_0$ и $l>l(k_0)$ $\psi(\chi)$ является монотонно растущей функцией k^2. Можно показать, что это остается справедливо и при $0\leqslant k\leqslant k_0$. Действительно, используя замену $t=2\mathbf{K}x/\pi$ представим уравнение (3.3) в виде $\varphi''+g(x,k^2)\varphi=0$, где $g=4\mathbf{K}^2\pi^{-2}l^2k^2\,\mathrm{cn}^2(t,k)$ — 2π-периодическая функция. Можно убедиться, что при малых $k^2\geqslant 0$ $\partial f/\partial k^2>0$ и поэтому, согласно [12] $\partial\psi/\partial k^2>0$.

Аналогичным образом, рассматривая систему (3.2) и полагая $l^2=\Lambda/N$, $\lambda=k^2$, $f(t,\lambda)=\mathrm{dn}^2(t,k)$, найдем, что $S(\lambda)=\int_0^{4\mathbf{K}}\mathrm{dn}(u,k)\,du=2\pi$.

Из формулы (4.4) следует, что $\psi(\chi)=2\pi\lambda+O(\lambda^{-1})$, где оценка остаточного члена равномерная при $0\leqslant k\leqslant k_0<1$. По всей видимости, это приводит к тому, что семейство плоских решений типа (II) как ограниченной, так и неограниченной задач, с изменением постоянной энергии (другие параметры задачи остаются постоянными) может менять характер устойчивости не более m раз, где m некоторое универсальное число. В дальнейшем решения типа (II) рассматриваться не будут.

Согласно [18, 14] при $0<k<1$ уравнение (3.3) может иметь два линейно независимых $4\mathbf{K}(k)$-периодических решения, только если $l^2=\Lambda/N=s(s+1)$, где s — целое число. В противном случае множества $\Pi_{2n}{}^*$ будут пустыми, и, следовательно, между областями $\mathbf{O}_{2n}$, $\mathbf{O}_{2n-1}$ содержится непустая область $\mathbf{H}_{2n}$. Поэтому, при больших $l^2\neq s(s+1)$ характер устойчивости тривиального решения уравнения (3.3) (и, соответственно, плоского решения типа (III) ограниченной задачи) будет многократно меняться с изменением $k>0$, а все корни $\lambda_{2n}^{\pm}$ уравнения $\Delta(\lambda)=2$ простые и являются в точности границами областей $\mathbf{H}_{2n}$. Согласно [18, 14] этот результат остается в силе, если $l^2=s(s+1)$, где $s\geqslant n$. Области $\mathbf{H}_{2n+1}$ пустые (см. п. 6). Поэтому $\Pi^*_{2n+1}=\{\lambda_{2n+1}\}$.

5. Вычисление асимптотики нормальной формы Биркгофа. Для того, чтобы исследовать в линейном приближении устойчивость неподвижной точки (0, 0) отображения T, необходимо вычислить характеристические числа λ_S, λ_S^{-1} или след $\operatorname{tr}\mathbf{S}$ матрицы монодромии $\mathbf{S}$ отображения S. Чтобы доказать (орбитальную) устойчивость эллиптической точки (0, 0), надо проанализировать вид нормальной формы Биркгофа

$$(I,\ \varphi)\to(I,\ \varphi+\alpha_0+\alpha_1 I) \tag{5.1}$$

отображения T с погрешностью в членах выше третьей степени [19]. Целесообразно, применяя теорию возмущений, искать асимптотику величин α_0, α_1 в случае быстрых вращений (то есть когда $\mu\to 0$ для решений I типа и $2h=1$, $\gamma\to 0$ для решений III типа). В случае ограниченной задачи для этого удобно использовать варианты теорем А. Пуанкаре и результаты [20], обобщенные в духе [21], которые позволяют существенно упростить вычисления.

Случай (I). Можно показать, что в нормальной форме (5.1) отображения T_0: $\alpha_0=\mu 2^{1/2}\pi+O(\mu^2)$, $\alpha_1=-\pi+O(\mu^{1/2})$.

Лемма. 1) Для любых μ, δ_1, δ_2 отображение T инвариантно относительно замены $(\xi, r)\to(-\xi, -r)$, т. е. является нечетным.

2) Каноническое отображение T приводится вблизи неподвижной точки (0, 0) с погрешностью в членах выше третьей степени к нормальной форме Биркгофа (5.1), где $\alpha_0=\mu f_0(\mu^2, \delta_1, \delta_2)$, $\alpha_1=f_1(\mu^2, \delta_1, \delta_2)$, $f_0(0, 0, 0)=\pi\sqrt{2}$, $f_1(0, 0, 0)=-\pi$, функции f_0, f_1 аналитичны, если $|\mu|<\mu_0$, $|\delta_{1,2}|<\varepsilon$, где μ_0, ε — некоторые положительные постоянные. (В частности, неподвижная точка будет эллиптической, когда $\delta_{1,2}$, $\mu\neq 0$ малы).

Опишем идею доказательства. Пункт 1) следует из того факта, что уравнения (2.1) инвариантны относительно замены $(q, r, \gamma_1)\to(-q, -r, -\gamma_1)$ и из определения координат ξ, r и отображения T. Выражение для α_0 вытекает из анализа отображения S, проведенного в п. 3. Согласно п. 3 осцилляционной теоремы для уравнения (3.1) $f_0(0, 0, 0)$ — вещественное число и неподвижная точка O отображения T_0 является эллиптической, когда малое $\mu\neq 0$. Значения f_0, f_1 при $\mu=\delta_1=\delta_2=0$ были найдены выше. Вид выражения для значения α_1 вытекает из анализа процедуры нахождения нормальной формы Биркгофа [22]. Доказательство основано на использовании нечетности T, справедливости разложения $\lambda_S^{\pm 1}=1\pm ig\mu+\ldots$, $g\neq 0$ по степеням μ и результатов п. 3, касающихся отображений S, T в случае $\mu=0$.

Согласно КАМ-теории [19] из $f_1\neq 0$ вытекает

Следствие. Решение Г типа (I) орбитально устойчиво, если $0<|\mu|<\mu_0$, $|\delta_{1,2}|<\varepsilon$, где μ_0, ε — некоторые положительные величины.

Случай (III). Нетрудно найти, что в случае $\Lambda>0$:

$$\alpha_0=\gamma\pi(2\Lambda)^{1/2}+O(\gamma^3),\quad \alpha_1=-\pi/2+O(\gamma)$$

для нормальной формы Биркгофа (5.1) отображения T_0. Рассуждая совершенно аналогично лемме, можно показать, что для отображения T: $\alpha_0=\gamma f_0(\gamma^2, \delta)$, $\alpha_1=f_1(\gamma^2, \delta)$, где $f_0(0, 0)=\pi(2\Lambda)^{1/2}$, $f_1(0, 0)=-\pi/2$, f_0, f_1 — аналитические функции, если $0\leqslant\gamma<\gamma_0$, $|\delta|<\varepsilon$, где γ_0, ε — некоторые положительные постоянные.

Следствие. Решение Г типа (III) является эллиптическим и орбитально устойчивым, если $0<\gamma<\gamma_0$, $|\delta|<\varepsilon$, где положительные γ_0, ε непрерывно зависят от L, M, N, C.

6. Теорема о двузначности и аналитической зависимости комплексной нормальной формы Биркгофа. Смена характера устойчивости вращательных движений.

Теорема 1. Пусть D — область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, T — аналитически зависящее от параметра $\mu \in D$ каноническое отображение $\mathbb{C}^2$ на себя с неподвижной точкой $(0, 0)$. Пусть собственные числа линейной части T в точке $(0, 0)$ не равны тождественно корням 3-й и 4-й степени из единицы, т. е. след $\Delta(\mu)$ линейной части не равен тождественно -2, -1, 0 или 2. При каждом μ таком, что $\Delta(\mu) \neq -2, -1, 0, 2$, можно рассмотреть нормальную форму Биркгофа (возможно, комплексную) (5.1) для преобразования T. Тогда α_0^2, α_1 будут однозначными аналитическими функциями $\mu \in D$, все особые точки которых являются полюсами.

Доказательство элементарно и основано на анализе алгоритма нахождения нормальной формы [22]. Этот алгоритм, вообще говоря, двузначен, то есть величина α_0 определяется с точностью до сомножителя ± 1.

Следствие. Если $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 \neq 0$ для всех $\mu \in D$, кроме, возможно, некоторого множества, не имеющего предельных точек в D.

Если отображение T действительное и $|\Delta(\mu)| < 2$, то нормальная форма (5.1) будет также действительной. Если при этом $\alpha_1 \neq 0$, то согласно КАМ-теории [19] неподвижная точка $(0, 0)$ отображения T действительной плоскости на себя будет устойчива.

1°. Решения (I) типа. *Теорема 2.* 1) Для любого натурального m существует такое $\varepsilon > 0$, что если $|\delta_1| < \varepsilon$, $|\delta_2| < \varepsilon$, то найдутся такие числа $0 = \mu_0^+ < \mu_1^- < \mu_1^+ < \ldots < \mu_m^- < \mu_m^+$, что при $\mu \in (\mu_i^-, \mu_i^+)$ решение Γ — гиперболическое, при $\mu \in (\mu_i^+, \mu_{i+1}^-)$ решение Γ — эллиптическое, при $\mu = \mu_i^\pm$ решение Γ вырождено.

2) Решение Γ орбитально устойчиво для всех $\mu \in (\mu_i^+, \mu_{i+1}^-)$, кроме, может быть, некоторого конечного множества.

Доказательство. Пункт 1) вытекает из осцилляционной теоремы для уравнения (3.1) (см. п. 4) с учетом того факта, что решение Γ эллиптическое при малых $\mu \neq 0$ (см. п. 5). При этом $\mu_i^\pm \to \lambda_i^\pm$ для $\delta_1 \to 0$, $\delta_2 \to 0$. Пункт 2) вытекает из теоремы 1 и вида асимптотики нормальной формы Биркгофа при $\mu \to 0$.

2°. Решения (III) типа. Согласно п. 3 отображение S представимо в виде $S = S_1^2$. Поэтому, $\Delta = \operatorname{tr} \mathbf{S} \geqslant -2$ и, в частности, у уравнения (3.3) на интервале длины $4\mathrm{K}(k)$ отсутствуют области неустойчивости H_{2n+1}.

Теорема 3. 1) Для любого натурального m существует l_0, удовлетворяющее следующему условию. Если $l^2 = \Lambda/N > l_0$, то для заданных L, M, N, C найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для $|\delta| < \varepsilon$ существуют числа $0 = \mu_0^+ < \mu_1^0 < \mu_1^- < \mu_1^+ < \mu_2^0 < \mu_2^- < \mu_2^+ < \ldots < \mu_m^- < \mu_m^+$, обладающие тем свойством, что при

$\gamma^2 \in (\mu_i^-, \mu_i^+)$ решение Γ — гиперболическое, при $\gamma^2 \in (\mu_i^+, \overset{\circ}{\mu}_{i+1}) \cup (\overset{\circ}{\mu}_{i+1}, \mu_{i+1}^-)$

решение Γ — эллиптическое, при $\gamma^2 = \mu_i^\pm$, μ_i^0 решение Γ вырождено.

2) Решение Γ орбитально устойчиво для всех $\gamma^2 \in (\mu_i^+, \mu_{i+1}^-)$, кроме, может быть, некоторого конечного множества.

Доказательство. Пункт 1) вытекает из результатов п. 4 для уравнения (3.3) с учетом $\Delta \geqslant -2$ и того факта, что решение Γ эллиптическое при малых γ (см. п. 5). При этом $\mu_i^\pm \to \lambda_{2i}^\pm / N$, $\mu_i^0 \to \lambda_{2i-1}/N$ для $\delta \to 0$ при фиксированных L, M, N, C. П. 2 полностью аналогичен п. 2) теоремы 2.

Сочетание аналитической зависимости нормальной формы и элементов КАМ-теории использовалось ранее в задаче об устойчивости лагранжевых периодических решений в ограниченной задаче трех тел [23]. Однако, если задача обладает симметрией, то возможна ситуация, когда решение аналитически зависит от параметров, но область в пространстве параметров, где решение является эллиптическим, не связно. В этом случае теорема 1 позволяет достаточно полно исследовать вопрос об орбитальной устойчивости решения в его области эллиптичности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Яхья Х. М.* Качественные исследования плоских и близких к ним движений твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 4. С. 618–623.
2. *Млодзеевский Б. К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук о-ва любит. естествозн., антропол. и этногр. М.: 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.
3. *Гуляев М. П.* О маятникообразных движениях тяжелого твердого тела, имеющего одну закрепленную точку // Тр. механ.-матем. ф-та Казах. ун-та. 1960. Т. 1. № 2. С. 8–17.
4. *Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г.* О некоторых плоско-параллельных движениях твердого тела // Проблемы аналитической механики и управления движением. М.: ВЦ АН СССР. 1985. С. 67–75.
5. *Ишлинский А. Ю., Василенко В. П., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г.* Об одной форме установившихся колебаний тяжелого твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. Вып. 2. С. 3–18.
6. *Архангельский Ю. А.* Об устойчивости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в одном частном случае // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 294–302.
7. *Яхья Х. М.* Об устойчивости плоских движений твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском силовом поле // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1981. № 4. С. 57–60.
8. *Yehia H. M.* On the reduction of the order of equations of motion of gyrostat in an axisymmetric field // J. méc. théor. et appl. 1983. V. 2. No. 3. P. 451–462.
9. *Маркеев А. П.* О плоских и близких к плоским вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. Вып. 4. С. 29–36.
10. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости // Харьков: тип. Дарре, 1893. 234 с.
11. *Козлов В. В., Трещев Д. В.* Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. II // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1986. № 1. С. 39–44.
12. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения // М.: Наука. 1972. 720 с.
13. *Ince E. L.* A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1922. V. 21. No. 2. P. 117–120.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. // М.: Наука, 1967. 299 с.
15. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука, 1983. 352 с.
16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
17. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. // М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
18. *Ince E. L.* Further investigations into the periodic Lamé functions // Proc. Roy. Soc. of Edinburgh. 1939–1940. V. 60. Pt. 1. P. 83–99.
19. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах // М.: Мир, 1973. 167 с.
20. *Маркеев А. П., Чуркина Н. И.* О периодических решениях Пуанкаре канонической системы с одной степенью свободы // Письма в «Астрон. ж.». 1985. Т. 11. № 8. С. 634–639.
21. *Трещев Д. В.* О существовании бесконечного количества невырожденных периодических решений гамильтоновой системы, близкой к интегрируемой // Геометрия, дифференциальные уравнения и механика/М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 121–127.
22. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике // М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959. 300 с.
23. *Леонтович А. М.* Об устойчивости лагранжевых периодических решений в ограниченной задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143. № 3. С. 525–528.

Москва

Поступила в редакцию 24.I.1989