

УДК 539.3:534.1

© 1990 г.

В. И. МИТРЯЙКИН, В. Н. ПАЙМУШИН

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ
ПРИ ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИССЛЕДОВАНИИ
МЕХАНИКИ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН,
ИМЕЮЩИХ СЛОЖНЫЙ КОНТУР**

Для расчета оболочек со сложным контуром разработана методика, базирующаяся на использовании метода возмущений в комбинации с методом, требующим построения специальной параметризации срединной поверхности оболочки. Особенности ее применения проиллюстрированы на решении задачи об устойчивости цилиндрической оболочки с параллельными косыми срезами. Получена формула для определения критического внешнего давления, которая корректируется на основе данных эксперимента.

1. Введение. В условиях теоретико-экспериментального метода Саченкова [1], основанного на синтезе теории и эксперимента, предварительный теоретический анализ уравнений, как правило, позволяет, не решая самих уравнений, установить с точностью до произвольных констант (функций) искомые структурные зависимости, характеризующие особенности механического поведения пластины или оболочки. Задачей эксперимента при этом является определение в структуре установленных формул указанных произвольных констант или функций. В свою очередь, от этого набора безразмерных параметров существенно зависит и требуемый объем экспериментальной работы, который в рамках описываемого метода сводится к минимуму, если удастся свести к минимуму число указанных безразмерных параметров.

Если пластины или оболочки имеют канонические очертания контура, то для построения соответствующих структурных формул широко могут быть использованы и используются традиционные прямые методы вариационного исчисления. Однако, в том случае, когда пластина или оболочка имеют сложный контур, задача построения структурных формул, как правило, оказывается трудно решаемой.

Практически приемлемый и в достаточной степени эффективный подход для решения таких задач в рамках теоретико-экспериментального метода может быть сконструирован на синтезе известного метода возмущений с методом, предложенным в [2], требующим построения специальной параметризации на срединной поверхности оболочки. При использовании этого подхода необходимость построения решения задачи методом возмущения в высоких приближениях отпадает, так как устанавливаемые приближенные структурные формулы, содержащие необходимую информацию о форме контура пластины или оболочки, корректируются путем последующего проведения экспериментальных исследований на специально изготавливаемых моделях.

Для решения задачи механики деформируемых твердых тел, имеющих неканоническую форму, метод возмущений в тех или иных вариантах использовался в работах многих авторов. Подробный обзор таких решений дан в [3, 4], а в [5] изложены результаты решения этим методом некоторых задач в сравнении с методом продолжения по параметру, которые позволяют получить решения при значительных отклонениях неканонических областей от канонических.

2. Алгоритм метода возмущений. Пусть пластина или оболочка на срединной поверхности σ , отнесенной к некоторой системе криволинейных координат α^1, α^2 , занимает область Ω , контурные линии которой не совпадают с отрезками координатных линий $\alpha^i = \text{const}$. Если форма области $\Omega \in \sigma$ топологически соответствует некоторой канонической области $\Omega_0 \in \sigma$, ограниченной отрезками координатных линий $\alpha^i = \alpha_n^i, \alpha^i = \alpha_e^i$, то для области Ω при применении метода [2] может быть построена специальная параметризация, позволяющая в точках области Ω вычислить компоненты первого и второго метрических тензоров a_{ih}, b_{ih} , а также символы Кристоффеля второго рода Γ_{ij}^k . При этом вся информация о форме области $\Omega \in \sigma$ будет содержаться в разрешающих уравнениях задачи (L — некоторый дифференциальный оператор, u — неизвестная вектор-функция задачи, f — известная правая часть)

$$Lu = f \quad (\alpha^i \in \Omega) \quad (2.1)$$

если эти уравнения отнесены к метрике a_{ih} .

Из всего многообразия пластин и оболочек со сложным контуром можно выделить такой частный класс, для которого отличие канонической области Ω_0 от области Ω характеризуется лишь одним параметром ξ . В этом случае при наложении определенных ограничений на ξ функции a_{ih}, b_{ih} и Γ_{ij}^k можно представить рядами

$$a_{ih} = \sum_{s=0}^{\infty} \xi^s a_{ih}^{(s)}, \quad b_{ih} = \sum_{s=0}^{\infty} \xi^s b_{ih}^{(s)}, \quad \Gamma_{ij}^k = \sum_{s=0}^{\infty} \xi^s \Gamma_{ij}^{k(s)} \quad (2.2)$$

подстановка которых в (2.1) приводит к уравнению

$$\sum_{s=0}^{\infty} \xi^s L^{(s)} u = f \quad (\alpha^i \in \Omega_0) \quad (2.3)$$

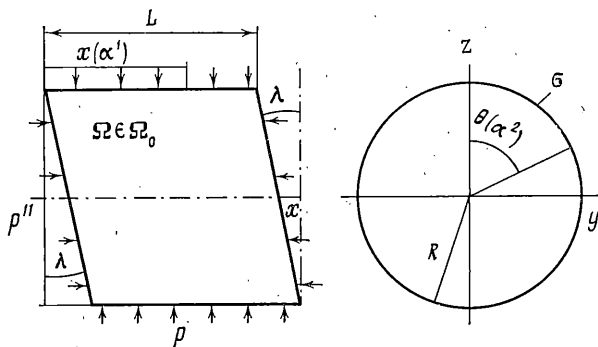
Если теперь в соответствии с методом возмущений вектор-функцию u разложить в ряд

$$u = \sum_{s=0}^{\infty} \xi^s u^{(s)} \quad (2.4)$$

и подставить в (2.3), то приравниванием нулю множителей при различных степенях параметра ξ приходим к последовательности зацепляющихся краевых задач. При использовании описанной схемы решения задачи в условиях теоретико-экспериментального метода для построения структурных формул, которые будут содержать характеризующий форму контура параметр ξ , в (2.2), (2.4), как правило, можно ограничиться удержанием небольшого количества членов. При этом для интегрирования (2.3) или уравнений, следующих из (2.3) при подстановке в них (2.4), эффективно могут быть использованы прямые методы, требующие в рамках указанного подхода построения координатных функций в вычисляемой расчетчиком канонической области $\Omega_0 \in \sigma$.

3. Структурные формулы для цилиндрической оболочки с параллельными косыми срезами. Проиллюстрируем изложенную схему анализа механики деформирования пластин и оболочек со сложным контуром на конкретном примере. С этой целью рассмотрим задачу устойчивости цилиндрической оболочки некоторого радиуса R , имеющей параллельные косые срезы, расположенные под углом λ к плоскости нормальных срезов $x=0, x=L$ (фиг. 1). Если срединную поверхность σ такой оболочки отнести к традиционной цилиндрической системе координат $\alpha^1 = x, \alpha^2 = \theta$ и методом [2] отобразить на область Ω каноническую область Ω_0 , ограниченную линиями параллелей $x=0, x=L$, то формулы для $a_{ih}, b_{ih}, \Gamma_{ij}^k$, выведенные в [6], примут вид

$$a_{11} = 1, a_{12} = -R\xi \sin \theta, \quad a_{22} = R^2(1 + \xi^2 \sin^2 \theta).$$



Фиг. 1

$$b_{11}=b_{12}=0, \quad b_{22}=-R, \quad \Gamma_{11}^1=\Gamma_{12}^2=\Gamma_{11}^2=\Gamma_{22}^2=0 \quad (3.1)$$

$$\Gamma_{22}^1=-R\xi \cos \theta, \quad \xi=\operatorname{tg} \lambda$$

Для решения задачи воспользуемся классической линейризованной теорией о локальной форме потери устойчивости оболочек, базирующейся на гипотезах Кирхгофа — Лява. В рамках соотношений этой теории вариационные уравнения метода Бубнова с учетом (3.1) могут быть представлены в виде

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \left(T^{11} \frac{\partial \delta u}{\partial x} - \Gamma_{22}^1 T^{22} \delta u + T^{12} \frac{\partial \delta u}{\partial \theta} \right) dx d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \left(T^{12} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + T^{22} \frac{\partial \delta v}{\partial \theta} \right) dx d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\left(T_0^{11} \frac{\partial w}{\partial x} + T_0^{12} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \left(T_0^{12} \frac{\partial w}{\partial x} + T_0^{22} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - M^{11} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - 2M^{12} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial \theta} - M^{22} \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \delta w}{\partial x} - M^{22} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} + T^{22} R \delta w \right] dx d\theta = 0 \quad (3.2)$$

где u, v — ковариантные компоненты вектора перемещений точек σ ; w — прогиб; T^{ih}, M^{ih} — контравариантные компоненты тензоров внутренних усилий и моментов; T_0^{ih} — докритические усилия в оболочке, для которых при равномерном осевом сжатии оболочки силами P^{11} и внешнем давлении p (фиг. 1), исходя из безмоментных уравнений равновесия, с точностью до ξ^2 можно установить формулы:

при осевом сжатии

$$T_0^{11} \approx -p^{11} (1 + 1/2 \xi^2 \sin^2 \theta), \quad T_0^{12} = 0, \quad T_0^{22} = 0 \quad (3.3)$$

при внешнем давлении

$$T_0^{11} = 0, \quad T_0^{12} = -p \xi \sin \theta, \quad T_0^{22} = -p/R \quad (3.4)$$

Для оболочки с толщиной t , выполненной из изотропного материала, имеющего коэффициент Пуассона ν и модуль упругости E , входящие в (3.2) усилия T^{ih} и моменты M^{ih} с использованием (3.1) и соотношений упругости [6], можно представить разложениями

$$T^{ih} = T_{(0)}^{ih} + \xi T_{(1)}^{ih} + \xi^2 T_{(2)}^{ih}, \quad M^{ih} = M_{(0)}^{ih} + \xi M_{(1)}^{ih} + \xi^2 M_{(2)}^{ih} \quad (3.5)$$

$$T_{(0)}^{11} = B \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\nu}{R} w \right), \quad T_{(0)}^{12} = B \frac{1-\nu}{2R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

$$\begin{aligned}
T_{(0)}^{22} &= B \left(\frac{\nu}{R^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R^3} w \right), & M_{(0)}^{11} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
M_{(0)}^{12} &= -D \left(\frac{1-\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right), & M_{(0)}^{22} &= -D \left(\frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
T_{(1)}^{11} &= B \left[\frac{\sin \theta}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\nu}{R} \cos \theta u \right) \right], \\
T_{(1)}^{12} &= B \left[\frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sin \theta}{R^3} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + R w \right) \right] \\
T_{(1)}^{22} &= B \left[\frac{\sin \theta}{R^3} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\cos \theta}{R^3} u \right], \\
M_{(1)}^{11} &= -D \left(\frac{2 \sin \theta}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{R} \cos \theta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
M_{(1)}^{12} &= -D \left(\frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\sin \theta}{R^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\
M_{(1)}^{22} &= -D \left(\frac{2 \sin \theta}{R^3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\cos \theta}{R^3} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
T_{(2)}^{11} &= B \left[2 \sin^2 \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + R w \right) \right], \\
T_{(2)}^{12} &= B \left[\frac{\sin^2 \theta}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\sin \theta \cos \theta}{R^2} u \right] \\
T_{(2)}^{22} &= B \left(\frac{\sin^2 \theta}{R^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), & M_{(2)}^{11} &= -D \left(2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\
M_{(2)}^{12} &= -D \left(2 \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{R^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\
M_{(2)}^{22} &= -D \left(\frac{\sin^2 \theta}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), & B &= \frac{Et}{1-\nu^2}, & D &= \frac{Bt^2}{12}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

В соответствии со структурой зависимостей (3.6) и вариационных уравнений (3.2), введем в рассмотрение вектор-функцию

$$U = \left\{ u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\}^T \tag{3.7}$$

что позволяет, с учетом (3.1), (3.3), (3.4), (3.6), уравнения (3.2) записать в виде

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} [L_0 + \xi L_1 + \xi^2 L_2 - \varphi (H_0 + \xi H_1 + \xi^2 H_2)] \delta U \, dx \, d\theta = 0 \tag{3.8}$$

где $L_k = L_k(U)$, $H_k = H_k(U)$, ($k=0, 1, 2$) — прямоугольные матрицы порядка 3×11 , составляемые из дифференциальных выражений (3.6) и с учетом (3.7); φ — параметр критической нагрузки. Представим теперь U и φ разложениями $U = u_0 + \xi u_1 + \xi^2 u_2$, $\varphi = \varphi_0 + \xi \varphi_1 + \xi^2 \varphi_2$ и внесем их в (3.8). Если при этом в (3.8) сохранить слагаемые с ξ в степени не выше второй, учесть независимость вариаций δu_0 , δu_1 , δu_2 , то приравнивая нулю выражений при одинаковых степенях приходим к трем вариационным уравнениям позволяющим определить φ_0 , φ_1 и φ_2 :

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} (L_0 - \varphi_0 H_0) \delta u_0 \, dx \, d\theta = 0, \quad \int_0^L \int_0^{2\pi} [L_1 - (\varphi_0 H_1 + \varphi_1 H_0)] \delta u_0 \, dx \, d\theta = 0$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} [L_2 - (\varphi_0 H_2 + \varphi_1 H_1 + \varphi_2 H_0)] \delta u_0 dx d\theta = 0 \quad (3.9)$$

Наряду с описанной схемой можно предложить и другую схему решения рассматриваемой задачи, использование которой в силу линейности задачи при одинаковой аппроксимации перемещений приводит к тем же результатам, но при меньшем объеме вычислений.

Пусть края оболочки $x=0$, $x=L$ шарнирно оперты. Тогда для функций u , v и w , входящих в (3.6), (3.8), можно принять выражения

$$\begin{aligned} u &= U_0 \cos(m\pi L^{-1}x) \sin n\theta, & v &= V_0 \sin(m\pi L^{-1}x) \cos n\theta \\ w &= W_0 \sin(m\pi L^{-1}x) \sin n\theta \end{aligned} \quad (3.10)$$

точно удовлетворяющие граничным условиям шарнирного опирания для невозмущенной задачи (оболочка с параллельными срезами): $T_{(0)}^{11} = 0$, $M_{(0)}^{11} = 0$, $v = w = 0$ ($x=0, L$). Внесем выражения (3.3), (3.4), (3.5) в уравнения (3.2), учтем формулы (3.6) и подставим вместо u , v , w принятые представления (3.10). Тогда после ряда традиционных преобразований приходим к системе трех однородных алгебраических уравнений

$$([A] + \xi^2[B] - \varphi[C] - \varphi\xi^2[D])\{x\} = 0 \quad (3.11)$$

где $\{x\} = \{U_0, V_0/R, W_0\}^T$, а через φ обозначен параметр критической нагрузки, определяемый по формулам: $\varphi_* = p^{11}/B$ — при осевом сжатии; $\varphi_{**} = pR/B$ — при внешнем давлении.

Входящие в (3.11) матрицы $[A]$, $[B]$ имеют вид

$$[A] = \begin{bmatrix} k^2 \frac{1}{2}(1-\nu)n^2 & \frac{1}{2}(1+\nu)kn & -\nu k \\ \frac{1}{2}(1+\nu)kn & \frac{1}{2}(1-\nu)k^2 + n^2 & -n \\ \nu k & n & -\varepsilon(k^2 + n^2)^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 2k^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n^2 & kn & -\frac{1}{2}k \\ kn & \frac{1}{2}k^2 & 0 \\ \frac{1}{2}k & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon k^2(2k^2 + 6n^2 + 1) \end{bmatrix}$$

при внешнем давлении

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

при осевом сжатии

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}k \end{bmatrix}$$

причем, $\varepsilon = t^2/(12R^2)$, $k = m\pi R/L$.

В силу того, что рассматриваемая задача является четной по параметру ξ , в (3.11) слагаемые с множителем отсутствуют. Поэтому для входящих в (3.11) вектора неизвестных $\{x\}$ и величины φ примем разложения

$$\{x\} = \{x_0\} + \xi^2\{x_2\}, \quad \varphi = \varphi_0 + \xi^2\varphi_2 \quad (3.12)$$

Внося их в (3.11), с точностью до ξ^2 , получим

$$([A] - \varphi_0[C])\{x_0\} + \xi^2([A] - \varphi_0[C])\{x_2\} + \xi^2([B] - \varphi_0[D] - \varphi_2[C])\{x_0\} = 0$$

откуда следует

$$([A] - \varphi_0[C])\{x_0\} = 0 \quad (3.13)$$

и в силу (3.13) для определения φ_2 , приходим к уравнению

$$\det([B] - \varphi_0[D] - \varphi_2[C]) = 0 \quad (3.14)$$

При осевом сжатии для параметра критической нагрузки, исходя из (3.12), (3.13), (3.14), устанавливаем формулу

$$\varphi_* = (1 - \frac{1}{4}\xi^2) [\varepsilon(1 + \nu^2)\nu^{-1}n^2 + (1 - \nu^2)\nu^2(1 + \nu^2)^{-1}n^{-2} + \frac{1}{2}\xi^2[\varepsilon + 2\varepsilon(\nu^2 + 3)n^2 - [(1 + n^2)(4\nu^2 - 3)]^{-1}], \quad \nu = m\pi R/(nL)$$

а при внешнем давлении для аналогичного параметра φ_{**} с учетом того, что $m=1$, $k=\pi R/L$, приходим к формуле

$$\begin{aligned} \varphi_{**} = & \varepsilon(\eta^2+1)^2 n^2 + (1-\nu^2) n^{-2} \eta^4 (1+\eta^2)^{-2} + \\ & + \xi^2 [1/2 \varepsilon \eta^2 (6+n^{-2}+2\eta^2) n^2 - 1/2 \eta^2 n^{-2} [n^{-2}-3+4\eta^2]^{-1}] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\eta = \pi R / (Ln)$$

причем при $\xi = \operatorname{tg} \lambda = 0$ из (3.15) и (3.16) следуют соответствующие формулы для цилиндрических оболочек с нормальными срезами, приведенные в [7]. В соответствии с [7] принято

$$q = \varphi_{**} R (1-\nu^2)^{-1} / t, \quad q = p E^{-1} (R/t)^2 \quad (3.17)$$

Исходя из (3.15) и (3.16) могут быть построены различные варианты приближенных структурных формул для их применения в условиях теоретико-экспериментального метода.

4. Упрощенные структурные формулы. Рассмотрим случай нагружения тонкой оболочки равномерным давлением и, с целью установления структурной зависимости для критической нагрузки, проведем последовательное упрощение формулы (3.16). Пусть $t/R \sim \varepsilon_p$, $\eta^2 \sim \varepsilon_p$, где ε_p — некоторая малая величина, которой можно пренебречь по сравнению с единицей.

Очевидно, оценка $\eta^2 \sim \varepsilon_p$ [7] при $L/R \sim 1$ или $L/R < 1$ может иметь место лишь в том случае, когда $1/n \sim (\varepsilon_p)^{1/2}$. При выполнении таких условий имеют место приближенные равенства и оценки $1+\eta^2 \approx 1$, $\varepsilon \eta^2 n^2 \sim \varepsilon_p^2$, $\varepsilon \eta^2 \sim \varepsilon_p$, $\varepsilon \eta^4 n^2 \sim \varepsilon_p^3$, $\eta^2 n \sim (\varepsilon_p)^{1/2}$, $1-3n^2+4\eta^2 n \sim -3n^2$, $\eta^2 n^{-2} \sim \varepsilon_p^2$, в силу которых формулы (3.16), (3.17) представим в следующей приближенной форме:

$$\varphi_{**} = \varepsilon n^2 + (1-\nu^2) n^{-2} \eta^4 + \xi^2 (3\varepsilon \eta^2 n^2 + 1/6 \eta^2 n^{-2}) \quad (4.1)$$

$$q = \frac{n^2 t}{12(1-\nu^2)R} + \frac{\pi^4 R^5}{L^4 t n^6} + \frac{\operatorname{tg}^2 \lambda R}{(1-\nu^2)t} \left(\frac{\pi^2 t^2}{4L^2} + \frac{\pi^2 R^2}{3L^2 n^4} \right) \quad (4.2)$$

Для дальнейшего упрощения формулы (4.2) проведем минимизацию q по n . В случае $\xi=0$ при $\nu=0,3$, как известно,

$$n = 2,7 (R/L)^{1/2} (R/t)^{1/2} \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в (4.2), можно установить для q следующую структурную формулу

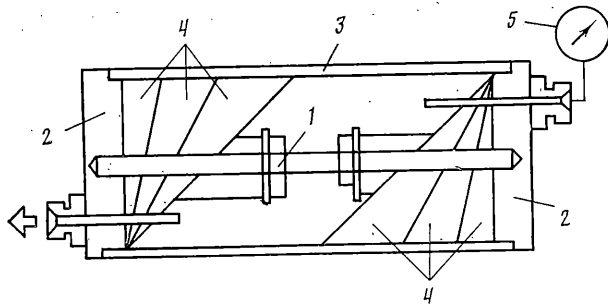
$$q = 0,92 (R/L) (t/R)^{1/2} + c [\operatorname{tg}^2 (\lambda) R T] L^{-2} \quad (4.4)$$

где c — безразмерный коэффициент, определяемый экспериментальным путем и позволяющий скорректировать построенные теоретические решения (3.16) или (4.1).

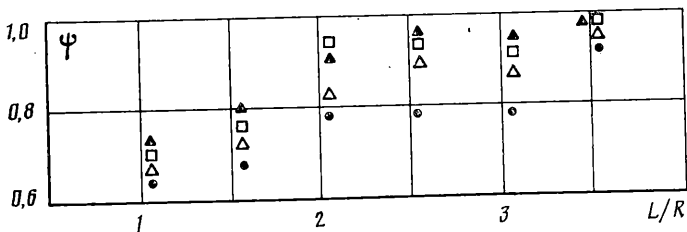
5. Экспериментальные результаты. Для проведения экспериментальных исследований было спроектировано и изготовлено специальное устройство [8], которое схематично изображено на фиг. 2. Устройство содержит крепежную штангу 1, связанные с ней заглушки 2, на которых жестко закреплена испытываемая оболочка 3, два пакета сменных вкладышей 4, которые плотно прилегают к внутренней цилиндрической поверхности оболочки 3, при этом граничная поверхность крайнего вкладыша соответствует заданному косому срезу.

При испытании оболочки давлением свободная поверхность оболочки, т. е. поверхность, не опирающаяся на усеченные вкладыши 4, представляет собой оболочку с косыми срезами.

Внешнее давление создавалось путем вакуумирования внутреннего объема оболочки и измерялось образцовым вакуумметром 5. Герметизация оболочки осуществлялась нанесением герметика на наружные поверхности стыковых соединений. Были испытаны изготовленные из алюминиевой фольги оболочки со следующими геометрическими характеристиками: $R/t=1052$, $L/R=1+4$. Косые срезы имели значения $\lambda=0, 15, 30, 45^\circ$ и располагались параллельно. При испытаниях фиксировалась величина критического давления p_* , соответствующая моменту потери устойчивости оболочки. Первоначально были испытаны оболочки с нормальными срезами, затем с косыми срезами. Характер выпучивания оболочек с косыми срезами мало отличался от характера выпучивания оболочек с нормальными срезами. В докритическом состоянии деформации по всей поверхности оболочки росли линейно, затем при крити-



Фиг. 2



Фиг. 3

ческом давлении произошел хлопок, т. е. потеря устойчивости оболочки. Выпучины образовывались по всей поверхности и имели форму суживающихся эллипсов. Вдоль образующей формировалась одна полуволна, а в окружном направлении — от 6 до 13 волн, в зависимости от длины оболочки. Новое равновесное состояние выпучины увеличивались в плане, их большая ось несколько поворачивалась. Между выпучинами у краев оболочки образовывались вторичные волны, имеющие форму ромба. Нагружение прекращалось при давлении, в 1,5 раза превышающем критическое, чтобы избежать разрушения оболочки. При разгрузке происходил выхлоп и оболочка восстанавливала свою первоначальную форму. При повторном нагружении этой оболочки всегда реализовывалась равновесная форма с числом окружных волн, соответствующим первому хлопку, но значение критического давления снижалось. На фиг. 3 приведена сводка экспериментальных значений $\psi = p^*/p$ для оболочек,

λ	$L/R=1$	$L/R=1,5$	$L/R=2$	$L/R=2,5$	$L/R=3$	$L/R=3,5$
15°	2,60	2,63	2,79	2,72	2,60	2,71
30°	2,52	2,52	2,52	2,56	2,45	2,62
45°	2,44	2,34	2,34	2,33	2,34	2,49

имеющих различные длины и косые срезы, где p определялось по формуле из (3.17), (3.16), причем залитые треугольники, светлые квадратики, светлые треугольники и залитые кружки соответствуют $\lambda=0,15, 30, 45^\circ$. Экспериментальные значения критического давления для оболочек с параллельными косыми срезами составляют 63–97% от значений, определяемых по указанной выше формуле. Причем, если для коротких оболочек $L/R=1$ разница между экспериментальными и расчетными значениями критического давления составляет до 37%, то с увеличением длины оболочки она снижается до 3–5%. Такая же тенденция отмечена для цилиндрических оболочек с нормальными срезами [9]. Экспериментально установлено, что с увеличением углов косых срезов величина критического давления увеличивается, причем для оболочек с $L/R=4$ влияние косых срезов на повышение критической нагрузки меньше, чем с $L/R=1$. Значение коэффициента ψ зависит от отношения L/R , λ и приведено в таблице.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саченков А. В. Теоретико-экспериментальный метод исследования устойчивости пластин и оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. Вып. 6–7. С. 391–433.
2. Галимов К. З., Паймушин В. Н. Теория оболочек сложной геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. 163 с.
3. Кубенко В. Д., Немши Ю. Н., Шнеренко К. И., Шульга Н. А. Метод возмущений в краевых задачах механики деформируемых тел // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 11. С. 3–20.

4. *Немиш Ю. Н.* Трехмерные граничные задачи теории упругости для неканонических областей // Прикл. механика, 1980. Т. 16. № 2. С. 3-39.
5. *Григолюк Э. И., Шалашилин В. И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики деформируемого тела. М.: Наука, 1988. 231 с.
6. *Паймушин В. Н.* К проблеме расчета пластин и оболочек со сложным контуром // Прикл. механика, 1980. Т. 16. № 4. С. 63-70.
7. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
8. *Митряйкин В. И., Паймушин В. Н.* Устройство для испытания давлением полый цилиндрической оболочки. А. С. № 1142767 // Бюлл. изобр. 1985. № 8. С. 155.
9. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.

Казань

Поступила в редакцию
1.III.1988