МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1990

УДК 539.374
© 1990 г.

Б. Е. ПОБЕДРЯ

О ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В связи с развитием механики композитов появилась потребность в распространении теорий механики деформируемого твердого тела на анизотропные среды. Это связано прежде всего с тем, что для расчета оптимального армирования композиционных материалов удобно оперировать с осредненными механическими характеристиками [1], заменив действительную неоднородность (гетерогенность) на структурную анизотропию однородных материалов.

В данной работе описываются определяющие соотношения теории пластичности первоначально трансверсально изотропных материалов. Деформации считаются малыми, а приобретенная деформационная анизотропия незначительной. Все выкладки для простоты проводятся с использованием прямоугольной декартовой системы координат. В тексте часто под словом «тензор» понимаются его компоненты.

1. Всякий симметричный тензор второго ранга, например, тензор деформации с компонентами ε_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$, как известно, можно разложить на шаровой тензор ${}^1/_3\theta\delta_{ij}$ и девиатор e_{ij}:

$$\varepsilon_{ij}={}^1/_3\theta\delta_{ij}+e_{ij} \tag{1.1}$$

где $\theta=\varepsilon_{kk}$, δ_{ij} — дельта Кронекера [2]. Тензор деформации имеет три независимых инварианта, два из которых чаще всего выбираются такими: θ — линейный инвариант (относительное изменение объема) и ε_u — интенсивность тензора деформации

$$\varepsilon_u=(e_{ij}e_{ij})^{1/2} \tag{1.2}$$

«квадратичный» инвариант. Заметим, что инварианты и сам тензор понимаются нами в связи с некоторой группой преобразований, например, ортогональной, т. е. включающей в себя все непрерывные преобразования перехода от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой.

Заметим также, что единичный тензор с компонентами δ_{ij} является единственным тензором, который не меняет своих компонент при любом ортогональном преобразовании (составляет тензорный базис группы ортогональных преобразований или группы изотропии).

Из разложения (1.1) можно сделать несколько заключений. Например, а) в разложении (1.1) участвуют два тензора — шаровой и девиатор, которые являются ортогональными между собой (их полная свертка равна нулю) ${}^1/_3\theta\delta_{ij}e_{ij}=0$; б) при любом ортогональном преобразовании шаровой тензор остается шаровым, а девиатор — девиатором (тензором, линейный инвариант которого равен нулю); в) линейный инвариант θ образуется с помощью свертки тензора ε_{ij} с тензором тензорного базиса группы изотропии [2] $\theta=\varepsilon_{ij}\delta_{ij}$, а квадратичный инвариант (интенсивность ε_u) связан только с компонентами девиатора (1.2).

Аналогичные выводы можно сделать и для тензора напряжений с компонентами σ_{ij}, разлагая его на шаровой $\sigma\delta_{ij}$ и девиатор s_{ij}

$$\sigma_{ij}=\sigma\delta_{ij}+s_{ij}, \qquad \sigma={}^1/_3\sigma_{kk}$$

Если теперь определяющие соотношения, связывающие тензор напряжений и деформаций, ввести как изотропную тензорную функцию, то согласно теореме Гамильтона — Кели будем иметь [2]:

$$\sigma_{ij}=\alpha_1\delta_{ij}+\alpha_2\varepsilon_{ij}+\alpha_3\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} \tag{1.3}$$

где α_1, α_2 и α_3 — функции трех независимых инвариантов тензора деформации θ, ε и некоторого третьего инварианта, в качестве которого можно принять, например, определитель девиатора деформаций $\det|e_{ij}|$.

Часто принимается гипотеза квазилинейности соотношений (1.3), т. е. отсутствия в них последнего слагаемого в правой части. Этого можно достичь положив $\alpha_3(\theta, \varepsilon_u, \det|e_{ij}|)=0$, т. е. установить зависимость между тремя инвариантами тензора деформации. Поэтому независимыми останутся только два, например, θ и ε_u. В этом случае соотношения (1.3) могут быть записаны в виде

$$s_{ij}=\sigma_u e_{ij}/\varepsilon_u$$

причем предполагается зависимость между инвариантами тензоров напряжений и деформаций

$$\sigma=\sigma(\theta, \varepsilon_u)\equiv\alpha_1+{}^1/_3\alpha_2\theta, \qquad \sigma_u=\sigma_u(\theta, \varepsilon_u)\equiv\alpha_2\varepsilon_u \tag{1.4}$$

Для упрощенной теории, когда линейные инварианты тензоров напряжений и деформаций связаны линейно, а квадратичные не зависят от линейных, соотношения (1.4) принимают вид $\sigma=K\theta$, $\sigma_u=\sigma_u(\varepsilon_u)$, $K=\text{const}$.

В теории пластичности делается различие между процессом нагрузки (активным) и процессом разгрузки (пассивным) [3]. В частности, если материал обладает мягкой характеристикой (фиг. 1) $0<d\sigma_u/d\varepsilon_u\leqslant\sigma_u/\varepsilon_u\leqslant\leqslant 2\mu$, то допустима линейная разгрузка

$$s_{ij}-s_{ij}'=2\mu(e_{ij}-e_{ij}')$$

где штрихом помечены величины, достигнутые к моменту разгрузки.

Для материалов с жесткой характеристикой (фиг. 2): $2\mu\leqslant\sigma_u/\varepsilon_u\leqslant d\sigma_u/d\varepsilon_u<\infty$ по энергетическим соображениям линейная разгрузка не осуществима.

2. Рассмотрим теперь трансверсально-изотропную среду, т. е. среду со свойствами, не зависящими от поворота на любой угол вокруг некоторой оси, называемой осью трансверсальной изотропии. Положим для примера, что эта ось направлена по оси координат x_3.

Очевидно тождество

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}=\frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\varepsilon_{33}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2} & \varepsilon_{12} & 0\\ \varepsilon_{21} & \dfrac{\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&\varepsilon_{13}\\0&0&\varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}&\varepsilon_{32}&0\end{bmatrix}$$

или

$$\varepsilon_{ij}={}^1/_2\theta^* a_{ij}+\varepsilon b_{ij}+p_{ij}+2q_{ij} \tag{2.1}$$

$$a_{ij}=\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2}, \qquad b_{ij}=\delta_{i3}\delta_{j3} \tag{2.2}$$

$$\theta=\varepsilon_{ij}a_{ij}, \qquad \varepsilon=\varepsilon_{ij}b_{ij} \tag{2.3}$$

$$q_{ij}\equiv{}^1/_2(\varepsilon_{ik}b_{kj}+\varepsilon_{jk}b_{ki})-\varepsilon b_{ij}$$

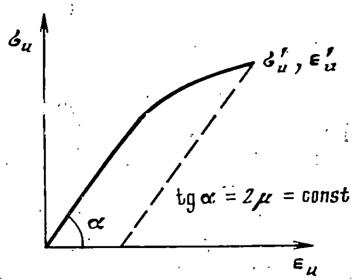
$$p_{ij}\equiv{}^1/_2(\varepsilon_{ik}a_{kj}+\varepsilon_{jk}a_{ki})-{}^1/_2\theta^* a_{ij}-q_{ij} \tag{2.4}$$

Тензор деформации, как и всякий симметричный тензор второго ранга, имеет пять независимых инвариантов относительно вращений вокруг оси x_3. Два из этих инвариантов линейные (2.3), а два — квадратичные:

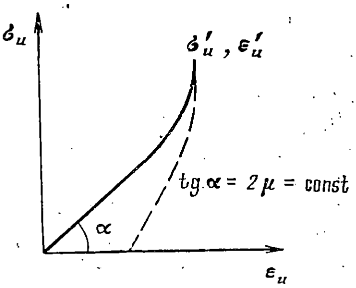
$$p=(p_{ij}p_{ij})^{1/2}, \qquad q=(2q_{ij}q_{ij})^{1/2} \tag{2.5}$$

Аналогично п. 1 сделаем замечания относительно разложения (2.1): *а*) в разложении (2.1) участвуют четыре тензора, которые являются попарно ортогональными:

$$a_{ij}b_{ij}=0, \qquad a_{ij}p_{ij}=0, \qquad a_{ij}q_{ij}=0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$b_{ij}p_{ij}=0, \qquad b_{ij}q_{ij}=0, \qquad p_{ij}q_{ij}=0 \tag{2.6}$$

б) при любом преобразовании одной прямоугольной системы координат в другую поворотом на любой угол вокруг оси x_3, каждый из четырех тензоров (2.1) переходит в себе подобный, т. е. сохраняются свойства (2.3) — (2.6);

в) линейные инварианты θ^* и ε_{33} образуются с помощью свертки тензора ε_{ij} с тензорами тензорного базиса a_{ij}, b_{ij} группы трансверсальной изотропии (2.3), а квадратичные инварианты p, q, связаны только с компонентами соответствующих тензоров p_{ij}, q_{ij} (2.5).

Разумеется, ось трансверсальной изотропии не обязательно направлена по оси x_3. Пусть ее направление характеризуется вектором **с** с компонентами c_i. Тогда имеем вместо (2.2):

$$a_{ij}=\delta_{ij}-c_ic_j, \qquad b_{ij}=c_ic_j \tag{2.7}$$

В этом случае линейные инварианты (2.3) принимают вид

$$\varepsilon=\varepsilon_{ij}b_{ij}=c_i\varepsilon_{ij}c_j, \qquad \theta^*=\varepsilon_{ij}a_{ij}=\theta-\varepsilon \tag{2.8}$$

а квадратичные (2.5):

$$q^2=2q_{ij}q_{ij}=c_i\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}c_k-\varepsilon^2$$
$$p^2=p_{ij}p_{ij}=\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}+\varepsilon^2-{}^1/_2\theta^{*2}-2c_i\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}c_j \tag{2.9}$$

В частности, если ось трансверсальной изотропии ортогональна оси x_1 и составляет угол φ с осью x_3, то из (2.7) имеем

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & -\sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi \end{bmatrix}$$

а из (2.8) и (2.9) соответственно:

$$\varepsilon=\varepsilon_{22}\sin^2\varphi+\varepsilon_{33}\cos^2\varphi+2\varepsilon_{23}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$\theta^*=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\cos^2\varphi+\varepsilon_{33}\sin^2\varphi-2\varepsilon_{23}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$p^2={}^1/_2[\varepsilon_{11}-(\varepsilon_{22}\cos\varphi+\varepsilon_{33}\sin\varphi-2\varepsilon_{23}\sin\varphi\cos\varphi)]^2+$$
$$+2(\varepsilon_{12}\cos\varphi-\varepsilon_{13}\sin\varphi)^2$$
$$q^2=[(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})\sin\varphi\cos\varphi+\varepsilon_{23}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)]^2+$$
$$+(\varepsilon_{12}\sin\varphi+\varepsilon_{13}\cos\varphi)^2$$

Аналогичные выводы можно сделать и для тензора напряжений с компонентами σ_{ij}, для которого справедливо представление

$$\sigma_{ij}=\sigma^*a_{ij}+sb_{ij}+P_{ij}+2Q_{ij}$$
$$\sigma^*={}^1/_2\sigma_{ij}a_{ij}, \qquad s=\sigma_{ij}b_{ij}$$
$$Q_{ij}={}^1/_2(\sigma_{ik}b_{kj}+\sigma_{jk}b_{ki})-sb_{ij}$$
$$P_{ij}={}^1/_2(\sigma_{ik}a_{kj}+\sigma_{jk}a_{ki})-\sigma^*a_{ij}-Q_{ij}$$
$$P=(P_{ij}P_{ij})^{1/2}, \qquad Q=(Q_{ij}Q_{ij})^{1/2}$$

3. Для описания тензорных трансверсально изотропных функций можно ввести в рассмотрение симметричный тензор (напряжений), являющийся изотопной тензорной функцией двух аргументов: симметричного тензора (деформаций) и вектора, характеризующего направление оси трансверсальной изотропии [2].

Принимая для простоты это направление совпадающим с осью x_3 будем иметь

$$\sigma_{ij}=\alpha_1\delta_{ij}+\alpha_2\delta_{3i}\delta_{3j}+\alpha_3\varepsilon_{ij}+\alpha_4(\delta_{3i}\varepsilon_{3j}+\delta_{3j}\varepsilon_{3i})+\alpha_5\varepsilon_{ih}\varepsilon_{hj} \tag{3.1}$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_5$ — функции пяти независимых инвариантов тензора деформаций: θ^*, ε, p, q и например $\det|e_{ij}|$ (относительно преобразований вращения вокруг оси x_3). Для квазилинейных соотношений (3.1) следует положить $\alpha_5=0$, что делает перечисленные инварианты зависимыми. Тогда в качестве независимых можно выбрать θ^*, ε, p, q. Поэтому имеем

$$P_{ij}=P/pp_{ij},\quad Q_{ij}=Q/qq_{ij} \tag{3.2}$$

причем имеются зависимости

$$\sigma^*=\sigma^*(\theta^*,\ \varepsilon,\ p,\ q)=\alpha_1+\alpha_2/2+\alpha_3\theta^*/2$$
$$s=s(\theta^*,\ \varepsilon,\ p,\ q)=\alpha_1+\alpha_2+(\alpha_3+2\alpha_4)\varepsilon$$
$$P=P(\theta^*,\ \varepsilon,\ p,\ q)=\alpha_3,\ Q=Q(\theta^*,\ \varepsilon,\ p,\ q)=\alpha_3+\alpha_4 \tag{3.3}$$

Квазилинейную связь между тензорами напряжений и деформаций для анизотропной среды естественно определить в виде $\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, где C_{ijkl} — функции инвариантов тензора деформаций относительно группы преобразований, связанной с данным видом анизотропии.

Как видим, общая теория, построенная на определяющих соотношениях (3.2), (3.3), (как и всякая общая теория) довольно сложна, ибо даже для активного процесса требует экспериментального определения четырех функций четырех переменных.

Для того, чтобы теорию можно было использовать на практике (сделать теорию «серьезной» [4]) необходимо ввести дополнительные предположения.

Например, для «разделенной» теории линейные инварианты зависят только от линейных

$$\sigma^*=\sigma^*(\theta^*,\ \varepsilon),\ s=s(\theta^*,\ \varepsilon) \tag{3.4}$$

а квадратичные только от квадратичных

$$P=P(p,\ q),\ Q=Q(p,\ q) \tag{3.5}$$

В «упрощенной» теории функции (3.4) являются линейными

$$\sigma^*=\mu_1\theta^*+\mu_2\varepsilon,\ s=\mu_2\theta^*+\mu_3\varepsilon \tag{3.6}$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — материальные константы.

В «простейшей» теории материальные функции (3.5) зависят от одного аргумента

$$P=P(p),\ Q=Q(q) \tag{3.7}$$

При необходимости можно вводить предположения отдельно относительно линейных инвариантов (3.4) и отдельно относительно квадратичных (3.5). В работе [5] теоретически обоснована возможность упрощения общих соотношений (3.2), (3.3) на основе определения эффективных характеритик слоистых композитов с изотропными упруго-пластическими компонентами.

Возможность введения линейной разгрузки обеспечивается «мягкостью» соответствующих характеристик (3.7). Заметим, что допустимы случаи, когда соотношения $Q=Q(q)$ описываются мягкой характеристикой, а $P=P(p)$ — жесткой, или наоборот.

Из обработки экспериментальных данных по деформированию однонаправленных стекловолокнистых композитов [6] следует, что они хорошо описываются упрощенной теорией, причем соотношения являются линейными $P=\mu_4p$, а $Q=Q(q)$ описываются мягкой характеристикой.

Для рассмотренных выше определяющих соотношений сформулирована краевая квазистатическая задача, доказаны существование и единственность ее решения, теорема о простом нагружении, а также предложены итерационные методы численного решения и проведен анализ их сходимости [4]. Решены также некоторые конкретные пространственные задачи [7].

4. Заметим, что приращение работы деформации в случае рассмотренных выше определяющих соотношений (3.2), (3.3) имеет вид $dA=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}=$ $=\sigma^* d\theta^*+s d\varepsilon+P dp+2Q dq$. Это приращение является полным дифференциалом упругого потенциала W для состояния упругости

$$W={}^1/_2\{\mu_1\theta^{*2}+2\mu_2\varepsilon\theta^*+\mu_3\varepsilon^2+\mu_4 p^2+2\mu_5 q^2\}$$

Для простейшей теории (3.7) также может быть записан потенциал работы деформации

$$W={}^1/_2\{\mu_1\theta^{*2}+2\mu_2\varepsilon\theta^*+\mu_3\varepsilon^2\}+\int\limits_0^p P\,dp+\int\limits_0^q Q\,dq$$

Для формулировки некоторых теорий платичности удобно введение понятия поверхности текучести (или поверхности пластичности). На примере рассмотренной выше деформационной теории видно, что достижение некоторого предельного значения $P=P_s$ не связано впрямую с предельным значением $Q=Q_s$. Естественно поэтому для трансверсально изотропной среды ввести две поверхности текучести

$$F_P(\sigma^*, s, P, Q)=0, \ F_Q(\sigma^*, s, P, Q)=0 \qquad (4.1)$$

Первая из поверхностей (4.1) отделяет упругую область от пластической для тензора P_{ij}, а вторая — для тензора Q_{ij}. Можно рассмотреть различные частные случаи уравнений (4.4). Один из простейших вариантов является обобщением условия Мизеса:

$$P=P_s, \ Q=Q_s \qquad (4.2)$$

где P_s и Q_s — некоторые экспериментально определяемые постоянные.

В случае идеальной пластичности при выполнении условий (4.2) определяющие соотношения деформационной теории (3.2) примут вид

$$P_{ij}=P_s p_{ij}/p, \ Q_{ij}=Q_s q_{ij}/q$$

Для теории течения определяющие соотношения могут быть записаны в виде [8]:

$$dp_{ij}=\frac{1}{\mu_4}dP_{ij}+d\lambda_p P_{ij}, \qquad dq_{ij}=\frac{1}{\mu_5}dQ_{ij}+d\lambda_q Q_{ij} \qquad (4.3)$$

К этим соотношениям (4.3) должны быть добавлены (3.6) в обращенном виде

$$d\theta^*=M_1 d\sigma^*+M_2 ds, \quad d\varepsilon=M_2 d\sigma^*+M_3 ds \qquad (4.4)$$

$$M_1=\frac{\mu_3}{M}, \quad M_2=-\frac{\mu_2}{M}, \quad M_3=\frac{\mu_1}{M}, \quad M\equiv\mu_1\mu_3-\mu_2^2 \qquad (4.5)$$

В соотношениях (4.3) отсутствует однозначная зависимость между деформациями и напряжениями ввиду неопределенности величин $d\lambda_p$ и $d\lambda_q$.

Соотношения (4.4) могут быть заменены условиями трансверсально изотропной несжимаемости $\theta^*=0$, $\varepsilon=0$. Если в соотношениях (4.3) пренебречь упругими деформациями, то получим

$$u_{ij}/U=P_{ij}/P, \quad v_{ij}/V=Q_{ij}/Q \qquad (4.6)$$

$$u_{ij}\equiv dp_{ij}/dt, \quad v_{ij}\equiv dq_{ij}/dt, \quad U=(u_{ij}u_{ij})^{1/2}, \quad V=(v_{ij}v_{ij})^{1/2}$$

Для простых процессов в широком смысле [3] соотношения (4.5) совпадают с соотношениями (3.2) деформационной теории.

При выполнении условий (4.2) соотношения (4.3) соответствуют теории Прандтля — Рейсса, а соотношения (4.6) — теории Сен-Венана — Мизеса

$$u_{ij}/U=P_{ij}/P_s, \quad v_{ij}/V=Q_{ij}/Q_s$$

Некоторые более общие теории рассмотрены в работе [9].

Заметим, что теория, описывающая связь между тензорами P_{ij} и p_{ij} может быть «отделена» от теории, описывающей связь между тензорами Q_{ij} и q_{ij}. Скажем, определяющие соотношения для тензоров P_{ij} и p_{ij} могут быть описаны деформационной теорией (3.2), а для тензоров Q_{ij} и q_{ij} — теорией течения, например, (4.3) и т. п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 143 с.
2. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 263 с.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
4. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
5. *Победря Б. Е., Каралюнас Р. И.* Упругопластическое поведение слоистых композитов // Научно-технический прогресс в машиностроении. Вып. 1. Композиционные материалы. М.: Междунар. центр науч. и техн. информации, 1987. С. 98–117.
6. *Amijima S., Adachi T.* Nonlinear Stress-strain response of laminated composites // J. Composite Materials, 1979. V. 13. P. 206–218.
7. *Халджигитов А. А.* Задача о равновесии анизотропного параллелепипеда // Докл. АН УзССР. 1984. № 8. С. 15–17.
8. *Победря Б. Е.* Об анизотропии в теории течения // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1985. № 6, С. 66–70.
9. *Победря Б. Е.* Особенности теории процессов для композитов // Механика композит. материалов. 1984. № 4. С. 612–617.

Москва

Поступила в редакцию
22.I.1990